素粒子物理学Ｉレポート　No.2（提出期限　５月２６日）

1. Klein-Gordon 方程式(2.1)から、φが満たす連続の方程式を導く。

   1.1 式(2.1)に−iφ*をかけ、その複素共役形に−iφをかけて、連続の方程式

   $$\frac{\partial}{\partial t}[i(\phi^*\frac{\partial \phi}{\partial t}-\phi\frac{\partial \phi^*}{\partial t})]+\nabla\cdot[-i(\phi^*\nabla\phi-\phi\nabla\phi^*)]=0$$

   を導け。この式より、確率密度ρと密度の流れ j は

   $$\rho=i(\phi^*\frac{\partial \phi}{\partial t}-\phi\frac{\partial \phi^*}{\partial t}),\quad j=-i(\phi^*\nabla\phi-\phi\nabla\phi^*)$$

   だとわかる。

   式(2.1)に−iφ*をかけると、

   $$i\phi^*\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 t}-i\phi^*\nabla^2\phi=-i\cdot m^2\phi^*\phi \quad ---(a)$$

   式(2.1)の複素共役にｉφをかけると

   $$-i\phi\frac{\partial^2\phi^*}{\partial^2 t}+i\phi\nabla^2\phi^*=i\cdot m^2\phi\phi^* \quad ---(b)$$

   式(a)と(b)の和をとると

   $$i\phi^*\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 t}-i\phi\frac{\partial^2\phi^*}{\partial^2 t}-i\phi^*\nabla^2\phi+i\phi\nabla^2\phi^*=0$$

   $$i\left(\phi^*\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 t}-\phi\frac{\partial^2\phi^*}{\partial^2 t}\right)-i\left(\phi^*\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\phi^*\right)=0$$

   $$\frac{\partial}{\partial t}\left[i\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}-\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)\right]+\vec{\nabla}\cdot[-i\left(\phi^*\vec{\nabla}\phi-\phi\vec{\nabla}\phi^*\right)]=0$$

   $$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$$

   これは連続の方程式である。

   1.2 方程式（2.1）の一般解 $\phi=Ne^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}$ から確率密度ρと密度の流れ j を書き出せ。これより<u>確率密度は粒子の相対論的エネルギーE に比例することがわかる</u>。

   確率密度ρは

   $$\rho=i\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}-\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)$$
   $$=i\left[Ne^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}+iEt}\cdot N(-iE)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}-Ne^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}\cdot N(iE)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}+iEt}\right]$$
   $$=2N^2E$$

   これより確率密度ρは相対論的エネルギーE に比例する。

   密度の流れ $\vec{j}$ は

   $$\vec{j}=-i\left(\phi^*\vec{\nabla}\phi-\phi\vec{\nabla}\phi^*\right)$$
   $$=-i\left[Ne^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}+iEt}\cdot N(i\vec{p})e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}-Ne^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}\cdot N(-i\vec{p})e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}+iEt}\right]$$
   $$=2N^2\vec{p}$$

2. γ行列の公式　$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$、　$\gamma^{0\dagger}=\gamma^0$、$(\gamma^0)^2=I$、$\gamma^{k\dagger}=(\beta\alpha^k)^\dagger=\alpha^k\beta=-\gamma^k$、$(\gamma^k)^2=-I$ を示せ。またエルミート共役の結果は $\gamma^{\mu\dagger}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ を示せ。

$\gamma^\mu=(\beta,\beta\alpha_1,\beta\alpha_2,\beta\alpha_3)$でβ,$\alpha_i$は全て反交換、$\beta^2=\alpha_i^2=1$を使う。ここで、空間成分（i,j=1,3）と時間成分 0 を分けて計算すると

$$\gamma^i\gamma^j+\gamma^j\gamma^i=\beta\alpha_i\beta\alpha_j+\beta\alpha_j\beta\alpha_i=-(\alpha_i\beta\beta\alpha_j+\alpha_j\beta\beta\alpha_i)=-(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)=-2\delta_{ij}$$

$$\gamma^0\gamma^0+\gamma^0\gamma^0=\beta\beta+\beta\beta=2$$

$$\gamma^0\gamma^i+\gamma^i\gamma^0=\beta\beta\alpha_i+\beta\alpha_i\beta=\beta\beta\alpha_i-\beta\beta\alpha_i=0$$

よって$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$

$\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$より$\gamma^{0\dagger}=\gamma^0$、$(\gamma^0)^2=I$は自明。

$$\gamma^{k\dagger}=(\beta\alpha^k)^\dagger=\alpha^k\beta=-\beta\alpha^k=-\gamma^k$$

$$(\gamma^k)^2=\beta\alpha^k\beta\alpha^k=-\beta\beta\alpha^k\alpha^k=-I$$

$\gamma^{0\dagger}=\gamma^0$、$\gamma^{k\dagger}=-\gamma^k$と$\gamma^0$、$\gamma^k$の反交換関係より$\gamma^{\mu\dagger}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$は自明。

3. 式(2.7)に続きϕ_3、ϕ_4を求めよ。ここで v は負エネルギー解より E−m の E は負エネルギーで、正エネルギーE→−|E|と変換すると E−m=−（|E|＋m）と表せる。

$$\varphi_3=N\begin{pmatrix}\dfrac{-\sigma\cdot p}{|E|+m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}+i|E|t}\quad\varphi_4=N\begin{pmatrix}\dfrac{-\sigma\cdot p}{|E|+m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}+i|E|t}$$

4. 荷電共役変換とは粒子と反粒子とを入れ替える演算である。荷電共役変換($\phi\to\phi^c$)を施した Dirac 方程式の波動関数（ϕ^c）はディラック行列を使って

$$\varphi^C=i\gamma^2\gamma^0\overline{\varphi}^T=i\gamma^2\varphi^*$$

と表せることを示せ。

通常の Dirac 方程式は

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu-qA_\mu)-m]\varphi=0 \quad \text{———(4.a)}$$

荷電共役変換（q→−q）を施した Dirac 方程式とそれを満たす反粒子の波動関数ϕ^cは

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu+qA_\mu)-m]\varphi^C=0 \quad \text{———(4.b)}$$

式(4.a)のエルミート共役をとると、

$$\varphi^\dagger[\gamma^{\mu\dagger}(-i\overleftarrow{\partial}_\mu-qA_\mu)-m]=0$$

問題２のγ行列の関係式を使い、右からγ^0を掛けると

$$\overline{\varphi}[-\gamma^\mu(i\overleftarrow{\partial}_\mu+qA_\mu)-m]=0$$

ここで転置をとると、

$$[-\gamma^{\mu T}(i\overleftarrow{\partial}_\mu+qA_\mu)-m]\overline{\varphi}^T=0$$

ここで荷電共役変換の行列をＣ（$\varphi^C=C\overline{\varphi}^T$）とし、Ｃを上式に左から掛けると

$$[-C\gamma^{\mu T}C^{-1}(i\overleftarrow{\partial}_\mu+qA_\mu)-m]C\overline{\varphi}^T=0$$

$C\gamma^{\mu T}C^{-1}=-\gamma^\mu$を満たすＣが存在すれば、上式は式（4.b）と同じになる。行列$C=i\gamma^2\gamma^0$が関係式を満たし、この場合

$$\varphi^C = i\gamma^2\gamma^0\overline{\varphi}^T = i\gamma^2\varphi^*$$
となる。

5. Dirac 方程式の解に対して $\sum_{i=1,2} u_i\bar{u}_i = \not{p} + m$, $\sum_{i=1,2} v_i v_i = \not{p} - m$ を示す。ここで v は半粒子の平面波波動関数で $v_1(p) = u_4(-p), v_2(p) = u_3(-p)$ と定義される。

5.1 $u_1 = N\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$、$u_2 = N\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$ を用い

$\bar{u}_1 = u_1^\dagger\gamma^0 = N\left(\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \quad \frac{-\sigma\cdot p}{E+m}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right)$ となることを示せ。$\bar{u}_2$ も求めよ。

Dirac-Pauli 表現で $\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix}$ なので

$$\bar{u}_1 = u_1^\dagger\gamma^0 = N\left(\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \quad \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix} = N\left(\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \quad \frac{-\sigma\cdot p}{E+m}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right)。$$

同様に $\bar{u}_2 = u_2^\dagger\gamma^0 = N\left(\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \quad \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix} = N\left(\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \quad \frac{-\sigma\cdot p}{E+m}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\right)$。

5.2 $\sum_{i=1,2} u_i\bar{u}_i = u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 = N^2\begin{pmatrix} I & -\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m} & -\left(\frac{\sigma\cdot p}{E+m}\right)^2\end{pmatrix}$ となることを示せ。

$$u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 = N\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} N\left(\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \quad \frac{-\sigma\cdot p}{E+m}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right) + N\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} N\left(\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \quad \frac{-\sigma\cdot p}{E+m}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$= N^2\begin{pmatrix} I & \frac{-\sigma\cdot p}{E+m} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m} & -\left(\frac{\sigma\cdot p}{E+m}\right)^2\end{pmatrix}$$

5.3 $\varphi_1^\dagger\varphi_1 = |N|^2[1+\left(\frac{\sigma\cdot p}{E+m}\right)^2] = |N|^2\frac{2E}{E+m}$ となることを示せ。（ヒント）スピン演算子の性質 $(\sigma\cdot a)(\sigma\cdot b) = a\cdot b + i\sigma\cdot(a\times b)$ と $E^2 = p^2 + m^2$ を使えば自明。

$$(\sigma\cdot p)(\sigma\cdot p)(\sigma\cdot p) = p\cdot p + i\sigma\cdot(p\times p) = p^2$$

$$1+\left(\frac{\sigma\cdot p}{E+m}\right)^2 = \frac{(E+m)^2 + p^2}{(E+m)^2} = \frac{E^2+2mE+m^2+p^2}{(E+m)^2} = \frac{2E^2+2mE}{(E+m)^2} = \frac{2E}{(E+m)}$$

5.4 $N=\sqrt{E+m}$ と規格定数を選び 1.2 問の $\sum_{i=1,2} u_i\bar{u}_i$ を更に計算する。

（注）N は問 1.3 より単位体積中に２E 個の粒子があるように規格化する。もし単位体積中に１個の粒子で規格化するとローレンツ収縮で体積が変化したときに確率密度 $\rho \equiv j^0$ を不変にできないので、相対論では単位体積中に２E 個の粒子という共変的規格化を選ぶ。

$$\sum_{i=1,2} u_i\bar{u}_i = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & 0 \end{pmatrix} + E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= E\beta - \beta\sigma\cdot p + m$$
$$= \gamma^0 E - \vec{\gamma}\cdot p + m$$
$$= \not{p} + m$$

となることを示せ。ただし、 $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ である。

$$\sum_{i=1,2} u_i\bar{u}_i = (E+m)\begin{pmatrix} I & \dfrac{-\sigma\cdot p}{E+m} \\ \dfrac{\sigma\cdot p}{E+m} & -\left(\dfrac{\sigma\cdot p}{E+m}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E+m & -\sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & -\dfrac{(\sigma\cdot p)^2}{E+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E+m & -\sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & -\dfrac{p^2}{E+m} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} E+m & -\sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & -\dfrac{E^2-m^2}{E+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E+m & -\sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & -E+m \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & 0 \end{pmatrix} + E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -\beta\sigma\cdot p + E\beta + m$$
$$= -\vec{\gamma}\cdot p + \gamma^0 E + m = \gamma^0 E - \vec{\gamma}\cdot p + m$$
$$= \not{p} + m$$

5.5 同様に $\sum_{i=1,2} v_i\bar{v}_i = \not{p} - m$ となることを示せ。

$$v_1(p) = u_4(-p) = N\begin{pmatrix} \dfrac{\sigma\cdot p}{|E|+m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, v_2(p) = u_3(-p) = N\begin{pmatrix} \dfrac{\sigma\cdot p}{|E|+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_1 = v_1^\dagger\gamma^0 = N\left(\frac{\sigma\cdot p}{|E|+m}(0 \quad 1) \quad -(0 \quad 1)\right), \bar{v}_2 = v_2^\dagger\gamma^0 = N\left(\frac{\sigma\cdot p}{|E|+m}(1 \quad 0) \quad -(1 \quad 0)\right),$$

$$\sum_{i=1,2} v_i\bar{v}_i = v_1\bar{v}_1 + v_2\bar{v}_2 = N^2\begin{pmatrix} \left(\dfrac{\sigma\cdot p}{|E|+m}\right)^2 & -\dfrac{\sigma\cdot p}{|E|+m} \\ \dfrac{\sigma\cdot p}{|E|+m} & -I \end{pmatrix} = (|E|+m)\begin{pmatrix} \left(\dfrac{\sigma\cdot p}{|E|+m}\right)^2 & -\dfrac{\sigma\cdot p}{|E|+m} \\ \dfrac{\sigma\cdot p}{|E|+m} & -I \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{(\sigma\cdot p)^2}{|E|+m} & -\sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & -(|E|+m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{|E|^2-m^2}{|E|+m} & -\sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & -(|E|+m) \end{pmatrix}$$
$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & 0 \end{pmatrix} + E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -\beta\sigma\cdot p + E\beta - m$$
$$= \not{p} - m$$