素粒子物理学 I レポート　No.2（提出期限　5 月 25 日）

1. Klein-Gordon 方程式(2.1)から、ϕ が満たす連続の方程式を導く。

   1.1 式(2.1)に$-i\phi^*$をかけ、その複素共役形に$-i\phi$をかけて、連続の方程式

   $$\frac{\partial}{\partial t}[i(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}-\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t})]+\vec{\nabla}\cdot[-i(\phi^*\vec{\nabla}\phi-\phi\vec{\nabla}\phi^*)]=0$$

   を導け。この式より、確率密度 ρ と密度の流れ j は

   $$\rho=i(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}-\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}),\quad \vec{j}=-i(\phi^*\vec{\nabla}\phi-\phi\vec{\nabla}\phi^*)$$

   とわかる。

   1.2 方程式(2.1)の一般解 $\phi = Ne^{i\bar{p}\cdot\bar{x}-iEt}$ から確率密度 ρ と密度の流れ j を書き出せ。

   これより<u>確率密度は粒子の相対論的エネルギーE に比例することがわかる</u>。

2. γ 行列の公式　$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$、　$\gamma^{0\dagger}=\gamma^0$、$(\gamma^0)^2=I$、$\gamma^{k\dagger}=(\beta\alpha^k)^\dagger=\alpha^k\beta=-\gamma^k$、$(\gamma^k)^2=-I$ を示せ。またエルミート共役の結果は $\gamma^{\mu\dagger}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ を示せ。

3. 式(2.7)に続き ϕ_3、ϕ_4 を求めよ。ここで v は負エネルギー解より E−m の E は負エネルギーで、正エネルギーE→−|E|と変換すると E−m=−（|E|＋m）と表せる。

4. 荷電共役変換とは粒子と反粒子とを入れ替える演算である。荷電共役変換($\phi\to\phi^c$)を施した Dirac 方程式の波動関数（ϕ^c）はディラック行列を使って

   $$\varphi^C=i\gamma^2\gamma^0\overline{\varphi}^T=i\gamma^2\varphi^*$$

   と表せることを示せ。

5. Dirac 方程式の解に対して $\sum_{i=1,2}u_i\overline{u}_i=\not{p}+m$，$\sum_{i=1,2}v_iv_i=\not{p}-m$ を示す。ここで v は半粒子の平面波波動関数で $v_1(p)=u_4(-p), v_2(p)=u_3(-p)$ と定義される。

5.1　$u_1=N\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$、$u_2=N\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$ を用い

$\overline{u}_1=u_1^\dagger\gamma^0=N\left(\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\quad\frac{-\sigma\cdot p}{E+m}\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\right)$ となることを示せ。$\overline{u}_2$ も求めよ。

5.2　$\sum_{i=1,2}\boldsymbol{u}_i\overline{\boldsymbol{u}}_i=\boldsymbol{u}_1\overline{\boldsymbol{u}}_1+\boldsymbol{u}_2\overline{\boldsymbol{u}}_2=\boldsymbol{N}^2\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{E}+\boldsymbol{m}}\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{E}+\boldsymbol{m}} & -\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{E}+\boldsymbol{m}}\right)^2\end{pmatrix}$ となることを示せ。

5.3　$\varphi_1^\dagger \varphi_1 = \left|N\right|^2 [1 + \left(\dfrac{\sigma \cdot p}{E+m}\right)^2] = \left|N\right|^2 \dfrac{2E}{E+m}$ となることを示せ。（ヒント）スピン演算子の性質 $(\sigma \cdot a)(\sigma \cdot b) = a \cdot b + i\sigma \cdot (a \times b)$ と $E^2 = p^2 + m^2$ を使えば自明。

5.4　$N = \sqrt{E+m}$ と規格定数を選び 1.2 問の $\sum_{i=1,2} u_i \bar{u}_i$ を更に計算する。

（注）N は 1.3 問より単位体積中に２E 個の粒子があるように規格化する。もし単位体積中に１個の粒子で規格化するとローレンツ収縮で体積が変化したときに確率密度 $\rho \equiv j^0$ を不変にできないので、相対論では単位体積中に２E 個の粒子という共変的規格化を選ぶ。

$$\sum_{i=1,2} u_i \bar{u}_i = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & 0 \end{pmatrix} + E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= E\beta - \beta\sigma \cdot p + m$$
$$= \gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot p + m$$
$$= \not{p} + m$$

となることを示せ。ただし、$\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ である。

5.5　同様に $\sum_{i=1,2} v_i \bar{v}_i = \not{p} - m$ となることを示せ。