0.0.1 μ 崩壊についての理論的側面

我々は π 崩壊の branching ratio について理論的考察をした。しかし、この節でやるべきことがまだある。それは、本実験で必要となる μ の崩壊のエネルギー分布を理論的に引き出すことである。

まず、これを行なう動機を述べよう。$\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$ 崩壊と、$\pi^+ \to e^+\nu_e$ 崩壊の branching ratio を測定するには、ただ単に、最後に残った μ^+ の数と e^+ の数を比較すれば良いだけというわけではない。そのうちには、back ground として入ってくるものははもちろん、$\mu^+ \to e^+\nu_\mu\bar{\nu}_e$ から出来るものも考慮に入れなければならないのである。特に、前の節で触れたように $\pi^+ \to e^+\nu_e$ の崩壊は極めて少なく、ただ単に e^+ の数を測定しただけでは $\mu^+ \to e^+\nu_\mu\bar{\nu}_e$ から来るものがほとんど全てとなる。我々はこの e^+ に崩壊する 2 つの崩壊様式を何としても区別する必要がある。

そこで考えられる方法が、エネルギーで区別するというやり方である。$\mu^+ \to e^+\nu_\mu\bar{\nu}_e$ から来る e^+ のエネルギーは本実験では５３ MeV 程度であり、$\pi^+ \to e^+\nu_e$ から来る e^+ のエネルギーは７０ MeV 程度である。したがって、エネルギーで区別することが可能かどうかについて、エネルギーがどういう拡がりをもっているかどうかを考えなければならない。

我々はそのために、μ の崩壊におけるエネルギー分布について考える必要がある。

早速本題に入ろう。前節で行なった 4 Fermi 相互作用の方法で出来るのであるが、ここでは、Weinberg-Salam model で W boson の propagator も考慮して、摂動計算しよう。次のように、運動量とスピンを定義する。

$$\mu\left(p_1, s_a\right) \to \bar{\nu}_e\left(p_2\right) + \nu_\mu\left(p_3\right) + e_+\left(p_4, s_b\right)$$

散乱振幅は leading order で次のようになる。

$$M = -\frac{g^2}{8}\left(\bar{u}_3\gamma_\mu\left(1-\gamma_5\right)u_1\right)\left(\frac{-g_{\mu\nu} + q^\mu q^\nu/M_W^2}{q^2 - M_W^2}\right)\left(\bar{u}_4\gamma_\nu\left(1-\gamma_5\right)u_2\right)$$

ただし、u はそれぞれの、free field における波動関数に相当するものである。また、g は弱い相互作用の coupling constant、M_W は W boson の質量（80 GeV) である。この式から、

$$|M|^2 = \frac{g^4}{64M_W^4}L_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$$

ただし、

$$L_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\left[\left(\mathrm{u}_3\bar{u}_3\right)\gamma_\mu\left(1-\gamma_5\right)\left(u_1\bar{u}_1\right)\gamma_\nu\left(1-\gamma_5\right)\right]$$

また、

$$M^{\mu\nu} = \left(p_4 - m_e s_b\right)_\alpha p_{2\beta}\mathrm{Tr}\left(\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\nu\left(1-\gamma_5\right)\right)$$

以上の結果を、μ について spin average をとると、

$$|M|^2 = \frac{g^4}{M_W^4} \left[p_3 \cdot (p_4 - m_b s_b) \, p_2 \cdot (p_1 - m_a s_a) \right]$$

という結果が得られる。μ の静止系で考える。(他の系には Lorentz boost で持っていける。) 次のような運動量、スピンと定義できる。

$$\begin{aligned} p_1 &= (m_a, \mathbf{0}) \\ s_a &= (0, \mathbf{s}_a) \\ p_4 &= (E_4, \mathbf{p}_4) \\ s_b &= (\mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{s}_b / m_b, \mathbf{s}_b + (\mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{s}_b) \, \mathbf{p}_4 / m_b \, (E_4 + m_b)) \end{aligned}$$

崩壊率の式に代入してエネルギー微分で表現すると、

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{g^4}{32 M_W^4} \frac{m_a^5 n(x)}{192 \pi^3}$$

ただし、

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{E_4}{(E_4)_{\max}} \\ (E_4)_{\max} &= \tfrac{m_a}{2} \end{aligned}$$

また、

$$n(x) = 2x^2 (3 - 2x)$$

また、x で積分すると、

$$\Gamma = \frac{g^4}{32 M_W^4} \frac{m_a^5}{192 \pi^3}$$