素粒子物理学Ｉレポート　No.1（提出期限　4 月 22 日）

1. 以下の素粒子の質量と寿命を調べなさい。質量がまだ測定されていない粒子に関しては、質量に与えられている制限について調べなさい。また寿命が測定できないくらい短い粒子に関しては粒子の幅を示しなさい。
   (ア) e, μ, τ, ν_e, ν_μ, ν_τ
   (イ) u, d, c, s, t, b
   (ウ) γ, g, $W^\pm$, Z^0
   (エ) H
   (オ) p, n, Λ, $\pi^\pm$, π^0, φ, $K^\pm$, J/Ψ, $D^\pm$, ϒ, $B^\pm$

2. 核力の到達範囲を考慮する。π中間子の質量を 140MeVとして、不確定性原理 $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ 、$\Delta l = c\Delta t$、を使って仮想π中間子が相互作用を及ぼす距離 $\Delta l \approx \dfrac{\hbar c}{140MeV} = ??cm$ を求めよ。次に弱い相互作用の到達距離を推測するために、弱い相互作用の媒介粒子である$W^\pm$が相互作用を及ぼす距離を求めよ。

3. 式(1.1)の逆変換を求めよ。つまり慣性系 K の座標を慣性系 K'の座標で表せ。

4. １次宇宙線（主に陽子）が大気中で原子核と反応しπ^+中間子が生成される。しかし地上で観測される宇宙線の大部分はμ粒子である。この現象について考察する。5GeVのπ^+中間子が上空 10,000mで生成されたとして、π^+中間子のβとγを求めよ。そして、π^+中間子が平均寿命内で飛行できる距離（飛程）を求めよ。またπ^+中間子は崩壊してμ粒子が生成される。4GeVのμ粒子が生成されたとして、μ粒子の飛程を求めよ。

5. 選考している課題研究と自分が今後（大学院？）選考したいと思っている物理の分野を教えて下さい。
   例：素粒子実験、素粒子理論、原子核理論、プラズマ、光物理学、半導体、生命物理､､､

素粒子物理学Ⅰレポート　No.2（提出期限　5 月 6 日）

1. Klein-Gordon 方程式(2.1)から、ϕが満たす連続の方程式を導く。

   1.1 式(2.1)に$-i\phi^*$をかけ、その複素共役形に$-i\phi$をかけて、連続の方程式

   $$\frac{\partial}{\partial t}[i(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}-\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t})]+\nabla\cdot[-i(\phi^*\nabla\phi-\phi\nabla\phi^*)]=0$$

   を導け。この式より、確率密度ρと密度の流れjは

   $$\rho=i(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}-\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}),\quad j=-i(\phi^*\nabla\phi-\phi\nabla\phi^*)$$

   だとわかる。

   1.2 方程式（2.1）の一般解$\phi=Ne^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt}$から確率密度$\rho$と密度の流れ$j$を書き出せ。

   これより<u>確率密度は粒子の相対論的エネルギーEに比例することがわかる</u>。

2. Dirac方程式$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0$において$\phi$の 4 成分を別々にして、それぞれの成分

   ϕ_1、ϕ_2、ϕ_3、ϕ_4を 4 つの方程式であらわに書き出せ。

3. γ行列の公式　$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$、　$\gamma^{0\dagger}=\gamma^0$、$(\gamma^0)^2=I$、$\gamma^{k\dagger}=(\beta\alpha^k)^\dagger=\alpha^k\beta=-$

   γ^k、$(\gamma^k)^2=-I$を示せ。またエルミート共役の結果は$\gamma^{\mu\dagger}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$を示せ。

4. 式(2.7)に続きϕ_3、ϕ_4を求めよ。ここでvは負エネルギー解よりE−mのEは負エネルギーで、正エネルギーE→−|E|と変換するとE−m=−（|E|＋m）と表せる。

素粒子物理学Ｉレポート　No.3（提出期限　5 月 28 日）

1. 4 成分ヘリシティ演算子がディラックハミルトニアンと交換することを示せ。よってヘリシティはエネルギーと独立な観測可能量であり系を記述するよい粒子数である。

2. $\rho \equiv j^0$ が確率密度 $\sum_{i=1}^{4} |\varphi_i|^2$ となることを示せ。

3. Dirac 方程式の解に対して $\sum_{i=1,2} \varphi_i \overline{\varphi}_i = \not{p} + m$, $\sum_{i=3,4} \varphi_i \overline{\varphi}_i = \not{p} - m$ を示す。

3.1 $\varphi_1 = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\sigma \cdot p}{E + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ 、$\varphi_2 = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\sigma \cdot p}{E + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ を用い

$\overline{\varphi}_1 = \varphi_1^\dagger \gamma^0 = N \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \dfrac{-\sigma \cdot p}{E + m} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ となることを示せ。$\overline{\varphi}_2$ も求めよ。

3.2 $\sum_{i=1,2} \varphi_i \overline{\varphi}_i = \varphi_1 \overline{\varphi}_1 + \varphi_2 \overline{\varphi}_2 = N^2 \begin{pmatrix} I & -\dfrac{\sigma \cdot p}{E + m} \\ \dfrac{\sigma \cdot p}{E + m} & -\left(\dfrac{\sigma \cdot p}{E + m} \right)^2 \end{pmatrix}$ となることを示せ。

3.3 $\varphi_1^\dagger \varphi_1 = |N|^2 [1 + \left(\dfrac{\sigma \cdot p}{E + m} \right)^2] = |N|^2 \dfrac{2E}{E + m}$ となることを示せ。（ヒント）スピン演算子の性質 $(\sigma \cdot a)(\sigma \cdot b) = a \cdot b + i \sigma \cdot (a \times b)$ と $E^2 = p^2 + m^2$ を使えば自明。

3.4 $N = \sqrt{E + m}$ と規格定数を選び 1.2 問の $\sum_{i=1,2} \varphi_i \overline{\varphi}_i$ を更に計算する。

（注）N は 1.3 問より単位体積中に２E 個の粒子があるように規格化する。もし単位体積中に１個の粒子で規格化するとローレンツ収縮で体積が変化したときに確率密度 $\rho \equiv j^0$ を不変にできないので、相対論では単位体積中に２E 個の粒子という共変的規格化を選ぶ。

$$\sum_{i=1,2} \varphi_i \overline{\varphi}_i = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & 0 \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= E\beta - \beta \sigma \cdot p + m$$
$$= \gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot p + m$$
$$= \not{p} + m$$

となることを示せ。ただし、$\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ である。

3.5　同様に $\sum_{i=3,4}\varphi_i\overline{\varphi_i} = \not{p} - m$ となることを示せ。

4.　意欲のある人は式(2.18)の $|M|^2$ を正確に書いたときに

$$|M|^2 = \frac{8e^4}{q^4}\{(p_b \cdot p^a)(p_d \cdot p^c) + (p_b \cdot p^c)(p_d \cdot p^a) - m_e^2 p^c \cdot p^a - m_\mu^2 p_d \cdot p_b + 2m_e^2 m_\mu^2\}$$

となることを示せ (採点には加えないので、意欲のある人が自主的にやるだけでいいです)。

5.　 マンデルシュータム変数の関係式 $s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$ を示しなさい。また、$p_a \to -p_d$ の置き換えでマンデルシュータム変数sとtが入れ代わることを示せ。

6.　(2.25) について重心系で粒子の質量が無視できる場合、

$$s \sim 2p_a \cdot p_b = 4p_a^2$$
$$t \sim -2p_a \cdot p_c = -2p_a^2(1-\cos\theta)$$
$$u \sim -2p_a \cdot p_d = -2p_a^2(1+\cos\theta)$$

となることを示しなさい。ただし、θ は重心系での散乱角である。

7.　現在日本のBファクトリー実験は重心系エネルギー10GeVで$B\bar{B}$中間子を大量生成し実験を行っている。$\sigma(e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-)$ は何pbか？pbは $10^{-12}\times$b(10^{-24}cm^2)=10^{-36}cm^2 である。また現在Bファクトリーは 10^{34}cm^{-2}s^{-1}という高ルミノシーティーで実験を行っている。毎秒何個の$\mu^+\mu^-$対が生成されているか？

参考資料

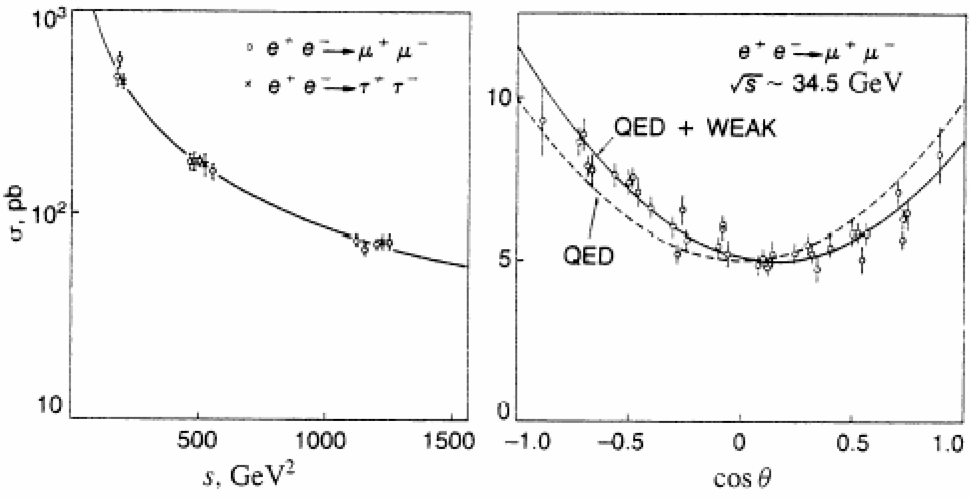

Fig. 5.2. Results on total and differential cross-sections for $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ and $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ from the PETRA collider at DESY. The curve on the left shows the QED prediction for the total cross-section, on which neutral currents due to Z^0 exchange have small and unmeasurable effects. On the right is given the cms angular distribution. The broken curve shows the pure QED prediction (5.4), while the solid curve indicates the small forward–backward asymmetry expected from the combination of Z^0 and γ exchange.

素粒子物理学Ｉレポート　No.4（提出期限　７月９日）

１．$\pi^{\pm}$p(n)反応でアイソスピン 3/2 の Δ（1232）[電荷は++、+、0、－がある]を生成し、終状態がπ^+ p 、π^+ n 、π^0 p 、π^0 n 、π^- p となる反応を考える。

1–1. アイソスピン1/2（p）と１(π)の合成から、アイソスピン 3/2 の成分{Δ（1232）}は次のようになることを確かめよ。

$$\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \pi^+ p,\quad \left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^+ n + \sqrt{\frac{2}{3}}\pi^0 p,\quad \left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\pi^0 n + \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^- p,\quad \left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = \pi^- n$$

1.2 $\pi^{\pm}$p(n)反応で次の反応断面積の比x1:x2:x3:x4:x5:x6 を求めよ。

$$\sigma\left(\pi^+ p(\to\Delta)\to\pi^+ p\right):\sigma\left(\pi^+ n(\to\Delta)\to\pi^+ n\right):\sigma\left(\pi^+ n(\to\Delta)\to\pi^0 p\right):\sigma\left(\pi^- p(\to\Delta)\to\pi^0 n\right)$$
$$:\sigma\left(\pi^- p(\to\Delta)\to\pi^- p\right):\sigma\left(\pi^- n(\to\Delta)\to\pi^- n\right) = x1:x2:x3:x4:x5:x6$$

実験値は

$$\sigma\left(\pi^+ p(\to\Delta)\to\pi^+ p\right) = 210mb,\ \sigma\left(\pi^- p(\to\Delta)\to\pi^- p\right) = 24mb,$$

$\sigma\left(\pi^- p(\to\Delta)\to\pi^0 n\right) = 48mb$　となっている。

1.3 Δ^{++}、Δ^{+}、Δ^{0}、Δ^{-}をクォークの状態で記述せよ。

2. $\dfrac{\sigma(e^+e^-\to q\bar{q})}{\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)}$の値（R値）を$e^+e^-$の衝突全エネルギーが 2GeV、4GeV、15GeVの時について求めよ。また、トップクォーク対が生成できるエネルギー400GeVでのR値は幾らか？

3. 弱い相互作用においてベータ崩壊、μ粒子崩壊、π崩壊の崩壊幅を計算すると常にエネルギーの５乗に比例している。この理由を次元の考察から説明せよ。

４．質量 140MeVのπ中間子の寿命は 2.6×10^{-8}secである。質量 500MeVの荷電K^+中間子も主崩壊モードが$K^+\to\mu^+\nu$であると仮定すると、K中間子の寿命はいくらか？$f_K = m_K$と仮定してよい。また、$\dfrac{\Gamma(K\to e\nu)}{\Gamma(K\to\mu\nu)}$を求めよ。（専門向け）実際には荷電$K^+$中間子の寿命は 1.2×10^{-8}secでこの計算とは大きく異なっている。その理由は弱い相互作用のハドロン崩壊においてアイソスピンを 1/2 変える反応が優先され、アイソスピンを 3/2 変える$K^+\to\mu^+\nu$反応は抑制され予想されるよりも荷電K^+中間子は長寿命となっているためである。

5.　式(4.10)を導く時に用いた $t \approx -s/2 \cdot (1-\cos\theta)$ を確かめよ。またヘリシティー保存から反ニュートリノ散乱で前方散乱が抑制されることを説明せよ。