μ 粒子の寿命, 磁気能率および偏極率の測定

1997 年度 課題演習 前期 A1

— 弱い相互作用 —

加藤 一成
小又 雄一朗
佐藤 松夫
新家 英太郎
高須 洋介
本田 洋介

目 次

1 Abstract **1**

2 理論および実験原理 **2**
2.1 地上に降る粒子 . . . 2
2.2 μ の生成 . . . 2
2.3 μ の崩壊 . . . 2
2.4 粒子と物質の相互作用 . . . 3
2.4.1 μ とアルミの相互作用 . . . 3
2.4.2 電子、陽電子とアルミの相互作用 . . . 3
2.5 μ^- について . . . 4
2.6 スピンの歳差運動と g 因子 . . . 4

3 実験装置とそのセット アップ **6**
3.1 装置 . . . 6
3.2 装置の調整 . . . 6
3.2.1 磁場の調整 . . . 6
3.2.2 各光電子増倍管へかける電圧の調整 . . . 6
3.3 実験装置のセットアップ . . . 7
3.4 回路 . . . 9
3.5 いよいよ実験開始 . . . 10

4 Magnetic Field **11**

5 解析 **13**
5.1 Data の選択の基準 . . . 13
5.2 寿命 . . . 13
5.3 g 因子 . . . 14
5.4 偏極率 . . . 15

6 結論および反省 **17**
6.1 結論 . . . 17
6.2 反省 . . . 17

7 謝辞 **18**

A μ^+ の崩壊遷移確率の導出 **19**

B muon のスピン歳差運動 **24**

C μ 粒子の偏極率 **25**

1 Abstract

宇宙線中に含まれる muon は、主に 1 次、2 次宇宙線と大気との相互作用で生成された π 中間子や K 中間子の崩壊によって作られる。この時、muon とともに出てくるニュートリノのヘリシティーと運動学的理由により地上に到達する muon は偏極していることが分かる。

本実験では、一様磁場中における muon の崩壊を観測することにより、その life time を調べるとともに、spin の歳差運動と muon の崩壊の際放出される陽電子の角分布から、$g-$factor および偏極率を調べる。

2　理論および実験原理

2.1　地上に降る粒子

宇宙から地球へ降り注ぐ粒子を 1 次宇宙線という。それは原子核であり、主に水素 (陽子) であり、また、鉄よりも重いものは来ない。(反応断面積が大きいため) 大気中にはいると、大気の粒子と強い相互作用して 2 次宇宙線ができる。$K,\ \pi,\ \mu,\ \nu$, 陽子、中性子から成る。K の寿命: $1.23{\times}10^{-8}$ sec (静止時), $2.50{\times}10^{-}6$ sec (100 GeV) より、地上に達するまでに崩壊してしまう。(100 GeV で $7.51{\times}10^{2}$ m 進む) π は μ より寿命が 100 倍短い ($2.6{\times}10^{-8}$ sec) なので、実験で、このオーダーのものはのぞく必要がある。また、原子核が直接地表にくる可能性であるが、p-p 散乱の断面積 $\sigma = 4 \times 10^{-26}$ cm^2 から平均自由行程 $\rho(\rho = A/N\sigma$; 散乱確率の逆数) は 100 g/cm^2 程度なので、ほとんど崩壊するとしてよい (大気の深さは 90 度で 1000 g/cm^2)。μ の散乱断面積は 5×10^{-30} cm^2 平均自由行程は 10^6 g/cm^2 なので降ってくる μ はほとんど地表にくると考えられる。これらのことから、実験でうまく μ のみをとらえることができる。

地上にやってくる μ の分布については、エネルギーに対する粒子数分布が知られており、それを載せておく。これを積分すると、一秒間に 10×10 cm^2 に一個の割合で降ってくることが分かり、実験がきちんと μ をとらえていることをチェックできる。崩壊が見られる粒子数の頻度については μ と物質との相互作用のところで議論する。

2.2　μ の生成

次の 2 つの弱い相互作用により生成される。

$$\begin{aligned} K^{\pm} &\rightarrow \pi^0 + \mu^{\pm} + \nu \quad (25\%) \\ \pi^{\pm} &\rightarrow \mu^{\pm} + \nu \quad (75\%) \end{aligned}$$

μ^+ の偏極について述べる。まず、重心系で考える。$\pi^{\pm}$ はスピンが 0 であり、運動量保存と、スピンの保存により、このとき生じる ν と μ はヘリシティが一致する。 ν は左巻きのみが存在しているので、 μ は左巻きである。実験室系で考えると、π の初速により、上の方に崩壊した μ は右巻きになる。しかし、μ を, ある範囲のエネルギーレベルで観測する、今回の実験においては、π はエネルギーが小さいほど多い (崩壊は粒子の速度が遅くなって、寿命が進むことによって起きる。) ので同じエネルギーを持った μ では左巻きの方が π のエネルギーが小さいので結局 μ は完全ではないが、左巻きが多く、スピンは上向きに偏極している。K による μ は 3 体崩壊するので、スピンに関してはランダムなので、これをあわせても偏極していることがわかる。μ^- については ν が反粒子としてでてくるので、ヘリシティは逆になる。

2.3　μ の崩壊

弱い相互作用により以下のように崩壊する。

$$\begin{aligned} \mu^+ &\rightarrow \bar{\nu}_\mu + \nu_e + e^+ \\ \mu^- &\rightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_e + e^- \end{aligned}$$

この微分崩壊率は (Appendix A 参照)

$$d\Gamma = \frac{G^2 {m_\mu}^5}{48 \cdot (2\pi)^3} \sin\theta \, d\theta \left[1 + \frac{1}{3}\cos\theta\right] \left[\frac{1 + \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_e}{2}\right] \tag{2.1}$$

この式より、μ^+ のスピンの向きに e^+ が飛んでいきやすいことが解る。μ^- については $P \rightarrow -P$ となる。つまり、e^- はスピンと逆向きに放出されやすい。偏極の議論と併せて、結果的に、μ^+ の偏極の向きに電荷が放出されることになる (Fig. 2.1 参照)。

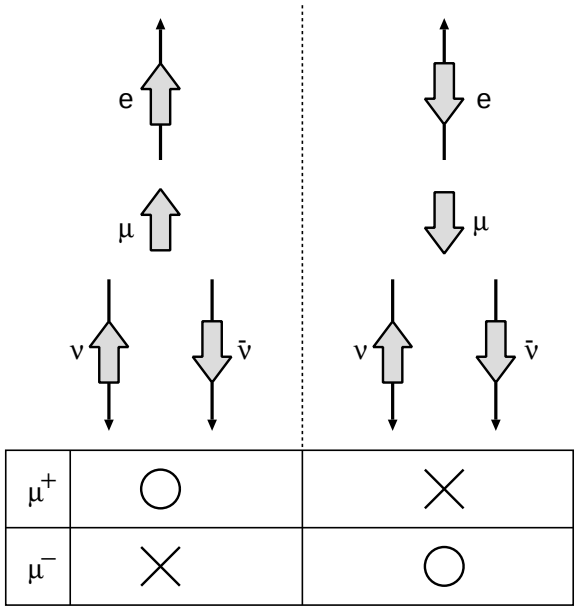

図 2.1: μ 粒子の崩壊

2.4 粒子と物質の相互作用

2.4.1 μ とアルミの相互作用

荷電粒子は物質中でクーロン相互作用をする。離れた電子との相互作用は古典力学的に扱えて、静電場をローレンツ変換することにより、電子の散乱の表式が得られる。この効果を遠隔衝突という。近い電子とのクーロン相互作用は量子力学で記述できて、クーロン散乱により、物質中の電子を散乱する。これを非放射性衝突過程という。これらをあわせて電離というが、このときの粒子の進む長さに対するエネルギーの損失を計算したものに Bethe の公式がある。物質中における飛程のグラフを後に掲載する。

このほかに、原子核との相互作用により荷電粒子の進路が曲げられ、電磁波を発生することによりエネルギーを損失する。これを制動放射という。電離による損失は一回あたりの衝突によるものは小さいが、遠隔衝突によるものにより、多くの衝突をする。制動放射による損失は一回あたりのものが大きい代わりに、原子核の有効散乱パラメーターの範囲にはいらないと衝突しないので、回数が少ない。これらのことから、高エネルギー粒子の場合、制動放射による損失が大きく、低エネルギー粒子の場合は電離によるものが大きいことが解る。今回の実験では低エネルギーの μ を対象にするので、電離による損失が主に効くとしてよい。　グラフにより、10 cm 程度のアルミによって、150 MeV 程度以下の μ が物質中で止まり、崩壊することが解る。

2.4.2 電子、陽電子とアルミの相互作用

陽電子は質量以外は μ と同じなのだが、電子の場合は電子同士の非放射性衝突過程において、同種粒子なので、二つを区別できないことと、フェルミオンであることから、散乱振幅の対称性が要請され、いくらか異なる。これらの粒子は、μ の崩壊によって、生じるので、低エネルギーとしてよく、電離による損失が主である。電子のエネルギー損失の式は

- 非相対論的速さの場合：

$$-\frac{dE}{dx} = 4C\frac{m_e c^2}{\beta^2}\left[\log\left(\frac{\beta^2 m_e^2 c^2}{2I}\right) - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\right] \tag{2.2}$$

- 相対論的速さの場合：

$$-\frac{dE}{dx} = 4Cm_e c^2\left[\log\left(\frac{2m_e c^2}{I}\right) + \frac{3}{2}\log\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) - \frac{1}{2}\log 8 + \frac{1}{16}\right] \tag{2.3}$$

である。ここで C は入射粒子から見た物質 $1\mathrm{g}$ 中にある電子が占める全断面積で

$$C = \pi r_e^2 Z\frac{N}{A} \tag{2.4}$$

である。また I は平均電離エネルギーである。

電子の損失のグラフも後に掲載する。μ の崩壊によって生じる電子のエネルギーは三体崩壊なので連続スペクトルになる。e^+ について計算する。e^+ の最大エネルギーは e^+ が $\nu_e,\ \nu_\mu$ と正反対に放出されるときである。エネルギー保存、運動量保存を質量エネルギーも入れて計算すると

$$T_e = \frac{(m_\mu c^2 - m_e c^2)^2}{2m_\mu c^2}$$

数値にすると $T_e = 52.31\ \mathrm{MeV}/c^2$ これより低いエネルギーの電子についてのスペクトル (Appendix A 参照) を考えても、一枚のアルミを通過するために必要なエネルギー $20\ \mathrm{MeV}$ を越えるものが多いことが解り、崩壊粒子は上からの通過粒子がある時間信号を出さず、その後上または下に信号を出すことで解る。

2.5 μ^- について

μ^- の中には物質中で崩壊せずに電子のように原子核に捕まえられて軌道を回ってしまうものもある。アルミ中で捕まえられる割合は、崩壊するものの $2/3$ 倍程度であることが実験により知られている。しかし、今回の実験では、崩壊後の電子によって、崩壊を測定するのでこの効果は無視できる。

2.6 スピンの歳差運動と g 因子

静止した粒子は磁場中でスピンが歳差運動する。磁気モーメントと磁場の相互作用ハミルトニアンによる時間発展により、スピンの期待値は各振動数 $\omega = \dfrac{geB}{2m_\mu c}$ で回転する。Dirac の理論からは、$g = 2$ であるが、より厳密に Feynmann 則を計算すると、少しずれてくる。これをできれば検出したい。

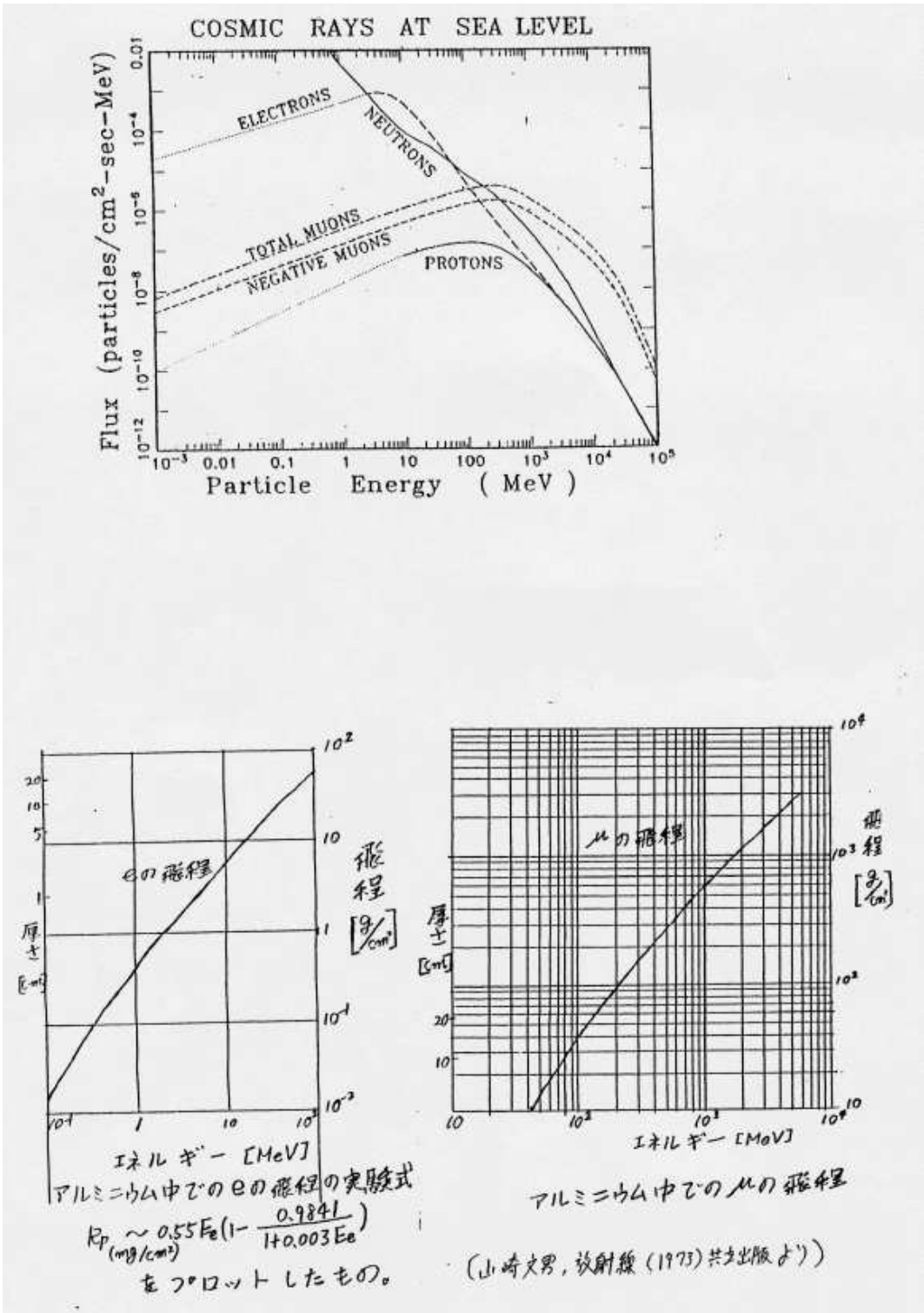

図 2.2: 宇宙線のエネルギー分布および物質中での μ, e のエネルギー損失

3　実験装置とそのセットアップ

3.1　装置

- ソレノイドコイル
  - メインコイル **(MC)**
    長さ 90 cm, 巻き数 408 turn, 直径 48 cm (単位長さあたりの巻き数 $n = 4.53$ turn/m)
  - 補正コイル **(SC1,SC2)**
    長さ 12 cm, 巻き数 54 turn, 直径 48 cm ($n = 4.53$ turn/m)
  - 対称性コイル **(BC1,BC2)**
    長さ 12 cm, 巻き数 54 turn, 直径 48 cm ($n = 4.53$ turn/m)
- シンチレータ
  - シンチレータ **S1,S2**
    20 cm × 36 cm × 3.0 cm のプラスチックシンチレータ
  - シンチレータ **S3** $\sim$ **S10**
    48 cm × 98 cm × 0.7 cm のプラスチックシンチレータ
- アルミニウム板
  48 cm × 98 cm × 3.0 cm のもの 3 枚
- 光電子増倍管 **PMT1** $\sim$ **PMT10**
- **NIM MODULES**

3.2　装置の調整

3.2.1　磁場の調整

この実験では一様な磁場をつくることが重要である。ソレノイドコイルの長さが有限であるから、メインコイル (MC) のみでは、コイルの中心から離れるに従って、磁場が弱くなり、十分一様な磁場はできない。このため、補正コイル (SC1, SC2) を Fig.3.1 のようにメインコイルの両端 12 cm に配置した。コイルを巻く段階でどうしても左右が非対称になってしまうという、技術的な問題がある。しかし、磁場の対称性を微調整する為に対称性コイル (BC1, BC2) をさらに巻き、流す電流のバランスを適当に調整すると、磁場を対称化し、磁場の一様な部分を広げることができる。

3.2.2　各光電子増倍管へかける電圧の調整

各光電子増倍管の感度は、μ のシンチレーション光と e のシンチレーション光を検出するのに十分でなければならない。この為には光電子増倍管にかかる電圧を大きくすればよい。しかし、電圧が大きすぎると、光電子増倍管が劣化する恐れがあること、また、熱電子等が原因となるノイズが増加し、測定に影響を与えることから、適当な電圧を設定することが必要である。電圧の決定は、空から降ってくる μ をもちいて、以下のような手順で行った。

1. 基準となる光電子増倍管を 2 つ選択する (P1, P2 とする)。今回は、取り扱いの容易さから、PMT1, PMT2 を選んだ。

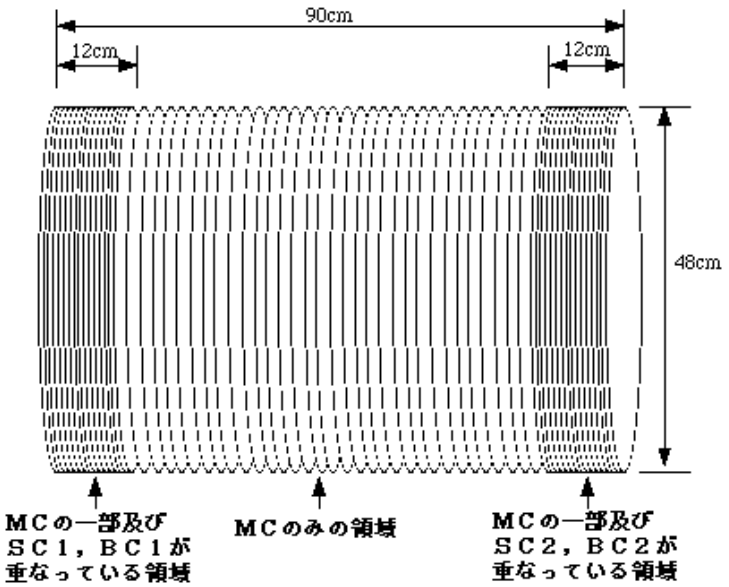

図 3.1: 各コイルの配置

2. 電圧を決定したい光電子増倍管 (P とする) と P1, P2 を Fig.3.2 のように配置する。

3. P1 と P2 の同時計測である Scaler1 のよみの増加の割合が μ の降ってくる割合の理論値と一致するように P1 と P2 の電圧を調整する。これで、P1 と P2 の同時計測は μ だけを数えていることが保証される。(つまり、μ の取りこぼしはなく、ノイズを数えているわけでもない。)

4. この状態で、P の電圧 (V_P) をある値にして、P の空から降ってくる μ に対する感度 $K(V_P)$、

$$K(V_P) = \frac{\text{P, P1, P2 の同時計測 (Scaler2 のよみ)}}{\text{P1, P2 の同時計測 (Scaler1 のよみ)}} \tag{3.1}$$

の値を十分長い時間かけて測定する。

5. 4. の測定を V_P の各値で行い、結果を横軸を V_P、縦軸を K としたグラフにする。(例えば Fig.3.3 のようになる)

6. グラフ上で、K の値が 0.97 を越えたときの V_P の値より約 100 V 高い値を P にかける電圧として決定する。この電圧では、P1 と P2 を通過した μ のうちほとんど全てを P で検出できていることになる。

この方法で、μ の取りこぼしはほとんど起こらない状態で、できるだけ低い電圧を決定することができる。μ のシンチレーション光が検出できるならば、シンチレータ中でのエネルギー損失が μ より大きい e は十分検出できる。

3.3 実験装置のセットアップ

実験装置を Fig.3.4 のように配置した。このように配置した理由は以下の通りである。

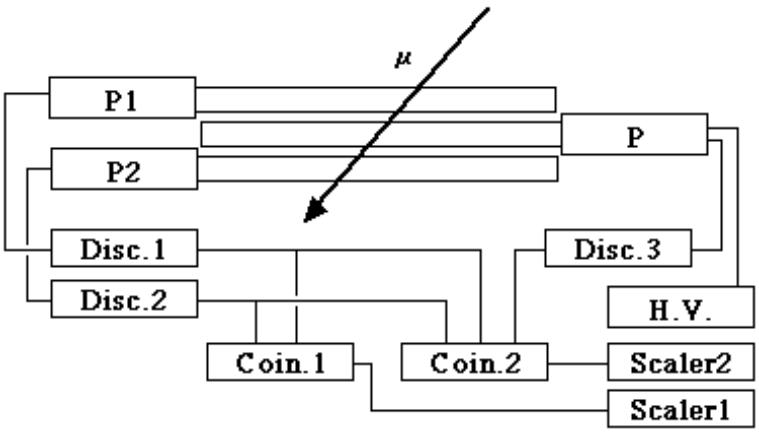

図 3.2: 光電子増倍管にかける電圧の調整の為の装置の配置

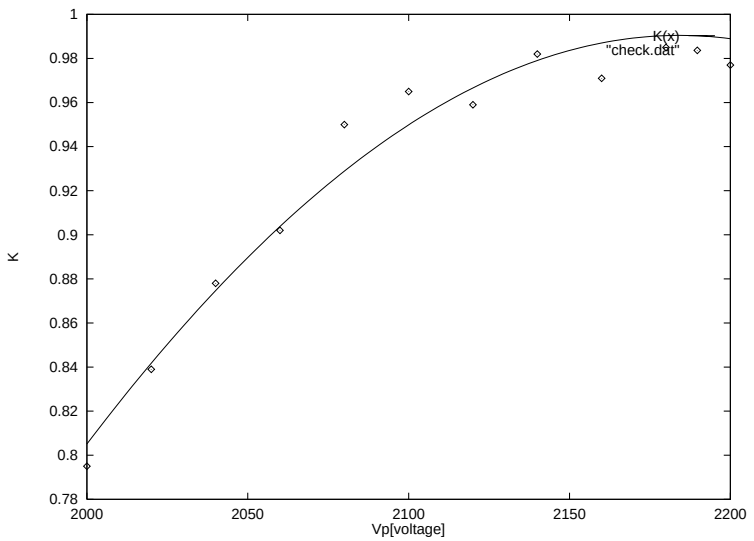

図 3.3: ある光電子増倍管の電圧対感度

- シンチレータ S1 と S2 の間隔はできるだけ大きくとった。あとで述べるように S1 と S2 はトリガーに使用するので、S1 と S2 の間隔が大きいことは、磁場が一様である、装置の中心近くの領域に停止する μ だけを測定することを保証している。
- シンチレータは 2 枚を 1 セットとして配置した。 2 本の光電子増倍管の信号を同時計測することで、各光電子増倍管の (アフターパルスや、熱電子による) 独立なノイズを除去することができる。

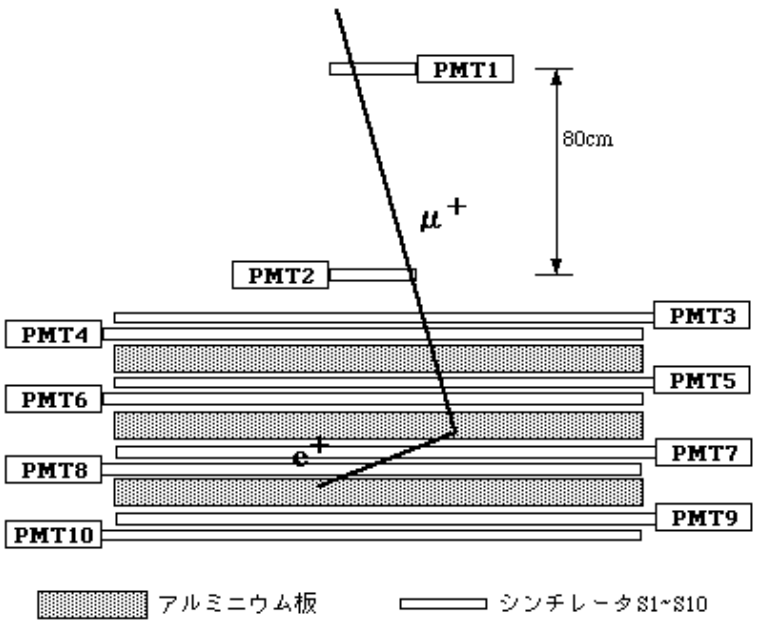

図 3.4: 装置の配置

3.4 回路

PMT1 $\sim$ PMT10 からの信号を Fig.3.5 のように配線した回路に通した。この回路の意味するところは次のようである。

- Coincidence 回路 (Coin.2 $\sim$ Coin.5) では、各光電子増倍管の信号をセットにした 2 枚づつで同時計測する。この出力を粒子 (μ or e) の通過と考える。
- Coin.1 では、空から降ってきた μ が装置に飛込んだことを判断する。
- Coin.6 では、空から降ってきた μ が装置内で停止したことを判断する。
- 50nsDelay1 $\sim$ 6 は時間の原点 (トリガーがかかる瞬間) を μ が降ってきた時間に一致させる為に使用した。
- CH0 $\sim$ 5 から信号を PC-98 にとりこみ、記録した。
- CH5 をトリガーに使用した。これによって、装置内で μ が停止した場合だけを記録することができる。

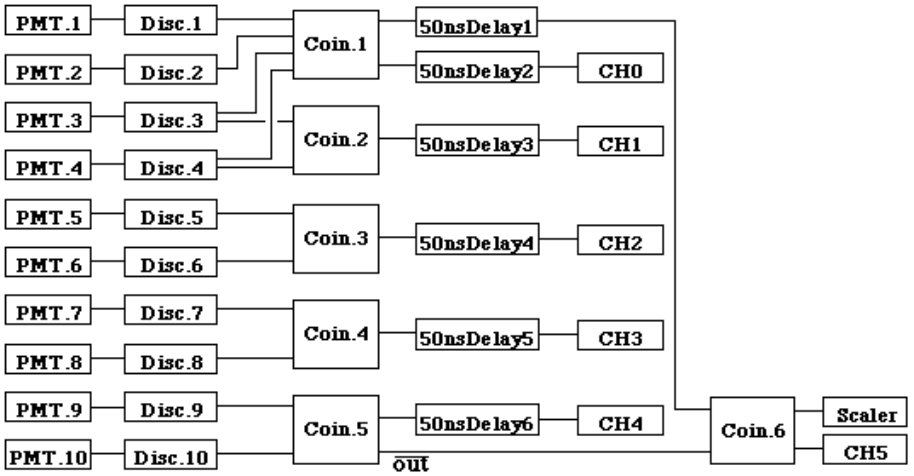

図 3.5: 回路

3.5 いよいよ実験開始

1997 年 7 月 31 日に上記の実験装置のセットアップが完成し、1997 年 11 月 30 日までデータを貯めた。この期間、常にコイルに流れる電流値を一定に保ち、磁場が変動することのないようにした。

4 Magnetic Field

μ 粒子の磁気能率を測定するには、磁場中での μ 粒子のスピン歳差運動の周期を測定すればよい。例年その磁場はソレノイドコイルによって作っていた。しかし毎年のデータを見ると、コイル両端での磁場は乱れていてソレノイドの中の磁場は一様になっているとは言えない。また、我々自身もソレノイドコイル内の磁場を測定したところ、昨年までと同様に、やはり両端での磁場の乱れは無視できないものであった。

そこで我々は、まずソレノイドコイルの両端だけにさらにコイルを巻き、そこにはソレノイドとは別の回路で電流を流した。両端のコイルは同じ回路で直列になっている。それによって、ソレノイドコイルの両端での磁場の乱れをほぼ補正できることは分かったが、今度はコイルの中心に対する対称性が悪くなった。

その対称性をよくするため、両端にさらにコイルを巻き、今度は両端には別々の回路で電流を流した。

これによって、コイルの両端の数 cm 以外は磁場の乱れはほとんどなくなり、軸に沿ってほぼ一様になった (Fig.4.1、4.2 参照)。

(以上のことはすでに測定装置の部分で述べた。)

次に磁場の測定方法であるが、測定器には Gauss Meter を用いた。しかしこの Gauss Meter はそれほど精度のよいものではなかったので、何回も測定することにより、統計的に処理することにした。

ソレノイド内の磁場の代表値は次のように計算した。

1. ソレノイド内を縦 5 cm、横 8 cm、高さ 10 cm の格子状に分け、それぞれの地点について 11 回磁場を測定した。
2. 別に行った予備実験から、条件を満たす μ 粒子はコイルの両端付近にはほとんどやって来ないことが分かっているので、両端 10cm 分の磁場 (磁場が大きく乱れている部分) は除いて計算した。
3. ソレノイド内の磁場を一様磁場と見なし、その磁場は最小 2 乗法で求めた (つまり平均を取った)。

こうして得られた磁場 B の平均値は以下の通りである。

$$B = 40.00 \pm 1.12 \quad (\text{Gauss}) \tag{4.1}$$

Fig.4.1 は STAGE2 上中心軸での磁場分布である。ほかの場所でのこの図と同じような結果が得られた。この図から、軸方向に沿ってほぼ一様な磁場が実現されていることがわかる。

Fig.4.2は STAGE2 上中央での水平方向の磁場分布である。磁場が右下がりになっているのは、Gauss Meter を向ける方向によって、同じ場所でも違う数値を指すことによる。したがって、この分布は Gauss Meter の特性によると考えられる。

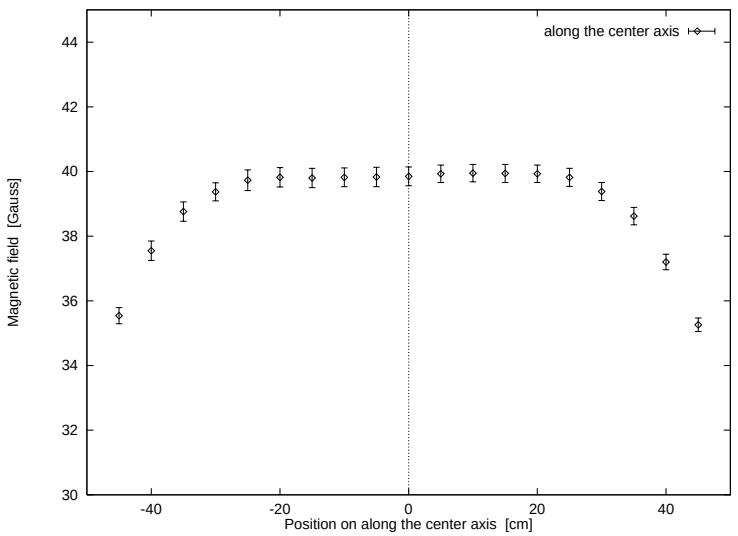

図 4.1: STAGE2 中心軸上の磁場分布

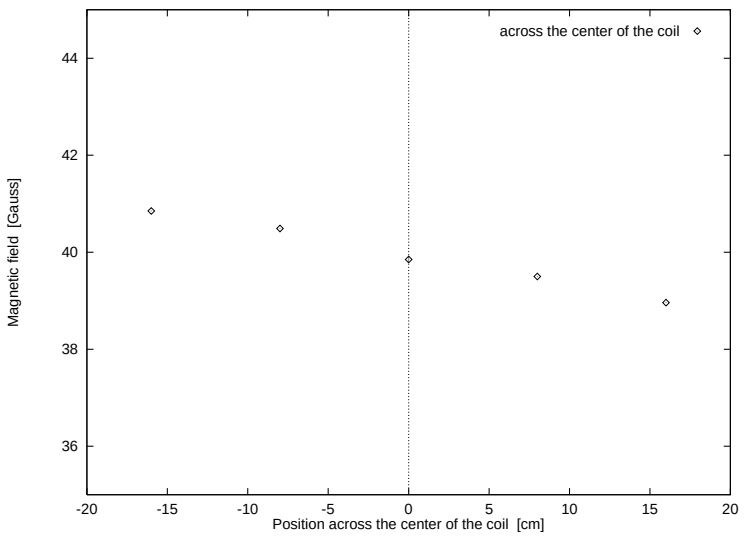

図 4.2: STAGE2 中央水平方向の磁場分布

5 解析

5.1 Data の選択の基準

PC-98 ではデータは入ってきたまま保存しただけであり、それを解析のために生データから崩壊イベントを選択する必要がある。

崩壊と判定した条件は以下の通りである。

1. 隣り合うチャンネルでシグナルが $50ns$ 以上離れている。
2. 2 度以上崩壊していない。

なお、隣り合うチャンネルでシグナルの時間差が $30ns$ 以下のものは連続している、つまり粒子が通過したシグナルとみなした。

この判定条件により $10ns$ から $8\mu s$ では 40010 個 (上向き 29193 個、下向き 10817 個) の崩壊データを得た。

なお、実際に解析に使った $1\mu s$ から $8\mu s$ では 12824 個 (上向き 7080 個、下向き 5744 個) であった。

5.2 寿命

崩壊の時間スペクトルは Fig.5.1 のようになった。500 nsec 付近にあるピークは、光電子増倍管のアフターパルスによるものと考えられる。この影響を避けるため、解析には 1 μsec 以降のデータを使用した。崩壊のカウント数 N_{decay} は Poisson 分布に従うと考えられるので、N_{decay} の統計誤差 ΔN_{decay} は $\sqrt{N_{decay}}$ である。

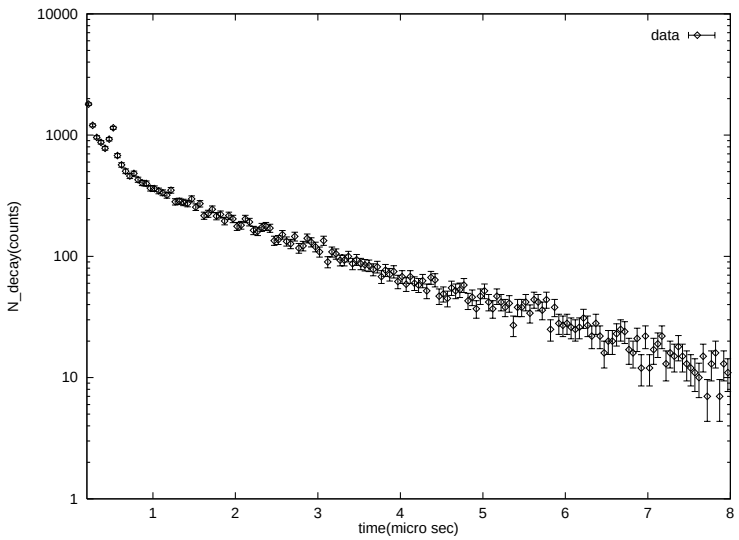

図 5.1: 崩壊の時間スペクトル

A, B, τ_+, τ_- をパラメータとして、式 (5.1) を 1 μsec $\sim$ 8 μsec ($50nsec$ ごと) のデータにフィットした。

$$A\exp(-\frac{t}{\tau_+}) + B\exp(-\frac{t}{\tau_-}) \tag{5.1}$$

この関数形を選んだ理由は次のようである。

- 宇宙線中には、μ^+ と μ^- の二成分があり、物質中では、それぞれが異なった寿命 $(\tau_+,\ \tau_-)$ で崩壊すると考えられる。(μ^- は負電荷のため、アルミニウムの原子核に非常に接近する。この為、原子核と相互作用して、真空中にあるよりも寿命が短くなると思われる。)
- 一次宇宙線の主成分は陽子である。一つの陽子から二次宇宙線として生成される粒子の電荷の総数は $+1$ の電荷のはずである。このために、μ_+ の個数は μ_- の個数より多く生成されると思われる。

非線形フィットには、Simplex 法を用いて χ^2 の最小値を求めた。誤差の評価には、χ^2 が最小値をとる点で式 (5.1) を線形化し、error matrix の逆行列の対角成分を考えた。

結果は、

$$A = 438.19 \pm 54.53 \ \ [\text{counts}] \tag{5.2}$$
$$\tau_+ = 2.155 \pm 0.098 \ \ [\mu\text{sec}] \tag{5.3}$$
$$B = 375.03 \pm 110.70 \ \ [\text{counts}] \tag{5.4}$$
$$\tau_- = 0.699 \pm 0.232 \ \ [\mu\text{sec}] \tag{5.5}$$
$$\chi^2 = 114.48 \quad (\text{freedom } 140) \tag{5.6}$$

である。誤差は統計誤差のみを考慮して求めた。

短い寿命で崩壊する成分 (τ_-) の振幅 (B) が長い寿命で崩壊する成分 (τ_+) の振幅 (A) よりわずかに小さいことは納得できることなどから、この結果は信頼できる。

これより、μ^+ 粒子の寿命 τ_+ は

$$\tau_+ = 2.155 \pm 0.098 \ \ \mu\text{sec} \tag{5.7}$$

である。

5.3 g 因子

e^+ を上方向 (下方向) に放出して μ^+ が崩壊したイベント数を $N_{up}(N_{dn})$ として、Asymmetry A という量を式 (5.8) で定義する。

$$A \equiv \frac{N_{up} - N_{dn}}{N_{up} + N_{dn}} \tag{5.8}$$

$N_{up},\ N_{dn}$ の統計誤差も N_{decay} と同様に、$\sqrt{N_{up}},\ \sqrt{N_{dn}}$ で与えられる。誤差の伝搬則によると、A の統計誤差 ΔA は、

$$\Delta A = \sqrt{(\frac{\partial A}{\partial N_{up}})^2(\Delta N_{up})^2 + (\frac{\partial A}{\partial N_{dn}})^2(\Delta N_{dn})^2} \tag{5.9}$$
$$= \sqrt{\frac{1 - A^2}{N_{up} + N_{dn}}} \tag{5.10}$$

で与えられる。

$P,\ \omega,\ \phi, B$ をパラメータとして、式 (5.11) を Fig.5.3 のデータに $1\ \mu\text{sec} \sim 8\ \mu\text{sec}$ $(50nsec$ごと) の範囲でフィットした。

$$P\cos(\omega t + \phi) + B \tag{5.11}$$

この関数形を選んだ理由は次のようである。

- 実験装置が上下に非対称性の可能性があるので、底上げを表す B を入れておいた。
- μ^+ はスピン上向に偏極して装置に入ってくるため、t=0 のときは上向に e^+ を放出して崩壊しやすい。この理由から、 $\phi = 0$ と考えられるが、ϕ をフリーパラメーターとしてフィットして、$\phi = 0$ になるかどうかを調べて、フィットの信頼性を確認することができる。

非線形フィットには、Simplex 法を用いて χ^2 の最小値を求めた。誤差の評価には、χ^2 が最小値をとる点で式 (5.11) を線形化し、error matrix の逆行列の対角成分を考えた。

結果は、

$$P = 0.0281 \pm 0.0126 \tag{5.12}$$
$$\omega = 3.790 \pm 0.267 \ \ [1/\mu\text{sec}] \tag{5.13}$$
$$\phi = 0.0827 \pm 0.838 \tag{5.14}$$
$$B = 0.1063 \pm 0.0090 \tag{5.15}$$
$$\chi^2 = 173.5 \quad (\text{freedom } 140) \tag{5.16}$$

である。誤差は統計誤差のみを考慮した。

t=0 のときの位相 ϕ がほぼ 0 になっている結果は、上向に偏極した μ^+ が上向に崩壊しやすいという事実を反映していることに対応している。このことから、この結果は信頼できる。

これより、μ 粒子の g 因子を求めると、

$$g = 2.23 \pm 0.16 \tag{5.17}$$

である。

Asymmetry の時間スペクトルとフィットした曲線を Fig.5.3 に示す。

5.4 偏極率

偏極率は、式 (5.12) と Appendix C より

$$P = 17 \pm 7\% \tag{5.18}$$

である。

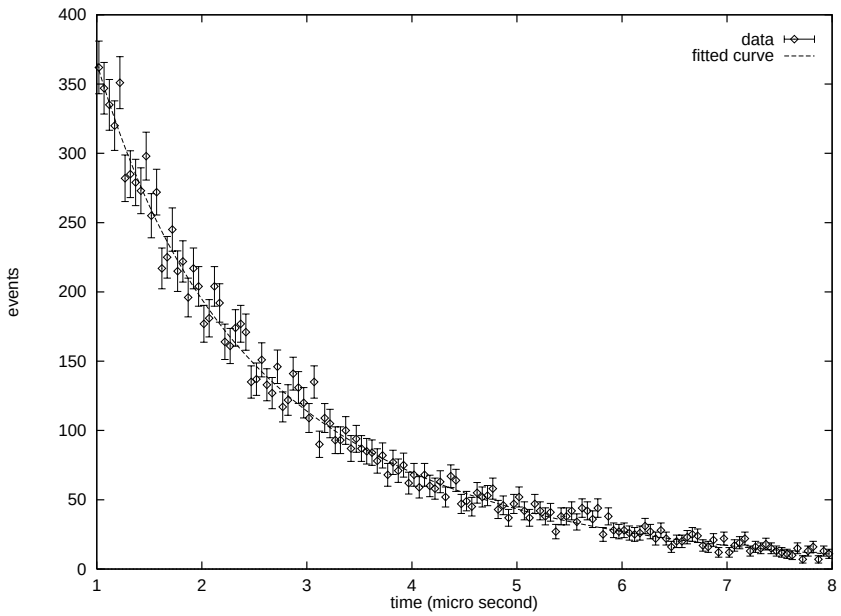

図 5.2: フィットした結果

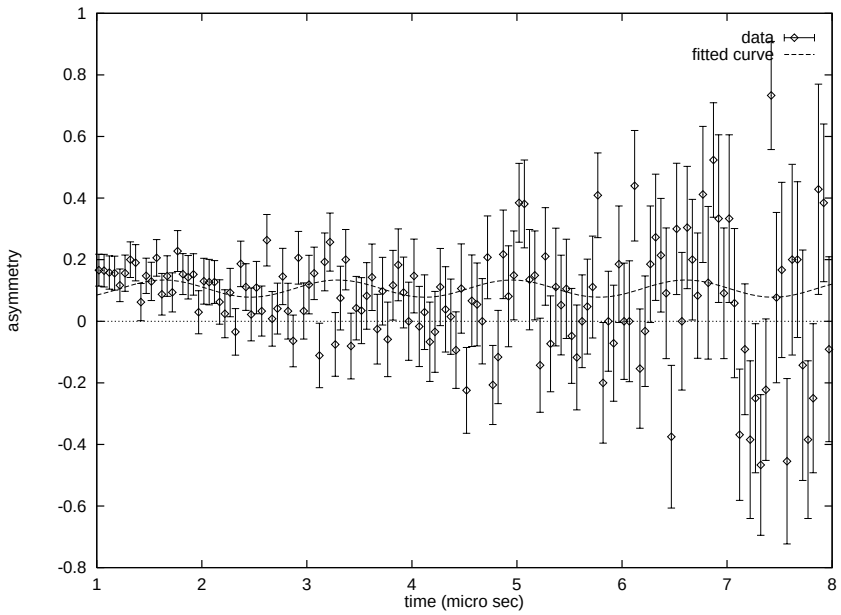

図 5.3: Asymmetry とフィットした結果

6　結論および反省

6.1　結論

以上より、我々は μ^+ の寿命、$g-$factor、偏極率について以下の結論を得た。

$$\begin{aligned} \text{LifeTime;} \quad & \tau_+ = 2.155 \pm 0.098 \ \ \mu\text{sec} \\ g-\text{factor;} \quad & g = 2.23 \pm 0.16 \\ \text{Polarization;} \quad & P = 17 \pm 7 \ \ \% \end{aligned}$$

6.2　反省

この実験を通して、寿命と $g-$factor についてはある程度よい値が得られたと思う。昨年までの実験からいくつか改善した点を以下に挙げておく。

- 磁場を一様にするために補助コイルを用いた。
- 磁場の強度を強くすることにより、歳差運動を 2–3 周期分とった。
- 1 CH についてシンチレーターを 2 枚用い、その coincidence をとることによりノイズを削減した。
- 解析の段階で、2 成分の崩壊モードを考えてフィットした。

しかし、反省し改善すべき点もいくつかあった。以下ソロを挙げておくので、今後改善されたい。

- 磁場測定に用いたガウスメータはそれほど精度のよいものでなかったので、その systematic error をちゃんと評価すべきである。
- アフターパルスを除去したつもりであったのに、実際には除去しきれていなかった。PMT 1 つ 1 つの特性をもっとちゃんと調べておく必要がある。また、Discriminator Level の設定にも、もっと気を使うべきである。
- 現段階では磁場による誤差よりも統計的な誤差の方が効いている。event 数をもっと増やしたい。

7　謝辞

この課題演習 A1 の実験を行うにあたって、指導、助言をしてくださった坂本先生、実験器具を貸してくださった笹尾先生、いろいろと手伝っていただいた T.A. の奈津子さんに感謝の意を表します。

Appendix

A　μ^+ の崩壊遷移確率の導出

μ^+ の崩壊 $\mu^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu$ の Feynman Diagram は図 A.1 で与えられる。

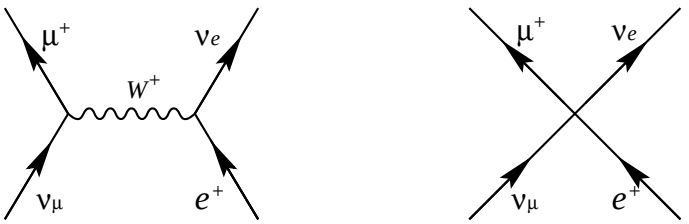

図 A.1: μ 粒子崩壊過程の Feynman Diagram

この反応の遷移行列要素は，$|\,i\,\rangle$, $|\,f\,\rangle$ をそれぞれ始状態および終状態を表すものとすると，2 つの弱カレント j_α, j_β と伝播関数

$$\frac{-\,g_{\alpha\beta}+\dfrac{q_\alpha q_\beta}{{M_W}^2}}{q^2-{M_W}^2}$$

を用いて

$$T_{fi}=\int d^4x\,\langle\,f\,|\,j_\alpha\frac{-\,g_{\alpha\beta}+\dfrac{q_\alpha q_\beta}{{M_W}^2}}{q^2-{M_W}^2}j_\beta\,|\,i\,\rangle \tag{A.1}$$

のような形に書ける。ここで M_W は Weak Boson の質量，q はその 4 元運動量を表す。q が M_W に比べて無視できるときには，この反応は図 A.1(b) のように点近似して，Fermi 型の相互作用として取り扱うことができる。このとき行列要素は相互作用 Lagrangian 密度 $j_{e\alpha}{j_\mu}^{\alpha\dagger}$ を用いて

$$T_{fi}=\frac{G}{\sqrt{2}}\int d^4x\,\langle\,f\,|\,j_{e\alpha}{j_\mu}^{\alpha\dagger}\,|\,i\,\rangle \tag{A.2}$$

で表される。ここで j_e, j_μ はそれぞれ e^+, μ^+ のカレント，G は弱い相互作用の Fermi 定数であり，$\sqrt{2}$ は規格化の定数である。μ^+, e^+, ν_e, $\bar{\nu}_\mu$ の 4 元運動量とスピンベクトルをそれぞれ p_μ, p_e, k_1, k_2 および s_μ, s_e, s_1, s_2 で表すと

$$\begin{aligned}|\,i\,\rangle &= |\,\mu^+(p_\mu,s_\mu)\,\rangle\\ |\,f\,\rangle &= |\,e^+(p_e,s_e),\nu_e(k_1,s_1),\bar{\nu}_\mu(k_2,s_2)\,\rangle\end{aligned}$$

となる。

次に，電子に関する弱カレント j_e は V–A 相互作用における一般的な形から

$$j_{e\alpha}=\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma_\alpha(1+\gamma^5)\psi_e \tag{A.3}$$

と書ける。γ_α は Dirac 行列である。$(1+\gamma^5)$ の因子はニュートリノに関する射影演算子であり，一方のヘリシティー状態のみを取り出すことに対応している。また，$\psi_e,\ \psi_{\nu_e}$ は $e^+,\ \nu_e$ の場の演算子である。

${j_\mu}^{\alpha\dagger}$ は ${j_\mu}^{\alpha}$ の Hermite 共役な演算子で

$$ {j_\mu}^{\alpha\dagger} = \bar{\psi}_\mu \gamma^\alpha (1+\gamma^5)\psi_{\nu_\mu}. \tag{A.4} $$

ここで $\bar{\psi}_\mu = {\psi_\mu}^\dagger \gamma^0$ である。これから T_{fi} は

$$ \begin{aligned} T_{fi} &= \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^4x \, \langle\, e^+(p_e,s_e), \nu_e(k_1,s_1) \,|\, \bar{\psi}_{\nu_e}\gamma_\alpha(1+\gamma^5)\psi_e \,|\, 0 \,\rangle \\ &\qquad \times \langle\, \bar{\nu}_\mu(k_2,s_2) \,|\, \bar{\psi}_\mu \gamma^\alpha (1+\gamma^5)\psi_\mu \,|\, \mu^+(p_\mu,s_\mu) \,\rangle \end{aligned} \tag{A.5} $$

と書ける。

場の演算子は

$$ \psi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3\boldsymbol{p} \sum_{\pm s} \frac{1}{2E_e} \left[{a_e}^\dagger(p,s) v_e(p,s) e^{ip\cdot x} + b_e(p,s) u_e(p,s) e^{-ip\cdot x} \right] \tag{A.6} $$

のように表せる。ここで，V は体積，E_e は e^+ のエネルギーで，和はスピンについてとる。また，b_e は e^- の消滅演算子，${a_e}^\dagger$ は e^+ の生成演算子，$u,\ v$ はそれぞれ $e^-,\ e^+$ のスピノールを表し，$u^\dagger u = 2E_e,\ v^\dagger v = 2E_e$ のように規格化されているとする。よって

$$ \psi_e \,|\, 0 \,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_e V}} e^{ip_e\cdot x} v_e(p_e,s_e) \,|\, e^+(p_e,s_e) \,\rangle \tag{A.7} $$

また

$$ \bar{\psi}_\mu = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3\boldsymbol{p} \sum_{\pm s} \frac{1}{\sqrt{2E_e}} \left[a_\mu(p,s) \bar{v}_\mu e^{-ip\cdot x} + {b_\mu}^\dagger \bar{u}_\mu e^{ip\cdot x} \right] \tag{A.8} $$

で，${b_\mu}^\dagger$ は μ^- の生成演算子，a_μ は μ^+ の消滅演算子であり，

$$ \bar{\psi}_\mu \,|\, \mu^+(p_\mu,s_\mu) \,\rangle = e^{-ip_\mu\cdot x} \bar{v}_\mu(p_\mu,s_\mu) \,|\, 0 \,\rangle \tag{A.9} $$

ニュートリノについても同様に計算すると，結局

$$ \begin{aligned} T_{fi} &= \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^4x \, \left[\bar{u}_{\nu_e}(k_1,s_1)\gamma^\alpha(1+\gamma^5)v_e(k_2,s_2) \right] \\ &\qquad \times \left[\bar{v}_\mu(p_\mu,s_\mu)\gamma^\alpha(1+\gamma^5)v_{\nu_\mu}(k_2,s_2) \right] \\ &\qquad \times \frac{e^{ik_1\cdot x}}{\sqrt{2\omega_1 V}} \frac{e^{ip_e\cdot x}}{\sqrt{2E_e V}} \frac{e^{-ip_\mu\cdot x}}{\sqrt{2E_\mu V}} \frac{e^{ik_2\cdot x}}{\sqrt{2\omega_2 V}} \end{aligned} \tag{A.10} $$

が得られる。$\omega_1,\ \omega_2$ はそれぞれ $\nu_e,\ \bar{\nu}_\mu$ のエネルギーである。

式 (A.10) を積分すると

$$ T_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{16\omega_1\omega_2 E_e E_\mu V^4}} \delta^4(p_e + k_1 + k_2 - p_\mu) \times \mathcal{M}(\mu^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu) \ . \tag{A.11} $$

ここで $\mathcal{M}(\mu^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu)$ は

$$ \mathcal{M}(\mu^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}_{\nu_e}\gamma_\alpha(1+\gamma^5)v_e \bar{v}_\mu\gamma^\alpha(1+\gamma^5)v_\mu \tag{A.12} $$

遷移確率を求めるために，$|\mathcal{M}|^2$ を計算しよう。

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{G^2}{2}\left[\bar{u}_{\nu_e}\gamma_\alpha(1+\gamma^5)v_e\bar{v}_\mu\gamma^\alpha(1+\gamma^5)v_\mu\right] \\
&\qquad \times\left[\bar{u}_{\nu_e}\gamma_\beta(1+\gamma^5)v_e\bar{v}_\mu\gamma^\beta(1+\gamma^5)v_{\nu_\mu}\right]^* \\
&= \frac{G^2}{2}\left[\bar{u}_{\nu_e}\gamma_\alpha(1+\gamma^5)v_e\bar{v}_\mu\gamma^\alpha(1+\gamma^5)v_\mu\right] \\
&\qquad \times\left[\bar{v}_e\gamma^\beta(1+\gamma^5)u_{\nu_e}\bar{v}_{\nu_\mu}\gamma^\beta(1+\gamma^5)v_\mu\right] \\
&= \frac{G^2}{2}\left[\bar{u}_{\nu_e}\gamma_\alpha(1+\gamma^5)v_e\bar{v}_e\gamma^\beta(1+\gamma^5)u_{\nu_e}\right] \\
&\qquad \times\left[\bar{v}_\mu\gamma^\alpha(1+\gamma^5)v_{\nu_\mu}\bar{v}_{\nu_\mu}\gamma^\beta(1+\gamma^5)v_\mu\right] \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}$$

$u(p,s),\ v(p,s)$ はともに Dirac 方程式

$$(\not{p}-m)u(p,s)=0$$
$$(\not{p}+m)v(p,s)=0$$

を満たし，$\bar{u}(p,s),\ \bar{v}(p,s)$ は

$$\bar{u}(\not{p}-m)=0$$
$$\bar{v}(\not{p}+m)=0$$

を満たす。ここで $\not{p}=\gamma_\alpha p^\alpha$ であり，$\bar{u}u=2m,\ \bar{v}v=-m$ に規格化されている。これらのことから

$$\begin{aligned}
u\bar{u} &= (\not{p}+m)\left(\frac{1-\gamma^5\not{s}}{2}\right) \\
v\bar{v} &= (\not{p}-m)\left(\frac{1-\gamma^5\not{s}}{2}\right)
\end{aligned}$$

となる。$\dfrac{1-\gamma^5\not{s}}{2}$ は粒子のスピン射影を表す。質量を持たないニュートリノに対しては s を

$$s_\nu=(1,-\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}),\qquad s_{\bar{\nu}}=(1,\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}) \qquad \text{(A.14)}$$

で定義し直す。そうすると，ニュートリノに対しては

$$u\bar{u}=v\bar{v}=\not{p} \qquad \text{(A.15)}$$

となる。これらの射影演算子を用いて式 (A.13) を計算する。

$$T_1=\left[\bar{u}_{\nu_e}\gamma_\alpha(1+\gamma^5)v_e\bar{v}_e\gamma^\beta(1+\gamma^5)u_{\nu_e}\right]$$

とおくと

$$T_1=Tr[\Lambda_{\nu_e}\gamma^\alpha(1+\gamma^5)\Lambda_e\gamma_\beta(1+\gamma^5)] \qquad \text{(A.16)}$$

と書ける。ここで Λ は射影演算子であり

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\nu_e} &= \not{k}_1 \\
\Lambda_{\nu_\mu} &= \not{k}_2 \\
\Lambda_e &= \frac{1}{2}(\not{p}_e-m_e)(1-\gamma^5\not{s}_e) \\
\Lambda_\mu &= \frac{1}{2}(\not{p}_\mu-m_\mu)(1-\gamma^5\not{s}_\mu)
\end{aligned}$$

である。

同様にして

$$T_2 = \left[\bar{v}_\mu \gamma^\alpha (1+\gamma^5) v_{\nu_\mu} \bar{v}_{\nu_\mu} \gamma^\beta (1+\gamma^5) v_\mu\right]$$

とすると

$$T_2 = Tr[\Lambda_\mu \gamma^\alpha (1+\gamma^5) \Lambda_{\nu_\mu} \gamma^\beta (1+\gamma^5)] \tag{A.17}$$

ここで $\gamma_\alpha\,(\alpha = 0,1,2,3)$ の奇数個の積の Tr が 0 になること，行列の循環置換で Tr が変わらないこと，および

$$(1+\gamma^5)^2 = 2(1+\gamma^5), \quad \gamma_\alpha \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma_\alpha$$

を用いると

$$T_1 = Tr[\not{k}_1 \gamma_\alpha (\not{p}_e + m_e \gamma^5 \not{s}_e) \gamma_\beta (1+\gamma^5)] \tag{A.18}$$

および

$$T_2 = Tr[(\not{p}_\mu + m_\mu \gamma^5 \not{s}_\mu) \gamma_\alpha \not{k}_2 \gamma_\beta (1+\gamma^5)] \tag{A.19}$$

となる。

結局

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{G^2}{2} T_1 T_2 \\ &= \frac{G^2}{2} Tr[\not{k}_1 \gamma_\alpha (\not{p}_e + m_e \gamma^5 \not{s}_e) \gamma_\beta (1+\gamma^5)] \cdot Tr[(\not{p}_\mu + m_\mu \gamma^5 \not{s}_\mu) \gamma_\alpha \not{k}_2 \gamma_\beta (1+\gamma^5)] \end{aligned} \tag{A.20}$$

となるが，公式

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\rho \gamma_\sigma (1+\gamma^5)] &= 4(g_{\alpha\beta} g_{\rho\sigma} + g_{\beta\rho} g_{\alpha\sigma} - g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} - i\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}) \\ &= 4\chi_{\alpha\beta\rho\sigma} \end{aligned}$$

を用いると，$\gamma^5(1+\gamma^5) = 1+\gamma^5,\ \chi_{\alpha\beta\rho\sigma}\chi^{\mu\nu\rho\sigma} = 4g_\alpha{}^\mu g_\beta{}^\nu$ から

$$|\mathcal{M}|^2 = 32 G^2 k_1 (p_e + m_e s_e)(p_\mu + m_\mu s_\mu) q_2 \tag{A.21}$$

となる。

さて，実験でニュートリノの運動量を区別できないとすると，終状態を $d^3\boldsymbol{k}_1,\ d^3\boldsymbol{k}_2$ について積分しなければならない。すると，遷移確率 $d\Gamma$ は

$$d\Gamma = \frac{2G^2 d^3\boldsymbol{p}_e}{(2\pi)^5 E_e E_\mu} (p_e + m_e s_e)^\alpha (p_\mu + m_\mu s_\mu)^\beta I_{\alpha\beta} \tag{A.22}$$

となる。ここで $I_{\alpha\beta}$ は

$$I_{\alpha\beta} = \int\int d^3\boldsymbol{k}_1 d^3\boldsymbol{k}_2 \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \delta^4(k_1 + k_2 - k) k_{1\alpha} k_{2\beta} \tag{A.23}$$

であり，$k = p_\mu - p_e = k_1 + k_2$ である。$\boldsymbol{k}_1 = -\boldsymbol{k}_2$ のようにとってもよく，こうして実際にこれを計算すると

$$I_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{6}(k^2 g_{\alpha\beta} + 2k_\alpha k_\beta) \tag{A.24}$$

となる。これから，式 (A.22) は

$$d\Gamma = \frac{G^2 d^3\boldsymbol{p}_e}{6 \cdot (2\pi)^4 E_\mu E_e} (p_e + m_e s_e)^\alpha (p_\mu + m_\mu s_\mu)^\beta (k^2 g_{\alpha\beta} + 2k_\alpha k_\beta) \tag{A.25}$$

となる。

μ^+ の静止系で考えると，

$$k = (k_0,\ \boldsymbol{k}), \quad q_0 = m_\mu - E_e, \quad \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{p}_e$$

であり，スピンに関しては

$$s_\mu = (0,\ \hat{\boldsymbol{s}}_\mu), \quad s_{e0} = \frac{\boldsymbol{p}_e \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_e}{m_e}, \quad \boldsymbol{s} = \hat{\boldsymbol{s}}_e + \frac{(\boldsymbol{p}_e \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_e)\boldsymbol{p}_e}{m_e(E_e + m_e)}$$

である。

$m_\mu \gg m_e$ より m_e を無視する。また，$\hat{\boldsymbol{n}}$ を μ^+ 静止系での e^+ の運動方向の単位ベクトルとする。

$$d^3\boldsymbol{p} = p^2 dp\, d\Omega,\ dp = \frac{E}{p} dE$$

であることを用いると，$d\Gamma$ は近似的に

$$d\Gamma = \frac{G^2 m_\mu p_e E_e}{6 \cdot (2\pi)^4} dE_e d\Omega_e (1 + \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_e)[-(m_\mu - 4E_e)(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_\mu) + (3m_\mu - 4E_e)] \tag{A.26}$$

となる。

e^+ のエネルギーおよび運動量が最大となるのは，2 つのニュートリノが同一の方向に放出され，e^+ がその反対方向に放出されるときである。そのときの e^+ のエネルギーおよび運動量は

$$\begin{aligned} (E_e)_{\max} &= \frac{{m_\mu}^2 + {m_e}^2}{2m_\mu} \sim \frac{m_\mu}{2} \\ (p_e)_{\max} &= \frac{{m_\mu}^2 - {m_e}^2}{2m_\mu} \sim (E_e)_{\max} \end{aligned}$$

である。これを用いて

$$\varepsilon = \frac{E_e}{(E_e)_{\max}}, \quad (0 \le \varepsilon \le 1) \tag{A.27}$$

としておく $(dE_e = \dfrac{m_\mu}{2} d\varepsilon)$。また，$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_\mu = \cos\theta$ とすると，結局

$$d\Gamma = \frac{G^2 {m_\mu}^5}{48 \cdot (2\pi)^3} \sin\theta\, d\theta\, d\varepsilon\, [2\varepsilon^2(3 - 2\varepsilon)] \left[1 + \frac{2\varepsilon - 1}{3 - 2\varepsilon} \cos\theta\right] \left[\frac{1 + \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_e}{2}\right] \tag{A.28}$$

となる。さらに，実験では e^+ のエネルギーについても測定できないので，ε についても積分して

$$d\Gamma = \frac{G^2 {m_\mu}^5}{48 \cdot (2\pi)^3} \sin\theta\, d\theta \left[1 + \frac{1}{3} \cos\theta\right] \left[\frac{1 + \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_e}{2}\right] \tag{A.29}$$

となる。

B muon のスピン歳差運動

外部磁場 **B** 中にある磁気モーメント $\frac{e\hbar}{2m_\mu c}$ を持つ 1 個の muon の Hamiltonian は

$$H = -\frac{e}{m_\mu c}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B} \tag{B.1}$$

で与えられる。このとき、**B** が z 方向にかかった静的な均一磁場とすると、

$$H = -\frac{eB}{m_\mu c}S_z \tag{B.2}$$

と書ける。従って、S_z と H は明らかに交換する。S_z の固有値はエネルギーの固有状態でもあり、対応する固有値は

$$E_\pm = \mp\frac{e\hbar B}{2m_\mu c} \tag{B.3}$$

である。 2 つのエネルギー固有値の差が $\hbar\omega$ になるように ω を定義する。すなわち、

$$\omega \equiv \frac{|e|B}{m_\mu c} \tag{B.4}$$

とする。このとき、時間発展の演算子は

$$U(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\omega S_z t} \tag{B.5}$$

となるので、これを初期状態にかける。今、S_z の固有ケット $|+\rangle$、$|-\rangle$ を用いて初期状態を展開し、時間がたったときのスピンの向きの期待値を考える。

系が初め $S_x\pm$ の状態にあったとすると

$$|S_x;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \tag{B.6}$$

であるから、時間が t たった後に系が $S_x;\pm$ の状態に見い出される確率は

$$\begin{aligned}
|\langle S_x;\pm|U(t,0)|S_x;\pm\rangle|^2 &= |(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle+| \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\langle-|)e^{-\frac{i}{\hbar}\omega S_z t}(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle)|^2 \\
&= \frac{1}{4}|(\langle+| \pm \langle-|)\cdot(e^{-i\omega t/2}|+\rangle + e^{i\omega t/2}|-\rangle)|^2 \\
&= \frac{1}{4}|e^{-i\omega t/2} \pm e^{i\omega t/2}|^2 \\
&= \begin{cases} \cos^2\left(\dfrac{\omega t}{2}\right) & ; \quad S_x+ \\ \sin^2\left(\dfrac{\omega t}{2}\right) & ; \quad S_x- \end{cases}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

となる。この結果 S_x の期待値を

$$\langle S_x\rangle = \frac{\hbar}{2}\cos^2(\omega t/2) - \frac{\hbar}{2}\sin^2(\omega t/2) = \frac{\hbar}{2}\cos\omega t \tag{B.8}$$

と表わすことができる。従ってこの量は 2 つのエネルギー固有値の差を $\hbar$ で割った値の角振動数で振動している。同様に S_y、S_z も調べると、

$$\langle S_y\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\omega t \tag{B.9}$$

$$\langle S_z\rangle = 0 \tag{B.10}$$

となり、一様磁場中のスピンは周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ で歳差運動することがわかる。

C　μ 粒子の偏極率

装置の上向きを z 方向をする。空から降ってくる μ 粒子のスピンが z 軸から見て，$\hat{\boldsymbol{n}} = (\theta,\ \varphi)$ 方向を向いている割合を $f(\theta, \varphi)$ とする。実験で測定するのはこの方向の z 成分である。$\hat{\boldsymbol{n}}$ 方向のスピン状態を z 方向のスピン状態で書くと

$$|\,\hat{\boldsymbol{n}}\,\rangle = e^{-i\varphi/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|\,+\,\rangle + e^{i\varphi/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|\,-\,\rangle \tag{C.1}$$

となる。ここで，$|\,+\,\rangle,\ |\,-\,\rangle$ はそれぞれ z 方向のスピン上向き，下向きの状態を表す。

ここで偏極率 P を次のように定義する。

$$P = \frac{2}{\hbar}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\varphi\, f(\theta,\varphi)\langle\,\hat{\boldsymbol{n}}\,|\,S_z\,|\,\hat{\boldsymbol{n}}\,\rangle \tag{C.2}$$

$\langle\,\hat{\boldsymbol{n}}\,|\,S_z\,|\,\hat{\boldsymbol{n}}\,\rangle$ を書き直すと

$$\langle\,\hat{\boldsymbol{n}}\,|\,S_z\,|\,\hat{\boldsymbol{n}}\,\rangle = \frac{\hbar}{2}\left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\langle\,+\,|\,+\,\rangle - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\langle\,-\,|\,-\,\rangle\right] \tag{C.3}$$

さて，V–A 理論によると，スピン上向きの μ^+ が崩壊するときその方向から θ だけ傾いた方向の $d\theta$ の幅に e^+ を放出する確率は

$$(1 + \frac{1}{3}\cos\theta)\sin\theta d\theta \tag{C.4}$$

という分布をしていて，スピンと同じ方向，反対方向に e^+ を出す割合はそれぞれ $\dfrac{7}{12},\ \dfrac{5}{12}$ である。

以上から $\hat{\boldsymbol{n}}$ の状態の μ^+ が $+z$ の方向に e^+ を放出する確率 $p_+(\theta)$ は

$$p_+(\theta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\times\frac{7}{12} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\times\frac{5}{12} \tag{C.5}$$

であり，また $-z$ の方向に e^+ を放出する確率 $p_-(\theta)$ は

$$p_-(\theta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\times\frac{5}{12} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\times\frac{7}{12} \tag{C.6}$$

である。これらから

$$p_+(\theta) - p_-(\theta) = \frac{1}{6}\left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{C.7}$$

これと $\hat{\boldsymbol{n}}$ の状態の方向分布も考えて，全体の $+z$ 方向と $-z$ 方向に e^+ が放出される割合の差 $P_+ - P_-$ は

$$P_+ - P_- = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\varphi\, f(\theta,\varphi)\left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{C.8}$$

である。これと式 (C.2),(C.3) を比べると

$$P_+ - P_- = \frac{1}{6}P \tag{C.9}$$

であることが分かる。

実際に実験を行ったとき，上向きに放出された個数を N_+ ，下向きに放出された個数を N_- とすると

$$P_+ = \frac{N_+}{N_+ + N_-} \tag{C.10}$$

$$P_- = \frac{N_-}{N_+ + N_-} \tag{C.11}$$

であり，式 (C.9) と比べると

$$\frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} = \frac{1}{6}P \tag{C.12}$$

である。

よって，空から降ってくる μ^+ の偏極率 P は

$$P = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} \times 6 \tag{C.13}$$

となる。