

4. 弱い相互作用

弱い相互作用は

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \quad \text{寿命 } t=2.6 \times 10^{-8} \text{sec}$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \quad \text{寿命 } t=2.2 \times 10^{-6} \text{sec}$$

$$^{10}\text{C} \rightarrow ^{10}\text{B}^* e^+ \nu_e \quad (\text{p} \rightarrow \text{n} e^+ \nu_e)$$

$$\text{n} \rightarrow \text{p} e^- \bar{\nu}_e \quad \text{寿命 } t=920 \text{sec}$$

$$\text{K}^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \quad \text{寿命 } t=1.2 \times 10^{-8} \text{sec}$$

というふうに、相互作用が弱いので強い相互作用・電磁相互作用と比べて粒子の寿命は長くなる。(注) 弱い相互作用で壊れる粒子は、光速($3 \times 10^8 \text{m/s}$)で飛ぶと粒子の飛跡の観測が可能である。他の相互作用の粒子は、通常壊れた後の粒子の観測しかできない。

4.1 レプトン数

ここで、弱い相互作用の特徴としてレプトン数の保存がある。上記の過程でレプトン数は電子数、ミューオン数と存在し

$$L_e = +1: e^-, \nu_e \quad \Leftrightarrow \quad L_e = -1: e^+, \bar{\nu}_e$$

$$L_\mu = +1: \mu^-, \nu_\mu \quad \Leftrightarrow \quad L_\mu = -1: \mu^+, \bar{\nu}_\mu$$

をもつ。他にタウ数も存在する。クォークはレプトンでないので、レプトン数がゼロである。レプトン数の比保存はニュートリノ振動を除いて観測されておらず、

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$$

の崩壊が観測されていないことは、レプトン数の保存で説明されている。

[HW] レプトン数保存を使って、以下の崩壊や反応が禁止されていることを示せ。

(ア) $2\text{n} \rightarrow 2\text{p} + 2e^-$ (ニュートリノレス 2重ベータ崩壊)

(イ) $\nu_\mu + \text{p} \rightarrow \mu^+ + \text{n}$ (ニュートリノ・陽子散乱)

(ウ) $\text{K}^0 \rightarrow \mu^+ + e^-$ (K 中間子稀崩壊)

4.2 ニュートリノと C、P の破れ、V-A 型荷電カレント

弱い相互作用の中にはニュートリノを含む反応が珍しくない。しかし現在ニュートリノは左向きニュートリノと右巻き反ニュートリノしか観測されていない。このため、弱い相互作用においては

P 変換: 左巻きニュートリノ \leftrightarrow 右巻きニュートリノ

C 変換: 左巻きニュートリノ \leftrightarrow 左巻き反ニュートリノ

のため C 変換、P 変換が破れていることが容易に予想される(注 1: CP 変換はよい近似で成り立っているが、やはり破れていることがわかっている。注 2: ニュートリノが含まれていなくても、弱い相互作用では C 対称性、P 対称性は破れている。)

ここで、ニュートリノはヘリシティの状態で区別される。 $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ を定義すると、 γ^5 は他の γ 行列と反交換で $\gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0$ を満たす。超相対論的現象を議論するとき便利

なワイル表示では

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \beta \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。ここでニュートリノを例にとり、質量が無い ($E \gg m$) 粒子に対する Dirac 方程式は $H\varphi = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}\varphi$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} \text{ と 2 成分スピノール } \chi, \phi \text{ で表すと}$$

$E\chi = -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\chi$ となる。 $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}/|\vec{p}|$ は(2.8)式のヘリシティ演算子で χ はヘリシティ -1 の解 (左

巻き) について、 ϕ はヘリシティ +1 の解について成り立つ。ヘリシティ -1 と +1 の解を選ぶ演算子は

$$\frac{1-\gamma^5}{2}, \frac{1+\gamma^5}{2} \quad \text{---(4.1)}$$

とそれぞれ表せる。左巻きニュートリノは

$$\frac{1-\gamma^5}{2}\varphi = \begin{pmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ と選び出せる。}$$

また $\gamma^5\chi = -\chi$ 、 $\gamma^5\phi = +\phi$ は γ^5 の固有状態で、 γ^5 のことをカイラリティ(chirality)演算子という。相対論的極限ではカイラリティ演算子はヘリシティ演算子に等しい。

電荷を変える弱い相互作用では左巻きの正粒子 (もしくは右巻きの反粒子) が反応に寄与することが実験的にわかっており (C,P の破れ)、弱い相互作用での荷電カレントは

$$J^\mu = \bar{\varphi}_e \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \varphi_\nu \quad \text{---(4.2)}$$

と記述される。ここで、 $\bar{\varphi}_e \gamma^\mu \varphi_\nu$ はベクトル(vector)カレント、 $\bar{\varphi}_e \gamma^\mu \gamma^5 \varphi_\nu$ は軸性ベクトル

(Axial vector) カレントと呼ばれる (ベクトルは空間反転に対して符号が反転するが、軸性ベクトルは反転しない)。これにより、弱い相互作用のカレントは V-A 型と呼ばれる。

J^μ は空間反転 P に対して対称でない (注: 空間反転すると $J^\mu = -\bar{\varphi}_e \gamma^\mu \frac{1+\gamma^5}{2} \varphi_\nu$) となっ

てしまうので、弱い相互作用のカレントは P 変換対称性を破っている。

例: Wu の実験

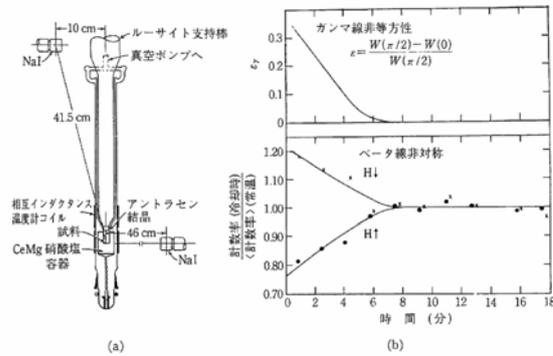


図 10.2 ウーラによるパリティ非保存発見の実験装置 (a) とデータ (b)⁹⁾
 β 崩壊の非対称性は ^{60}Co の $5^+ \rightarrow \text{Ni}(4^+)$ へベータ崩壊し、続いて $4^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$ へ γ 遷移をする。 γ の非等方性と β 崩壊の非対称の時間依存性が等しいことは、 β の非対称が存在しかつ偏極度に比例していることを示している。

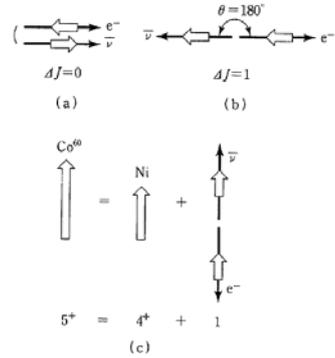


図 10.4 レプトンのカイラリティと $e^- \bar{\nu}$ 角相関、非対称の関係
 弱い相互作用のV-A型(カイラリティ負の粒子のみ相互作用をする)を認めるとベータ崩壊からの e^- と $\bar{\nu}$ のヘリシティはそれぞれ-と+に決まる。V型(フェルミ)遷移では $\Delta J=0$ であるので e^- と $\bar{\nu}$ は同方向になって角運動量保存則を守ろうとする。偏極した Co^{60} からの崩壊(A型、 $\Delta J=1$)では e^- と $\bar{\nu}$ は逆方向に出て $J=1$ をつくり、かつ e^- が Co の偏極方向と逆方向に出やすいから非対称度Aは負となる。

4.3 弱い相互作用の伝播関数とフェルミ相互作用

弱い相互作用が弱いのは、力を媒介する粒子(ゲージボソン)の質量が重いからである。質量を持つベクトル粒子の伝播関数は

$$\frac{i(-g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu / M^2)}{p^2 - M^2}$$

となる(QL-p145)。質量が重い場合、伝播関数は $\propto \frac{1}{M^2}$ の形となる。

実際フェルミは点相互作用で弱い相互作用の不変振幅を $M=GJ^\mu J_\mu$ と表式化した。ここでGはフェルミ定数とよばれ、電磁相互作用に比べ格段に小さい値をとる。これは $M=80\text{GeV}$ で 1GeV 付近のエネルギー反応を考えると $\frac{1}{M^2} \sim 0.0001$ より自明である。実際、弱い相互作用の結合定数をgとすると

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M^2} \quad \text{---(4.3)}$$

が成り立つ。

[HW]式(4.3)で $g=e$ 、 $G \cong 10^{-5}/m_N^2$ 、 $m_N=0.939.6\text{GeV}/c^2$ とすると、ゲージボソンの質量Mはいくらと求まるか? $g \sim e$ は電磁相互作用と弱い相互作用の統一を示唆する。

Gは質量の2乗の逆数の次元を持ち、その大きさは $G \cong 10^{-5}/m_N^2 \sim 10^{-5}\text{GeV}^{-2}$ 程度である。

また、この表式は反応のエネルギーがM程度になると成立せず、正確に計算する必要がある。係数を考慮して電荷を変える弱い相互作用の不変振幅は

[1]原子核のベータ崩壊

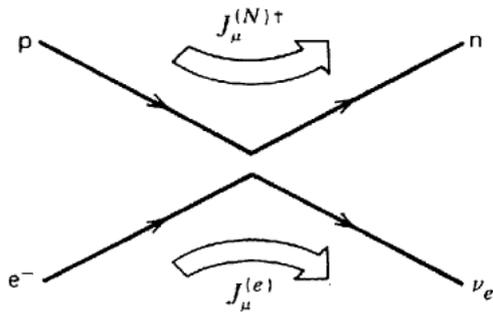


図 12・2 弱カレントを示す β 崩壊 $p \rightarrow n e^+ \nu_e$

$$M(p \rightarrow n e^+ \nu_e) = \frac{4G}{\sqrt{2}} J^\alpha J_\alpha^\dagger$$

$$J^\alpha = \bar{\varphi}_n \gamma^\alpha \frac{1-\gamma^5}{2} \varphi_p \quad \text{---(4.4)}$$

$$J_\alpha^\dagger = \bar{\varphi}_\nu \gamma_\alpha \frac{1-\gamma^5}{2} \varphi_e$$

と表せる。

原子核のベータ崩壊の微分断面積をニュートリノ質量ゼロとして求めると

$$\frac{d\Gamma}{dp_e} = \frac{G^2}{\pi^3} p_e^2 (E_{MAX} - E_e)^2 \quad \text{---(4.5)}$$

となる (E_{MAX} は電子の取り得る最高エネルギー)。 $\frac{1}{p_e} \sqrt{\frac{d\Gamma}{dp_e}}$ を E_e の関数としてプロットし

た図を Kurie プロットと言ひ、 E_{MAX} がニュートリノの質量に依存するので、ニュートリノ質量の測定に用いられる。また相対論的近似 ($p_e \sim E_e$) を使うと、崩壊幅 (全断面積) は

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{G^2}{30\pi^3} E_{MAX}^5 \quad \text{---(4.6)}$$

となる。

式(4.7)を実験と比較すると

$$G \sim 10^{-5} / m_N^2 \quad (m_N \text{ は核子質量}) \quad \text{---(4.7)}$$

が測定される。

[2] ミューオン崩壊

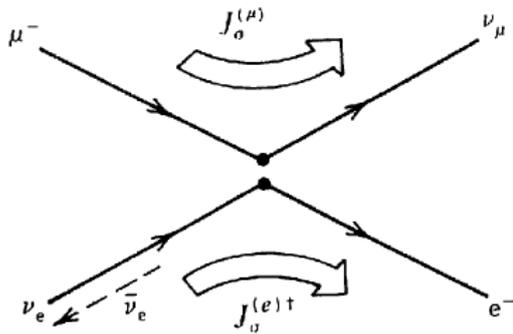


図 12-4 μ^- 崩壊 $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$

$$M(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{4G}{\sqrt{2}} J^\alpha J_\alpha^\dagger$$

$$J^\alpha = \bar{\varphi}_\nu \gamma^\alpha \frac{1-\gamma^5}{2} \varphi_\mu \quad \text{---(4.8)}$$

$$J_\alpha^\dagger = \bar{\varphi}_e \gamma_\alpha \frac{1-\gamma^5}{2} \varphi_e$$

ここでカレントは電荷を上げるカレント J^α と電荷を下げるカレント J_α^\dagger の積になっている。電荷を下げるカレントは電荷を上げるカレントのエルミート共役になっている。

μ 崩壊の微分断面積は

$$\frac{d\Gamma}{dE_e} = \frac{G^2}{12\pi^3} m_\mu^2 E_e^2 \left(3 - \frac{4E_e}{m_\mu}\right) \text{---(4.9)}$$

ここで、 E_e の最大値は $m/2$ である。崩壊幅（全断面積）は

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{G^2}{192\pi^3} m_\mu^5 \text{---(4.10)}$$

となる

実験からフェルミ定数 G を求めると

$$G_\mu = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

$$G_\beta = 1.136 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

とわずかに異なっていた。この違いはカビボ・小林・益川行列により説明がつく（4.7 章）。

[HW] 弱い相互作用においてベータ崩壊、 μ 粒子崩壊、 π 崩壊の崩壊幅(寿命の逆数)を計算すると常にフェルミ定数 (G) の二乗かけるエネルギーの 5 乗に比例している。この理由を次元の考察から説明せよ。

π 崩壊の崩壊幅（全断面積）は

$$\Gamma = \frac{G^2}{8\pi} f_\pi^2 m_\pi m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2 \quad (4.11)$$

となる。この場合非レプトン側のカレントは $u \rightarrow d + W$ である。(ここで f_π は π の崩壊定数と呼ばれ、弱い相互作用が自由クォークではなくて π 中間子内の束縛されたクォークにより引き起こされることに由来する。ここでは $f_\pi \sim m_\pi$ と仮定する)。

π 中間子の電子への崩壊と比較すると

$$\frac{\Gamma(\pi \rightarrow e\nu)}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu)} = \frac{m_e^2(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} = 1.284 \times 10^{-4}$$

となり、 π 中間子は主に電子に崩壊する。これは V-A 理論の特徴の現れである。

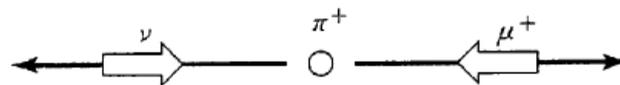


図 10.3 $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu$ の崩壊率が m_ν^2 に比例する

π^+ のスピンは 0 であり、ニュートリノはヘリシティが負であるから角運動量保存則によって μ^+ のヘリシティも負である。ところが V-A 相互作用では μ^+ の波動関数はヘリシティの負成分と、正成分の振幅比が m/E に比例するので崩壊率 $\simeq m^2/p^2$ となる。

[HW] 質量 140MeV の π 中間子の寿命は 2.6×10^{-8} sec である。質量 500MeV の荷電 K^+ 中間子も主崩壊モードが $K^+ \rightarrow \mu^+\nu$ であると仮定する。 K^+ の寿命を求めたい。

(ア) $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu$ 崩壊はクォークレベルでは $u\bar{d} \rightarrow \mu^+\nu$ 、 $K^+ \rightarrow \mu^+\nu$ 崩壊はクォークレベルでは $u\bar{s} \rightarrow \mu^+\nu$ である。カビボ角による K^+ 崩壊の抑制は

$$\frac{\Gamma(K \rightarrow \mu\nu)}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu)} \propto \frac{\sin^2 \theta_c}{\cos^2 \theta_c} = \tan^2 \theta_c \sim 0.05$$

となることを示せ (4.7 章参照)。

(イ) $f_K = m_K$ と仮定して、 π^+ の寿命から K^+ の寿命を求めよ。実際の荷電 K^+ 中間子の寿命は 1.2×10^{-8} sec である。

(ウ) $\frac{\Gamma(K \rightarrow e\nu)}{\Gamma(K \rightarrow \mu\nu)}$ を求めよ。この値が $\frac{\Gamma(\pi \rightarrow e\nu)}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu)}$ よりも小さくなっていることについて考察せよ。

4.4 ニュートリノ・電子散乱

弱い相互作用の媒介粒子には電荷を持つもの (W^\pm) と持たないもの (Z^0) の 2 種類が存在し、荷電カレント反応と中性カレント反応がある。特徴として

- 荷電カレント反応は純粋な V - A 構造を持つ。
- 中性カレント反応は V - A 優勢であるが、100%V - A 構造ではない。
- 荷電カレント反応は粒子のフレーバーを変えるものが存在する（ベータ崩壊。π 中間子崩壊）。
- 中性カレント反応はフレーバーを変えない。このため、4.3 節で説明した粒子の崩壊には中性カレントは関与していない。

ここでは電子ニュートリノと電子の荷電カレント散乱を考える。ファインマンダイアグラムは下図のように表せ、その振幅は

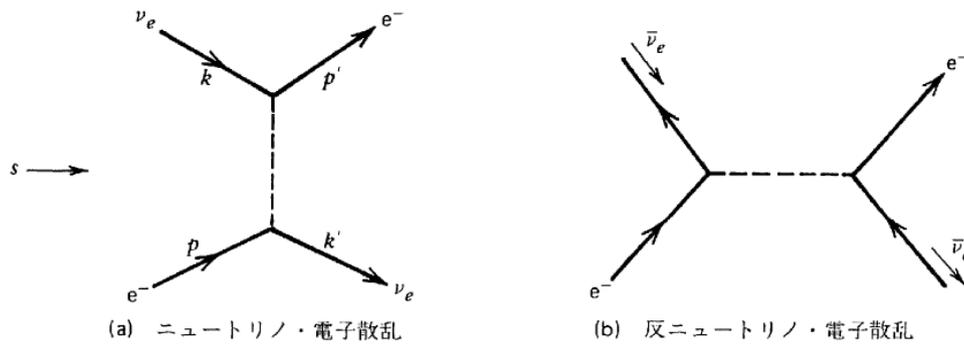


図 12・8 弾性散乱 $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$, $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-$ に対する荷電カレントの寄与

$$M(\nu_e e^- \rightarrow e^- \nu_e) = \frac{4G}{\sqrt{2}} J^\alpha J_\alpha^\dagger$$

$$J^\alpha = \bar{\varphi}_\nu \gamma^\alpha \frac{1-\gamma^5}{2} \varphi_e$$

$$J_\alpha^\dagger = \bar{\varphi}_e \gamma_\alpha \frac{1-\gamma^5}{2} \varphi_\nu$$

この計算を行うと最初の標的電子が止まっていて且つ電子質量を無視した場合

$$\frac{d\sigma(\nu_e e^- \rightarrow e^- \nu_e)}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{4\pi^2} = \frac{G^2 E_\nu^2}{4\pi^2} \quad (4.12)$$

となる。また全断面積は

$$\sigma(\nu_e e^- \rightarrow e^- \nu_e) = \frac{G^2 s}{\pi} \quad (4.13)$$

となる。

[HW] 反応断面積は式(4.13)にあるようにフェルミ定数 (G) の二乗かけるエネルギーの 2 乗に比例している。この理由も次元の考察から説明せよ。

反ニュートリノと電子の散乱は 2.3.7 節でやったように $s \leftrightarrow t$ 変数 (式 2.2.5、2.2.6) の置き

換えを行えばよい。式(4.12)より

$$\frac{d\sigma(\bar{\nu}_e e \rightarrow e \bar{\nu}_e)}{d\Omega} = \frac{G^2 t}{4\pi^2}$$

電子と電子の散乱各を θ とすると、標的電子が静止していたとして $t \approx -s/2(1-\cos\theta)$ なので

$$\frac{d\sigma(\bar{\nu}_e e \rightarrow e \bar{\nu}_e)}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{16\pi^2} (1-\cos\theta)^2 \text{-----(4.14)}$$

となる。よって反ニュートリノの散乱においては前方では反応が抑制されていることがわかる。

[HW] $t \approx -s/2(1-\cos\theta)$ を確かめよ (QL(4.45)式参照)。またヘリシティー保存から反ニュートリノ散乱で前方散乱が抑制されることを説明せよ。

式(4.14)を積分して全断面積を求めると

$$\sigma(\bar{\nu}_e e \rightarrow e \bar{\nu}_e) = \frac{G^2 s}{3\pi} = \frac{1}{3} \sigma(\nu_e e \rightarrow e \nu_e) \text{-----(4.15)}$$

が成り立つ。

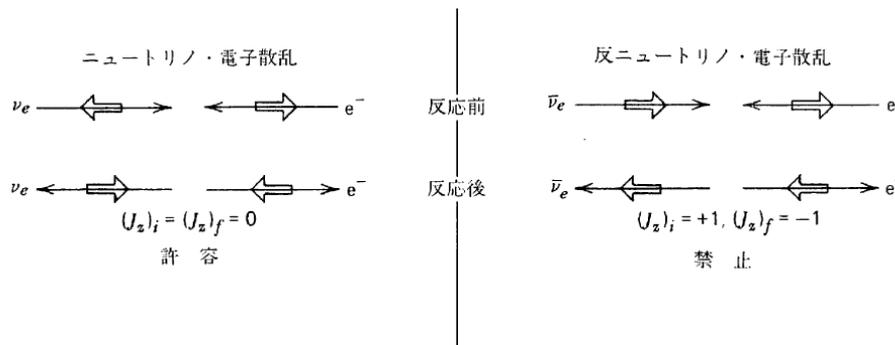
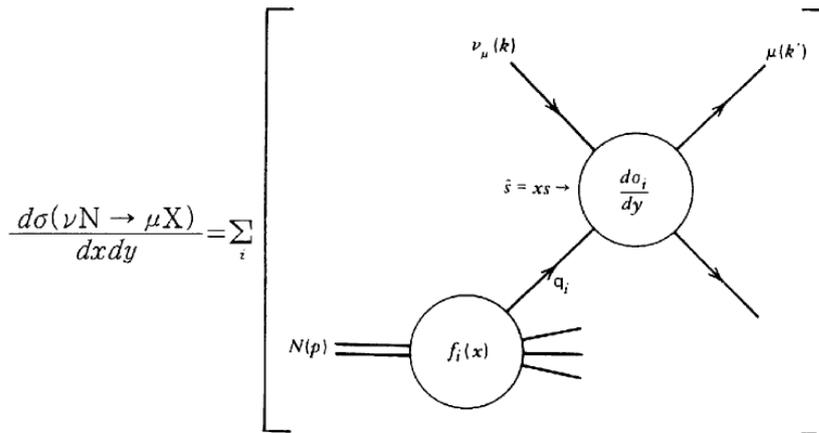


図12・10 重心系における後方散乱。長い矢印は粒子の運動量，短い矢印は粒子の質量を無視する極限でのヘリシティーを表す。z軸は入射ニュートリノの方向に与ってある。

4.5 ニュートリノ・クォーク散乱

ニュートリノ・クォーク散乱は陽子内のパートン分布を図る上で重要な役割を担ってきた。



クォークの荷電カレント反応断面積は

$$y \equiv \frac{p \cdot q}{M} = \frac{E - E'}{E} [Lab]$$

を用いると式(4.13)、(4.15)同様に

$$\frac{d\sigma(\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u)}{dy} = \frac{G^2 x s}{\pi} \quad \text{---(4.12)}$$

$$\frac{d\sigma(\bar{\nu}_\mu u \rightarrow \mu^+ d)}{dy} = \frac{G^2 x s}{\pi} (1-y)^2$$

注： $1-y \approx \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$ 。反ニュートリノ反応で生成される粒子が反粒子 μ^+ なので電子散

乱の場合と逆で前方散乱が優勢となっている。

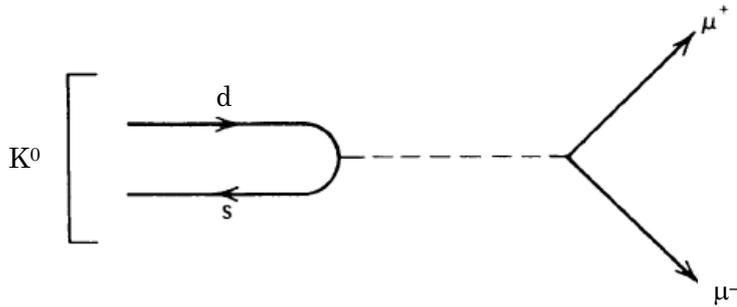
陽子・中性子が同数含まれている標的（アイソスカラー標的）においては、u クォークと d クォークが同数あるので全クォークに関して積分すると

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu u \rightarrow \mu^+ d) = \frac{1}{3} \sigma(\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u)$$

が成り立つ。実験では x,y に関する微分断面積を精密に測定し、パートンの分布関数の測定が多く行われた。

4.6 中性カレント

中性カレント反応はフレーバーを変えないので、 $K^0(sd) \rightarrow \mu\mu$ 崩壊等は禁止されている {図でも説明}。



よって、中性カレント反応は 1973 年まで発見されなかった。中性カレント反応の振幅を考える。

$$M(\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-) = \frac{4G}{\sqrt{2}} \rho J^{\alpha NC} J_{\alpha}^{NC}$$

$$J^{\alpha NC} = \bar{\varphi}_\nu \gamma^\alpha \frac{c_V - c_A \gamma^5}{2} \varphi_\nu = \bar{\varphi}_\nu \gamma^\alpha \frac{1/2 - 1/2 \gamma^5}{2} \varphi_\nu \text{ (ニュートリノの場合)} \quad \text{---(4.13)}$$

$$J_{\alpha}^{NC} = \bar{\varphi}_e \gamma_\alpha \frac{c_V - c_A \gamma^5}{2} \varphi_e$$

ここで ρ は荷電カレントと中性カレントの相対的な強さを記述するパラメータで現在の実験では 1 であり、標準模型で 1 を予言する。 c_V, c_A はベクトル (V) カレント、軸性ベクトル (Axial Vector) カレントの相対的強さを記述するパラメータである。標準理論では

フレーバー	c_A	c_V
ν	1/2	1/2
e, μ, τ	-1/2	-0.03
u, c, t	1/2	0.19
d, s, b	-1/2	-0.34

となる (5.2 章で説明)。よって軸性ベクトルカレントが優勢となっている。

実は電磁相互作用と弱い相互作用の統一で、質量ゼロのゲージボソンが光子、質量を持ったものが Z^0 となっているので、 Z^0 と光子はお互いに関係を持っている。

4.7 カビボ角と小林・益川行列、GIMメカニズム

フレーバーを変える荷電カレント反応がどう起こるか考える。この考えの基礎は荷電カレント反応の $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ (63%) 崩壊が頻繁に起こるのに対し、中性カレント反応 $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ ($K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ は 7×10^{-9}) 崩壊がほとんど起こらないことであった。ここでクォークの

2 重項 $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ を以下のように変更する。ここでフレーバーの固有状態と弱い相互作用の固有状態が異なっていると

とする。

弱い相互作用の固有状態を

$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}$ とし、 d, s と d', s' の間を

$$\begin{aligned} d' &= d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \\ s' &= -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c \end{aligned} \quad \text{もしくは} \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

と関係づける。フレーバーの固有状態と弱い相互作用の固有状態は回転行列で関係付けられ、ここで回転角 θ_c をカビボ角と言う。

この関係を用い、クォークの荷電カレント相互作用を記述するカレントは

$$J_\mu = (\bar{u} \quad \bar{c}) \frac{\gamma^\mu (1 - \gamma^5)}{2} U \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad U \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \quad \text{—————(4.14)}$$

と書ける。この関係から、ベータ崩壊 ($d \rightarrow ue\bar{\nu}$) のフェルミ定数 G_β が μ 崩壊のフェルミ定数 G_μ と異なっていたのは $G_\beta = G_\mu \cos \theta_c$ だったからである。実験から $\sin \theta_c \sim 0.22$ である。

このことから、例として $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ 崩壊は $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ 崩壊に比べて $|\sin \theta_c / \cos \theta_c|^2 = \tan^2 \theta_c$ 小さい

ことがわかる。また $c \rightarrow s u \bar{d}$ 崩壊は $c \rightarrow \bar{s} u d$ 崩壊に比べて $\tan^4 \theta_c$ 小さいことが予想される。

[HW] $c \rightarrow s u \bar{d}$ 崩壊は $c \rightarrow \bar{s} u d$ 崩壊に比べて $\tan^4 \theta_c$ 小さいことを示せ。

この U 行列を 3 世代のクォークを記述できるように 3 行 3 列に拡張したものが小林・益川行列である。小林益川行列は

$$\begin{aligned} U_{KM} &= \begin{pmatrix} U_{ud} & U_{us} & U_{ub} \\ U_{cd} & U_{cs} & U_{cb} \\ U_{td} & U_{ts} & U_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sim 0.97 & \sim 0.22 & \sim 0.003 \\ \sim 0.22 & \sim 0.97 & \sim 0.04 \\ 0.01 & 0.04 & \sim 1.0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書ける。ここで $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ 、 $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ である。

小林・益川行列は 3 つの角度 θ_{12} 、 θ_{13} 、 θ_{23} と一つの位相 δ で記述されている。

この複素位相 δ があることで、弱い相互作用では CP 対称性が破れている。