5. 電弱相互作用：電磁相互作用と弱い相互作用の統一

5.1 SU(2)L 対象性と弱ハイパー荷

荷電カレントは左巻き粒子の電荷を上げ下げするので、粒子の 2 重項の組み

$\chi_L = \begin{pmatrix} \nu \\ e^- \end{pmatrix}_L$ を導入して

$$J_\mu{}^+ = \bar{\varphi}_\nu \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2}\varphi_e$$
$$= \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L \qquad \text{———(5.1)}$$
$$= \bar{\chi}_L \gamma_\mu \tau_+ \chi_L$$

と表せる。ここで $\tau_\pm = \dfrac{\tau_1 \pm i\tau_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(+), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(-)$ は $\chi_L = \begin{pmatrix} \nu \\ e^- \end{pmatrix}_L$ に対する昇降演算子

である（注：τ はパウリのスピン行列。式（2.4.1）参照)。

荷電カレント $\begin{matrix} J_\mu{}^+ = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \tau_+ \chi_L \\ J_\mu{}^- = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \tau_- \chi_L \end{matrix}$ ———(5.2)

は SU(2)の構造を持つことが期待できる。すると中性カレントは、パウリのスピン行列の第 3 成分を用いて SU(2)L に対してアイソスピン 3 重項を構成する

$$J_\mu{}^0 = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \tau_3 \chi_L = \frac{1}{2}\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \frac{1}{2}\bar{e}_L \gamma_\mu e_L \qquad \text{———(5.3)}$$

となることが期待される。しかし実験で観測された中性カレントは右巻き成分も持っていたので $J_\mu{}^0$ を実際の弱中性カレントに当てはめることはできない。ここで SU(2)L 対称性に対して不変なカレント $J_\mu{}^Y = \bar{\chi}_L \gamma_\mu Y \chi_L$ を導入する。ここで Y は弱ハイパー荷で定義は

$$Y \equiv 2(Q - T^3) \qquad \text{———(5.4)}$$

とする。左巻きレプトン（電子[Q=−1、T3=−1/2]、ニュートリノ[Q=0、T3=1/2]両方）に対して Y=−1 となる。アイデアは $J_\mu{}^0$ と $J_\mu{}^Y$ を使って実際に存在する弱中性カレントと電磁カレント（これも電荷を変えないので中性カレントである）を構成しようという考えである。

弱ハイパー荷 Y の定義(5.4)から

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}$$
$$J_\mu{}^{EM} = J_\mu{}^3 + \frac{J_\mu{}^Y}{2} \qquad \text{———(5.5)}$$

となることが推測される。ハイパー荷 Y は $U(1)_Y$ 対称群を生成するので、弱い相互作用と電磁相互作用は、対称群 $U(1)_Y \times SU(2)_L$ で統一できることを示唆している。ただし、群 $U(1)_Y$ と $SU(2)_L$ はそれぞれ独立の結合定数を持つ。その一つは $U(1)_{EM}$ 対称群の電荷 e に関係すると推測される。

ここで、右巻き粒子のハイパー荷を考える。式(5.3)と(5.5)より

$$
\begin{aligned}
& J_\mu{}^Y = 2J_\mu{}^{EM} - 2J_\mu{}^3 \\
& = -2(\bar{e}_R \gamma_\mu e_R + \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) - (\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) \\
& = -2\bar{e}_R \gamma_\mu e_R - 1\bar{e}_L \gamma_\mu e_L - 1\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L
\end{aligned}
$$

となる。右巻きの電子はハイパー荷−2 をもっている(式 5.5 で Q=−1、$T^3=0$ からも明らか)。左巻き電子とニュートリノはハイパー荷−1 でこれはハイパー荷を弱い相互作用の $SU(2)_L$ 対象性に対して不変なものとして導入した当然の結論である。

5.2 電弱相互作用

電磁相互作用はカレントと電場の相互作用で

$-ieJ_\mu{}^{EM}A^\mu$ と記述できた。同様に電弱相互作用は弱い相互作用のカレントと場、ハイパー荷カレントとその場を使って

$$
-ig(J_\mu)^i(W^\mu)^i - i\frac{g'}{2}J_\mu{}^Y B^\mu \text{———}(5.6)
$$

と記述できると想像できる。ここで g,g'は弱い相互作用、ハイパー荷相互作用の結合定数である。実際の荷電ベクトルボソン $W^\pm$ は

$$
W_\mu{}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu{}^1 \mp iW_\mu{}^2) \text{———}(5.7)
$$

と記述できる。ここで W^3 と B は中性のベクトルボソンを表す。観測される電磁相互作用のベクトルボソン（光子）と弱い相互作用のベクトルボソン（Z^0）は W^3 と B の混合状態で

$$
\left.
\begin{aligned}
A_\mu &= B_\mu \cos\theta_W + W_\mu{}^3 \sin\theta_W \\
Z_\mu &= -B_\mu \sin\theta_W + W_\mu{}^3 \cos\theta_W
\end{aligned}
\right\} \text{———}(5.8)
$$

と表せる（詳細はヒッグスメカニズムから、6.2.3 章参照）。よって中性カレント相互作用は式(5.8)を式(5.6)に代入して

$$
\begin{aligned}
& -ig(J_\mu)^3(W^\mu)^3 - i\frac{g'}{2}J_\mu{}^Y B^\mu \\
& = -i(g\sin\theta_W J_\mu{}^3 + g'\cos\theta_W \frac{J_\mu{}^Y}{2})A^\mu - i(g\cos\theta_W J_\mu{}^3 - g'\sin\theta_W \frac{J_\mu{}^Y}{2})Z^\mu
\end{aligned}
\text{———}(5.9)
$$

と記述できる。第 1 項が電磁相互作用、第 2 項が弱い相互作用を表し、混合角 θ_W はワイン

バーグ角と呼ばれ、素粒子の標準模型のもっとも重要なパラメータの一つであり、実験的に $\sin^2\theta w=0.23$ と測定されている。第 1 項が電磁相互作用を記述しているので式(5.5)と比較して

$$g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W = e \text{ ———— (5.10)}$$

が成り立つ。よってワインバーグ角 θw は弱い相互作用とハイパー荷相互作用の結合定数の比によって決まっている。第 2 項は弱い相互作用の中性カレントで

$$i(g\cos\theta_W J_\mu{}^3 - g'\sin\theta_W \frac{J_\mu{}^Y}{2})Z^\mu$$

$$= i(g\cos\theta_W J_\mu{}^3 - g'\sin\theta_W\{\frac{1}{e}(J_\mu{}^{EM} - J_\mu{}^3)\})Z^\mu \text{ ———— (5.11)}$$

$$= -i\frac{g}{\cos\theta_W}(J_\mu{}^3 - \sin^2\theta_W J_\mu{}^{EM})Z^\mu$$

よって、弱い相互作用の中性カレントは $J_\mu{}^3 - \sin^2\theta_W J_\mu{}^{EM}$ の形をしており、左巻き粒子との反応だけではなくて、右巻き粒子と反応していたことも理解できる。

最後に荷電カレントと中性カレントの反応の強さを調べる（4.6 章で導入したパラメータρ)。不変振幅は

$$M^{CC} = \left(\frac{g}{\sqrt{2}}J^\mu\right)\left(\frac{1}{M_W{}^2}\right)\left(\frac{g}{\sqrt{2}}J^{\mu\dagger}\right)$$

$$M^{NC} = \left(\frac{g}{\cos\theta_W}J^\mu\right)\left(\frac{1}{M_Z{}^2}\right)\left(\frac{g}{\cos\theta_W}J^{\mu\dagger}\right) \text{ ———— (5.12)}$$

となる。両者を比較すると

$$\rho = \frac{M_W{}^2}{M_Z{}^2\cos^2\theta_W} = \frac{(80.423)^2}{(91.188)^2(1-0.23)} = 1.01 \quad \text{ ———— (5.13)}$$

で確かにρ=1 が成り立っている。標準模型、ヒッグス機構ではρ=1 を予言する。

最後に弱い相互作用の中性カレントの構造は式(4.13)で

$$J_\alpha{}^{\mathrm{NC}} = \overline{\varphi}_e\gamma_\alpha\frac{c_V - c_A\gamma^5}{2}\varphi_e$$

と定義した。式(5.11)を更に式変形すると

$$-i\frac{g}{\cos\theta_W}(J_\mu{}^3 - \sin^2\theta_W J_\mu{}^{EM})Z^\mu = -i\frac{g}{\cos\theta_W}\overline{\varphi}_e\gamma_\mu[\frac{1}{2}(1-\gamma^5)T^3 - \sin^2\theta_W Q]\varphi_e Z^\mu \text{ — (5.11)}$$

なので

$$c_V = T^3 - 2\sin^2\theta_W Q \qquad \text{———(5.14)}$$
$$c_A = T^3$$

の関係が成り立ち、4.6 章のテーブルで与えた cv,cA の値が導かれる。

[HW]例題 $Z^0 \to \bar{f}f$ 崩壊（f はフェルミオン）の崩壊率を考える。カレントの構造が $\bar{\varphi}\gamma_\mu(c_V - c_A\gamma^5)\varphi$ の時、崩壊幅は $\Gamma(Z^0 \to \bar{f}f) \propto (c_V{}^2 + c_A{}^2)$ に比例する。$\Gamma(Z^0 \to all)$ を計算したい。

ee,μμ,ττ; $c_V^2+c_A^2$=0.251

νν; $c_V^2+c_A^2$=0.5

uu, cc; $c_V^2+c_A^2$=0.285*3=0.855

dd,ss,tt; $c_V^2+c_A^2$=0.365*3=1.085

[1] $\Gamma(Z^0 \to e^+e^-)/\Gamma(Z^0 \to all)$ はいくらか？

0.251/(0.251*3+0.5*3+0.855*2+1.085*3)=0.251/7.26=0.034

[2] $\Gamma(Z^0 \to \bar{u}u)/\Gamma(Z^0 \to all)$ はいくらか？カラー因子に注意せよ。

0.855/(0.251*3+0.5*3+0.855*2+1.085*3) =0.118

[3] $\Gamma(Z^0 \to \bar{d}d)/\Gamma(Z^0 \to all)$ はいくらか？

1.085/(0.251*3+0.5*3+0.855*2+1.085*3)=0.151

[4] $\Gamma(Z^0 \to \bar{\nu}\nu)/\Gamma(Z^0 \to all)$ はいくらか？ニュートリノは 3 種類あることに注意せよ。

1.5/(0.251*3+0.5*3+0.855*2+1.085*3)=0.207

5.3 電弱相互作用の干渉

2 章では $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ の計算において、電磁相互作用の効果のみを計算した。高エネルギー反応になると弱い相互作用の効果が無視できなくなり、電磁相互作用と弱い相互作用の干渉効果が見え出す。電弱相互作用の大きさは $|M^{EM}| >> |M^{NC}|$ のエネルギーでは、

$$|M^{EM} + M^{NC}|^2 \sim |M^{EM}|^2 + 2|M^{EM}M^{NC}| \sim |M^{EM}|^2\left(1 + 2\frac{|M^{EM}M^{NC}|}{|M^{EM}|^2}\right)$$

で、干渉項は

$$\frac{|M^{EM}M^{NC}|}{|M^{EM}|^2} \sim \frac{G}{e^2/q^2} \sim \frac{10^{-5}/m_N^2}{4\pi/137}\cdot q^2 \sim 10^{-4}(q/m_N)^2 \qquad \text{———(5.15)}$$

となる。よって 10GeV{$(q/m)^2$~100}位のエネルギーでは干渉効果は 1%程度である。干渉効果の現象例としては、高エネルギーの $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 反応でこの干渉効果により e^+ の方向に生成される μ^+ 粒子の数が少ないことが観測されている。これは 2.3.7 章の(2.29）式と(2.30)式の途中の QED の微分断面積の予言と外れている。