素粒子物理学Ｉレポート解答　No.３（提出期限　６月２３日）

1. マンデルシュータム変数の関係式$s+t+u=m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2$を示しなさい。また、$p_a\to$ $-p_d$の置き換えでマンデルシュータム変数 s と t が入れ代わることを示せ。

（解答）

$$
\begin{aligned}
s+t+u &= (p_a+p_b)^2+(p_a-p_c)^2+(p_a-p_d)^2 \\
&= {p_a}^2+2p_a\cdot p_b+{p_b}^2+{p_a}^2-2p_a\cdot p_c+{p_c}^2+{p_a}^2-2p_a\cdot p_d+{p_d}^2 \\
&= m_a^2+2p_a\cdot p_b+m_b^2+p_a^2-2p_a\cdot p_c+m_c^2+p_a^2-2p_a\cdot p_d+m_d^2 \\
&= m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2+2p_a^2+2p_a\cdot(p_b-p_c-p_d) \\
&= m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2+2p_a\cdot(p_a+p_b-p_c-p_d) \\
&= m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2
\end{aligned}
$$

次に

$s=(p_a+p_b)^2$ で $p_a\to -p_d$ の置き換えで運動量保存則 $p_a+p_b-p_c-p_b=0$ を用いると

$$(-p_d+p_b)^2=(-p_a-p_b+p_c+p_b)^2=(-p_a+p_c)^2=t$$

2. (2.25)について重心系で粒子の質量が無視できる場合、

$$
\begin{aligned}
s &\sim 2p_a\cdot p_b=4p_a^2 \\
t &\sim -2p_a\cdot p_c=-2p_a^2(1-\cos\theta) \\
u &\sim -2p_a\cdot p_d=-2p_a^2(1+\cos\theta)
\end{aligned}
$$

となることを示しなさい。ただし、θ は重心系での散乱角である。

（解答）

$$
\begin{aligned}
s &= (p_a+p_b)^2\sim 2p_a\cdot p_b=2(E_a,\vec{p}_a)(E_a,-\vec{p}_a)=4{p_a}^2 \\
t &= (p_a-p_c)^2\sim -2p_a\cdot p_c=-2(E_a,\vec{p}_a)(E_a,\vec{p}_c)=-2p_a^2(1-\cos\theta) \\
u &= (p_a-p_d)^2\sim -2p_a\cdot p_d=-2(E_a,\vec{p}_a)(E_a,\vec{p}_d)=-2p_a^2(1+\cos\theta)
\end{aligned}
$$

（注）重心系で全粒子の質量がゼロで 2 体→2 体の反応なので各粒子のエネルギーと運動量の大きさは等しい。

3. 現在日本の B ファクトリー実験は重心系エネルギー10GeV で$B\bar{B}$中間子を大量生成し実験を行っている。

（ア）$\sigma(e^++e^-\to\mu^++\mu^-)$は何 pb か？pb は $10^{-12}\times$b(10^{-24}cm^2)=10^{-36}cm^2 である。また現在 B ファクトリーは 10^{34}cm^{-2}s^{-1} という高ルミノシーティーで実験を行っている。毎秒何個の$\mu^+\mu^-$対が生成されているか？

解答）式(2.30)より

$$\frac{4\pi\alpha^2}{3}\frac{(\hbar c)^2}{s}\approx\frac{4\pi(137)^{-2}}{3}\frac{(1.05\times10^{-34}\times3\times10^8)^2}{(1.6\times10^{-19}\times10^{10})^2}\approx 9\times10^{-38}m^2=900\,pb$$

毎秒生成される μ 対の数は

$N(e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-) \approx 9\times10^{-38} m^2 \times 10^{38} m^{-2} = 9$

毎秒約 9 個の μ 対が生成される。

(イ) $\boldsymbol{\sigma(e^+ + e^- \to b + \bar{b})}$ は何 pb か？

B クォークの電荷は(−1/3)で更にカラーの状態数が 3 なので、$\boldsymbol{\sigma(e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-)}$ に比べて、b-quark の質量を無視した場合

$$\boldsymbol{\sigma(e^+ + e^- \to b + \bar{b}) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \times 3 \times \sigma(e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-) = 300\,pb}$$

（注）b-quark の質量を無視すると問題に入れておくべきでした。

4. $\pi^{\pm}$p(n)反応でアイソスピン 3/2 の Δ（1232）[電荷は++、+、0、−がある]を生成し、終状態がπ^+ p 、π^+ n 、π^0 p 、π^0 n 、π^- p となる反応を考える。

(ア) アイソスピン1/2（p）と 1 (π)の合成から、アイソスピン 3/2 の成分{Δ（1232）}は次のようになることを確かめよ（レポートに書く必要はない。各自この問いを理解するだけでよい)。

$$\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \pi^+ p,\quad \left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^+ n + \sqrt{\frac{2}{3}}\pi^0 p,\quad \left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\pi^0 n + \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^- p,\quad \left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = \pi^- n$$

(イ) $\pi^{\pm}$p(n)反応で次の反応断面積の比 x1:x2:x3:x4:x5:x6 を求めよ。

$$\sigma\left(\pi^+ p(\to \Delta) \to \pi^+ p\right) : \sigma\left(\pi^+ n(\to \Delta) \to \pi^+ n\right) : \sigma\left(\pi^+ n(\to \Delta) \to \pi^0 p\right) : \sigma\left(\pi^- p(\to \Delta) \to \pi^0 n\right)$$
$$: \sigma\left(\pi^- p(\to \Delta) \to \pi^- p\right) : \sigma\left(\pi^- n(\to \Delta) \to \pi^- n\right) = x1 : x2 : x3 : x4 : x5 : x6$$

（参考）実験値は

$\sigma\left(\pi^+ p(\to \Delta) \to \pi^+ p\right) = 210mb$, $\sigma\left(\pi^- p(\to \Delta) \to \pi^- p\right) = 24mb$,
$\sigma\left(\pi^- p(\to \Delta) \to \pi^0 n\right) = 48mb$ となっている。

9:1:2:2:1:9

(ウ) Δ^{++}、Δ^+、Δ^0、Δ^-をクォークの状態で記述せよ。

Δ^{++}(uuu)、Δ^+(uud)、Δ^0(udd)、Δ^- (ddd)

「クォークの状態」の定義が少し曖昧で申し訳ありません。上記より、詳細に波動関数を記述している人ももちろん正解です。

5. $c\bar{c}$状態（チャーモニウム）と e^+e^-状態（ポジトロニウム）のポテンシャルを考える。

(ア) クーロンポテンシャルによるエネルギーレベル（水素原子の順位）が

$$\boldsymbol{E_n = -\frac{\alpha^2}{2}\frac{m_e}{n^2}}$$ ：n は主量子数

と現せるとして、ポジトロニウムの 2S と 1S 間のエネルギー準位を導け。{注：水素原子のモデルをポジトロニウムに変えるときに実効質量を考えること。}

実効質量は $m_e/2$。よって 2S と 1S 間の準位間のエネルギー差ΔE は

$$\Delta E = E_1 - E_2 = -\frac{\alpha^2}{2}\frac{m_e}{2}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right) = -\frac{3}{16}\alpha^2 m_e$$

$\alpha = 1/137$、m_e=511,000eV を代入すると

$$\Delta E = -\frac{3}{16}\left(\frac{1}{137}\right)^2 \times 511{,}000 = -5.1eV$$

（イ）ポジトロニウムの 2S と 1S 間のエネルギー準位は 5eV である。チャーモニウムにおいてもポテンシャルがクーロン型で、2S と 1S 間のエネルギー準位は 600MeV である（後の図参照）。電子の質量を 0.5MeV、c クォークの質量を 1800MeV とした場合、強い相互作用の結合定数 α_s は電磁相互作用の結合定数 α の何倍と推定できるか？

$$\Delta E\text{（ポジトロニウム）} = -\frac{3}{16}\alpha^2 m_e = -\frac{3}{16}(0.5MeV)\alpha^2 = -5eV$$

$$\alpha^2 = \frac{16}{3\times10^5}$$

$$\Delta E\text{（チャーモニウム）} = -\frac{3}{16}\alpha_s^2 m_c = -\frac{3}{16}(1800MeV)\alpha_s^2 = -600MeV$$

$$\alpha_s^2 = \frac{16}{9}$$

$$\frac{\alpha_s}{\alpha} = \sqrt{\frac{16}{9}\times\frac{3\times10^5}{16}} = \sqrt{\frac{10000}{3}} = 183$$

（注）$\alpha_s \to \frac{4}{3}\alpha_s$ として解答しても可。