素粒子物理学 I レポート解答　No.1（提出期限　5 月 2 日）

1. 【粒子の質量】次の素粒子の質量を調べなさい。ニュートリノに関しては質量の上限値でよい。

   (ア) e, μ, τ, ν_e, ν_μ, ν_τ

   e: 0.511MeV、　μ: 105.6MeV、τ: 1777MeV、ν_e: <3eV、ν_μ: <0.19MeV、ν_τ: <18.2MeV。

   （注）ニュートリノに関しては $m_3^2-m_2^2\sim2.5\times10^{-3}\mathrm{eV}^2$、$m_2^2-m_1^2\sim8\times10^{-5}\mathrm{eV}^2$

   (イ) γ, g（グルーオン）, $W^\pm$, Z^0, top クォーク, charm クォーク, up クォーク

   γ: 0 or <6×10^{-17}eV、g: 0、$W^\pm$: 80.4GeV、Z^0: 91.2GeV、top クォーク: 174.3GeV, charm クォーク：1.15~1.35 GeV, up クォーク：1.5~4 MeV

   (ウ) $\pi^\pm$, π^0, p, n, $K^\pm$, φ($s\bar{s}$状態), J/Ψ(1S: $c\bar{c}$状態), Υ(1S: $b\bar{b}$状態)

   $\pi^\pm$: 139.6MeV、π^0: 135.0MeV、p: 938MeV、n: 939.6MeV、$K^\pm$: 494MeV、φ: 1019MeV、J/ψ: 3097MeV、Υ: 9460MeV

2. 【粒子の寿命】次の粒子の寿命を調べなさい。寿命が短すぎて測れない粒子は、その粒子の幅から寿命に換算しなさい。

   (ア) μ, τ

   μ: 2.197×10^{-6} 秒、τ: 2.9×10^{-13} 秒、

   (イ) $W^\pm$, Z^0, D^+メソン、B^+メソン

   $W^\pm$: 2.12GeV、Z^0: Γ=2.50GeV、t-quark: ~10^{-25} 秒、D^+メソン：1.0×10^{-12} 秒、B^+メソン：1.7×10^{-12} 秒

   (ウ) $\pi^\pm$, π^0, ρ, ω, η, n, $K^\pm$, φ($s\bar{s}$状態), J/Ψ(1S: $c\bar{c}$状態), Υ(1S: $b\bar{b}$状態)

   $\pi^\pm$: 2.6×10^{-8} 秒、π^0: 8.4×10^{-17} 秒、ρ：Γ=150MeV、ω：Γ=8.5MeV、η：Γ=1.3keV、n: 885.7 秒、$K^\pm$: 1.24×10^{-8} 秒、φ: Γ=4.26MeV、J/ψ: Γ=91keV、Υ: Γ=53keV、

   （考察）粒子の寿命を調べると、素粒子の相互作用が見えてくる。例えば、何故 π^+ と π^0 の寿命が大きく違うのか、$\rho^+(u\bar{d})$ と $\pi^+(u\bar{d})$ の寿命の違いの原因は何か？また J/Ψ(1S)と Υ(1S)の寿命の違いを比べるのも面白い。例えば、J/Ψ(1S)の寿命よりも、Υ(1S)の寿命の方が長い。粒子は重くなると崩壊できる状態数（Phase Space）が増えるので、一般には寿命は短くなるのが普通である。なぜ、Υ(1S)は J/Ψ(1S)より寿命が長いのか？考えてみてください。

   π^+ は弱い相互作用で、π^0 は電磁相互作用で崩壊するので、π^0 の方が寿命は短い。また、$\rho^+(u\bar{d})$ は強い相互作用で崩壊するので、寿命は更に短い。J/Ψ($c\bar{c}$状態)も Υ($b\bar{b}$状態)も電磁相互作用と強い相互作用の両方で崩壊する。ここでは、粒子の質量が重く崩壊エネルギーが高いので、強い相互作用が弱くなり、電磁相互作用と強い相互作用の強さが拮抗している。電磁相互作用の場合は b クォークの電荷は-1/3 で c クォークの電荷+2/3 より小さく、その電荷の違いの分、b クォークの相互作用は弱く、寿命は長くなる。また強い相互作用の場合、b クォークの質量は c クォークの質量より更に重く、強い相互作用の結合定数が小さくなり、b クォークの相互作用は弱く、寿命は長くなる。定量的な議論は戸塚先生が書いた岩波「素粒子物理学」参照。

3. 【粒子の質量幅と不確定性原理】ブライト-ウィグナーの共鳴公式

   寿命 τ の粒子の個数 N(t)は初期値を N_0 として、$N(t)=N_0\cdot e^{-t/\tau}$ と表せる。

   その粒子の波動関数を ψ(t)とすると、その存在確率は $|\varphi(t)|^2\propto e^{-t/\tau}$ である。エネルギー固有状態の波動関数は、$\varphi(x,t)\propto\varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$ のような時間依存性をもち、$E=E_0-i\Gamma/2$ とおく。

(エ) $\Gamma = \hbar/\tau$ を示せ。不安定であることと、虚数のエネルギーをもつことが同等であることが分かる。

$$|\varphi(t)|^2 = \left|\varphi(0)e^{-i(E_0 - i\Gamma/2)t/\hbar}\right|^2 = |\varphi(0)|^2 e^{-\Gamma t/\hbar}$$

$$\therefore \Gamma = \hbar/\tau$$

(オ) 次に、波動関数を次のようにエネルギーの関数としてフーリエ分解する。

$$\tilde{\varphi}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\varphi(t)e^{iEt/\hbar}$$

初期条件を t<0 において ψ(t)=0 として

$$\tilde{\varphi}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i\hbar}{E - E_0 + i(\Gamma/2)}$$ となることを示せ。

$$\tilde{\varphi}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\varphi(0)e^{-i(E_0 - i\Gamma/2)t/\hbar}e^{iEt/\hbar}$$

$$= \frac{\varphi(0)}{\sqrt{2\pi}}\frac{i\hbar}{E - E_0 + i(\Gamma/2)}$$

(カ) 素粒子があるエネルギー E をとる確率 P(E)は $|\tilde{\varphi}(E)|^2$ に比例するので、

$$P(E) \propto |\tilde{\varphi}(E)|^2 = \frac{|\varphi(0)|^2}{2\pi}\frac{\hbar^2}{(E - E_0)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

となる。この関数は以下の形をしており、ブライト - ウィグナーの共鳴公式と呼ばれる。その半値全幅（FWHM=Full Width at Half Maximum）は Γ となる。よって短寿命粒子（主に共鳴状態として存在する粒子）では幅 Γ を寿命の代わりに使う。

4. 核力の到達範囲を考慮する。π 中間子の質量を 140MeV として、不確定性原理 $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$、Δl=cΔt、を使って仮想 π 中間子が相互作用を及ぼす距離 $\Delta l \approx \frac{\hbar c}{140MeV} = ??cm$ を求めよ。この距離は原子核の大きさと同程度である。次に弱い相互作用の到達距離を推測するために、弱い相互作用の媒介粒子である $W^{\pm}$ が相互作用を及ぼす距離を求めよ。

π 中間子の相互作用距離：

Δl~hc/140MeV

=$\{(1.05\times10^{-34}[J\cdot s])\times(3\times10^{10}[cm/s])\}/\{(140\times10^{6}[eV]\times(1.602\times10^{-19}[J/eV])$

=1.4×10^{-13}cm

これが原子核の大体の大きさに相当する。

5. 100GeV の高エネルギー電子で測定できる物質の構造の大きさの限界を示せ。（ヒント）物質の構造を観測できる解像度はその粒子のドブロイ波長程度である。参考までに 400nm の波長の可視光のエネルギーは 3eV 程度である。

ドブロイ波長 λ は h/p なので

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{pc} = \frac{2\pi \times 1.05\times10^{-34}[J\cdot s]\times 3\times10^{8}[m/s]}{100\times10^{9}[eV]\times1.602\times10^{-19}[J/eV]} = 1.2\times10^{-17}\,m$$

となる。例えば、3eV の光子のドブロイ波長は 100GeV の電子に比べて

$(100GeV/3=3.3\times10^{10})$倍長いので、$1.2\times10^{-17}$m×$3.3\times10^{10}$=$4\times10^{-7}$m=400nm となる。

6.　１次宇宙線（主に陽子）が大気中で原子核と反応しπ$^+$中間子（質量 140MeV/c^2）が生成される。しかし地上で観測される宇宙線の大部分はμ粒子質量（100MeV/c^2）である。この現象について考察する。

(キ) 7GeV のπ$^+$中間子が上空 10,000mで生成されたとして、π$^+$中間子が地上に到達する確率を求めよ。

7GeV のπ$^+$中間子の寿命は$\tau_\pi=\gamma\tau_\pi^*$=(7000MeV/140MeV)×$2.6\times10^{-8}$秒=$1.3\times10^{-6}$秒。

π$^+$はほぼ光速で飛行する（$\beta=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}=0.9998\sim1$）ので、寿命の間に飛行する距離は c×$\tau_\pi$=($3\times10^8$m/s)×($1.3\times10^{-6}$s)=390m.

π$^+$中間子は 390m で存在確率が 1/e になるので、10000m 飛行後の存在確率は exp(-10000/390)=7.3×10^{-12}。

よって、π$^+$中間子が地上に到達する確率は非常に小さい。

(ク) π$^+$は$\pi^+\rightarrow\mu^++\nu$と崩壊する。π$^+$の崩壊で５GeV のμ粒子が上空 10,000mで生成された場合、地上に到達する確率を求めよ。

（ヒント）β、γを求め実験室系での寿命を求めよ。光速は３×10^8m/s である。

上と同様の計算を行なう。μ粒子の寿命は 2.2×10^{-6}秒で、５GeV のμ粒子のγファクターは 50．よってπ$^+$中間子と同様の計算で寿命の間に飛行する距離は 33000m。

10000m 飛行後の存在確率は exp(-10000/33000)=0.74。

よって大部分のμ粒子は地上まで降ってくる。