

2. 量子電磁力学

2.1 Klein-Gordon 方程式と反粒子

相対論的波動方程式を導こう。

$E^2=p^2+m^2$ の式を

$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$ の関係式を使って演算子に置き換えると

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = m^2 \phi \quad \text{--- (2.1)}$$

が得られる。これを Klein-Gordon 方程式（相対論的なシュレディンガー方程式）という。この方程式を満たす、エネルギー E 、運動量 \mathbf{p} の自由粒子の解は

$$\phi = Ne^{i\vec{p}\cdot\vec{x}-iEt} \quad \text{(2.2)}$$

である。エネルギー固有値は

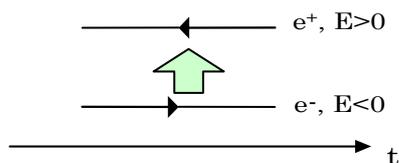
$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$$

となり、負エネルギーの解が表れた。負エネルギーの解、つまり負のエネルギーの粒子はどんどん低いエネルギー状態に遷移が可能であり、安定した状態を取ることはできない。この状態を歴史的にどう議論してきたかは興味あることである。

例； Dirac の空孔理論：Dirac 方程式に従う電子を例にとったとき、真空は全て負エネルギーの電子で満たされるとした。

この話題は、あとは教科書に譲ることにする。

式(2.2)で負エネルギーの粒子は、時間を逆向きにとれば正エネルギーの粒子の運動ととれる。つまり



と解釈しなおす。例えば、電子の流れ（電流を）考えると、負電子が右向きに流れていることは、正電子が左向きに流れていることになる。よって、負エネルギーの解は正エネルギーの反粒子として意味を持つことがわかる。同様に反粒子の運動量は $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ となる。ここで粒子→反粒子として、正エネルギーを定義できたので、粒子の安定性の問題は避けられた。また、相対論的方程式より、反粒子が存在する示唆が与えられた。

例：反粒子の解釈で以下のような散乱が可能になる。下図(b)においては真空から粒子が生成されたことになる。ここで、素粒子物理学の基礎概念として、1体問題から多数の粒子

が同時に存在する場合も扱わなければならないことがわかる。詳細は「場の理論」の授業に譲る。

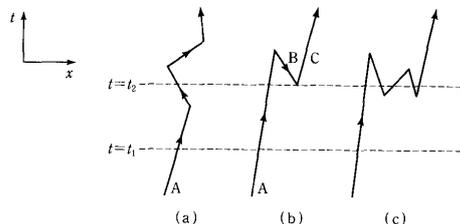


図 3.3 時間の逆行を許すと真空中に粒子・反粒子対が現れる
(a) 通常の散乱, (b) 時間逆行を許す場合, (c) $t=t_2$ で 5 個の粒子が存在する。

2.2 Dirac 方程式

歴史的には 2.1 の解釈の前に、Klein-Gordon 方程式に伴う負の確率（ここでは飛ばした）と負のエネルギーの問題を避けるために、Dirac は時間に対して一階の微分方程式を提案した。なぜなら連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0,$$

におおて、Klein-Gordon 方程式では時間の 1 階微分が初期条件によってしまうのでうれしくない（歴史的には確率密度に電荷 e を与え、電子の電荷電流密度として解釈しなおしてこの困難を避けた）。ただし、空間微分の回数を減らしたため、 ψ は多成分となる（例：長島さん教科書 p39）。

これは、例えば $\partial^2 q / \partial t^2 = -\omega^2 q$ のような簡単な 2 階微分方程式を考えてみればよい。 $q_1 = q, q_2 = \partial q / \partial t$ を導入することによって、 $\partial q_1 / \partial t = q_2, \partial q_2 / \partial t = -\omega^2 q_1$ の 2 個の連立 1 階微分方程式となる。次に行列の導入により一つの線形微分方程式にまとめられる。

$$\frac{d\phi}{dt} = H\phi, \quad \phi = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

一階の微分方程式は

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = E\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi \tag{2.3}$$

(注：ここで ψ は多成分 $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$ のような列ベクトルとする。成分は 2 とは限らない)

この式を Klein-Gordon 方程式と比較する。

$$E^2 = p^2 + m^2 = \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta m \right) \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \beta m \right)$$

この式を解くと

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$$

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = \alpha_i \beta + \beta \alpha_j = 0$$

の関係式が導かれる。この関係式を満たす行列をディラック行列と呼ぶ。

最低次元のディラック行列は4次元（長島教科書 p 40）であり、4つの行列は Dirac-Pauli 表現で

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \right) \quad (2.4)$$

で σ_i はパウリ行列で

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.4.1)$$

である。

式(2.3)に左から γ^0 をかけて、Dirac の 行列 $\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\vec{\alpha})$ を導入すると式(2.3)は

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (2.5)$$

と簡単にかける。この方程式は4つ（4連）の微分方程式である。

つまりディラック方程式には4つの解が存在することになる。

[HW] の4成分を別々にして、それぞれの成分 $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ が満たす方程式をあらわに書き出せ。

[HW] 行列の公式

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^0 \gamma^0 = I, \quad (\gamma^i)^2 = -I, \quad \gamma^k \gamma^l + \gamma^l \gamma^k = 0, \quad (\gamma^k)^2 = -I \text{ を示せ。}$$

またエルミート共役の結果は $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ と書けることも示せ。

Klein-Gordon 方程式のところで、粒子・反粒子二つの解が現れることを確認したが、Dirac 方程式では4つ（2倍）になった。この2倍は粒子のどのような状態に対応しているかこれから見ていく。

Dirac 方程式は基本的に2行2列のパウリ行列をもとにする4行4列の行列で表されているので、式(2.3)と式(2.4)をもとに ψ を2成分スピノール u, v を使って $\psi \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - iEt}$ とする

と、

$$E \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (E-m)u = \sigma \cdot p v \\ (E+m)v = \sigma \cdot p u \end{cases} \quad (2.6)$$

と表せる。

静止した粒子 ($p=0$) を考えると、 $E\mathbf{u}=m\mathbf{u}$, $E\mathbf{v}=-m\mathbf{v}$ となるので、 \mathbf{u} の状態が正のエネルギーをもつ粒子を、 \mathbf{v} の状態が負のエネルギーを持つ粒子 (つまり反粒子) を表していることがわかる。ここで \mathbf{u} , \mathbf{v} が 2次元の列ベクトルであることを思い出して、それぞれの状態が何に対応しているかを考える。賢明な学生ならパウリ行列がある時点で、 \mathbf{u} , \mathbf{v} の 2成分がスピンの関係しているだろうという推測ができると思う。

式(2.6)下に置いて、 φ_1, φ_2 の \mathbf{u} 成分がスピン関数 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$\varphi_1 = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - iEt}, \quad \varphi_2 = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - iEt} \quad (\text{注: } N \text{ は規格化定数) } \dots\dots(2.7)$$

と表せる。ここで、非相対論の場合を考えると、 $|E| \gg m$, $|\mathbf{p}| \ll |E|$, m なので正エネルギーの場合は $\mathbf{u} \gg \mathbf{v}$ である。

同様に式(2.6)上を用いて、 φ_3, φ_4 を求めることができる。

[HW] φ_3, φ_4 を求めよ。ここで \mathbf{v} は負エネルギー解より $E=-m$ の E は負エネルギーで、正エネルギー $E \rightarrow -|E|$ と変換すると $E \cdot m = -(|E| + m)$ と表せる。

よって 4つの解が得られたことになる。 φ_1, φ_2 は正エネルギーに、 φ_3, φ_4 は負エネルギーに対応する。

2.2.1 ヘリシティ

上記 (2.7) の式で、運動量 $\mathbf{p}=0$, $E=m$ の場合の波動関数は

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり、2次元のスピン演算子 $s = \boldsymbol{\sigma}/2$ を 4次元に拡張した

$$S = \Sigma/2, \Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \text{ の } \varphi_3 \text{ は上記波動関数を固有関数としてもっている (固有値は } \pm 1/2 \text{)}.$$

スピン角運動量はよく粒子の自転の角運動量に例えられるが、回転という概念は広がりを持った質量分布が必要である。スピン角運動量は広がりのない質点粒子でも相対論的取り扱いから必然的に出てくる量であり、座標や運動量といった変数を含まない。相対論的粒子に付随する一つの性質として受け入れるべきである。

相対論的取り扱いでは固定した z 軸の代わりに、自身の運動方向を z 軸にとった場合のス

ピンの z 成分 (ヘリシティ) がよく使われる。ヘリシティ h は

$$h = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} / |\mathbf{p}| \quad (2.8)$$

で定義され、 ± 1 の固有値を持つ。{注：ディラック方程式(2.6)で $m=0$ とすれば、ヘリシティがどのような量なのかわかりやすい。またよい保存量であることも一見できる。} ヘリシティ正は右方向に回転して進む右巻きねじに対応させる。このため、ヘリシティは正負の代わりに右巻き、左巻きという表現をよく使う。

[HW]4 成分ヘリシティ演算子がディラックハミルトニアンと交換することを示せ。よってヘリシティはエネルギーと独立な観測可能量であり系を記述するよい粒子数である。

(注) 軌道角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ とハミルトニアンとの交換関係は $[\mathbf{H}, \mathbf{L}] = -i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p})$ である (注：

は (2.4))。全角運動量 $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ は \mathbf{H} と可換であり、保存するよい量子数である。

またこのことは、ディラック方程式と角運動量の保存において、粒子のスピンが必要であることを示している。

[HW]参考として、長島教科書 p57~p61、もしくはクォークとレプトンの p121~123 を読んでみて下さい。理解できなくても、頭のすみに止めておくと、そのうちニュートリノの話が出てきたときに少し理解が深まるかもしれません。

2.2.2 Dirac 粒子の磁気能率

ディラック方程式に従う粒子と電磁場の相互作用を考える。シュレディンガー方程式の場合と同様に

$$E \rightarrow E - q\phi, \vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A} \quad \text{もしくは} \quad (p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu)$$

として電子の場合 ($q=-e$) から式 (2.6) より

$$\begin{aligned} (E + e\phi - m)u &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})v \\ (E + e\phi + m)v &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})u \end{aligned} \quad (2.9)$$

$E > 0$ の解

$$\varphi_1 = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt}$$

で非相対論的近似を行うと

$$v = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})}{2m} u$$

これを (2.9) 上式に代入すると ($E = m + T, T \ll m, e \ll m$ と仮定)

$$(T + e\phi)u = \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla + eA)][\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla + eA)]u}{2m}$$

ここでスピン演算子の性質 $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を使い、

$$\begin{aligned} (-i\nabla \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times -i\nabla)u &= -i[(\nabla \times \boldsymbol{A})u] + \boldsymbol{A} \times (\nabla u) = -i[(\nabla \times \boldsymbol{A})u + (\nabla u) \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla u)] \\ &= (-i\nabla \times \boldsymbol{A})u = -i\boldsymbol{B}u \end{aligned}$$

を使って式を整理する ($\langle \rangle$ は ∇ 演算子がこの $\langle \rangle$ の中にしか作用しないことを示す。) と

$$Tu = \left[-\frac{1}{2m}(-i\nabla + eA)^2 - e\phi + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} \right]u \quad (2.10)$$

となる。この式は電子と磁場の相互作用が含まれている。磁気能率 $\boldsymbol{\mu}$ と磁場 \boldsymbol{B} の相互作用

$(-\boldsymbol{\mu} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})$ を思い出すと、電子の磁気能率は

$$\vec{\boldsymbol{\mu}} = -\frac{e}{2m}\vec{\boldsymbol{\sigma}} = g\frac{q}{2m}\vec{\boldsymbol{s}}$$

と書け、 g を g 因子 (g factor) とよび $g=2$ である。

電子の磁気能率は g 因子 2 を持つ。 g 因子は通常非常に 2 に近く、Dirac 方程式の予言が実証されたことになる。実験では g 因子の 2 からの差 ($g-2$) を異常磁気能率と定義し測定している。陽子の磁気能率を測定すると $g=2.79$ となり、基本粒子でないことがわかる。また中性子も磁気能率 $g=-1.91$ をもち基本粒子でないことがわかる。中性子は電荷を持たないのに磁気能率を有している。これはまさに中性子に構造 (もしくは有限の大きさ) があることを示唆している。逆に電子、 μ 粒子の磁気能率はそれぞれ $g_e \sim g_\mu = 2.0023$ でほぼ 2 で基本粒子であることがわかる。2 からのわずかなずれは QED の高次効果による

2.2.3 保存カレント

Dirac 方程式のエルミート共役 (行列なので、複素共役ではない) をとると

$$-i\partial_\mu \varphi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - m\varphi^\dagger = -i\partial_0 \varphi^\dagger \gamma^{0\dagger} - i\partial_k \varphi^\dagger \gamma^{k\dagger} - m\varphi^\dagger = -i\partial_0 \varphi^\dagger \gamma^0 + i\partial_k \varphi^\dagger \gamma^k - m\varphi^\dagger = 0$$

ここで 行列のエルミート共役 $\gamma^{\mu\dagger}$ は 0 成分と 1-3 成分で変換性が異なる。共変型を保つた

めに $\bar{\varphi} \equiv \varphi^\dagger \gamma^0$ を定義し、常識の右から γ^0 をかけると

$$i\partial_\mu \bar{\varphi} \gamma^\mu + m\bar{\varphi} = 0 \quad (2.11)$$

が導ける。Dirac 方程式(2.5)と共変型 (2.11) を使って連続の方程式

$$\bar{\varphi} \gamma^\mu \partial_\mu \varphi + (\partial_\mu \bar{\varphi}) \gamma^\mu \varphi = \partial_\mu (\bar{\varphi} \gamma^\mu \varphi) = 0 \text{ が導ける。}$$

よって $\bar{\varphi}\gamma^\mu\varphi$ は連続の方程式 $\partial_\mu j^\mu = 0$ ($\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0$) を満たす j^μ (カレント) となっている。

[HW] $\rho \equiv j^0$ が確率密度 $\sum_{i=1}^4 |\varphi_i|^2$ となることを示せ。

2.2.4 反粒子状態(荷電共役変換)

荷電共役変換とは粒子と反粒子とを入れ替える演算である。粒子と反粒子の違いは電荷にある。荷電共役変換 ($\psi \rightarrow \psi^c$) を施した Dirac 方程式の波動関数 (ψ^c) はディラック行列を使って

$$\varphi^c = i\gamma^2\gamma^0\bar{\varphi}^T = i\gamma^2\varphi^*$$

と表せる

[HW] 上記を示せ。

2.3 相対論的反応断面積

2.3.1 電磁場 A^μ による Dirac 粒子の散乱

Dirac 方程式(2.5)に電磁場がある場合の方程式は $p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu$ として

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\varphi = q\gamma_\mu A^\mu\varphi = \gamma^0 V\varphi \quad (2.12)$$

この式を1次の摂動で取り扱う {注: $(\mathbf{E} + \dots) = \mathbf{V}$ の形で \mathbf{V} を定義}。摂動による状態の時間変化を考える場合、状態 i から状態 f への遷移振幅 S_{fi} は $V = q\gamma^0\gamma_\mu A^\mu$ と $q = -e$ (電子の場合) を用いて

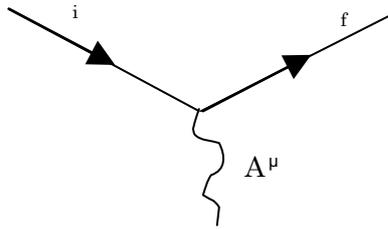
$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \int \varphi_f^\dagger(x) (-e)\gamma^0\gamma_\mu A^\mu(x)\varphi_i(x) d^4x \\ &= ie \int \bar{\varphi}_f(x)\gamma_\mu A^\mu(x)\varphi_i(x) d^4x \end{aligned}$$

2.23 節でやったように $\bar{\varphi}\gamma^\mu\varphi = 0$ は連続の方程式 $\partial_\mu j^\mu = 0$ を満たすカレントと考えられた

ので、 $j_\mu^{fi} = -e\bar{\varphi}\gamma_\mu\varphi$ をカレント(電流?)と定義すると

$$S_{fi} = -i \int j_\mu^{fi}(x) A^\mu(x) d^4x \quad (2.13)$$

と書ける。この反応を図式すると



となる。

2.3.2 カレントの表式

Dirac 方程式の時間発展する解は

$$\varphi = ue^{ip \cdot x}$$

と書けるので、入射粒子の 4 元運動量を p_i 、終状態の粒子の運動量を p_f とすると

$$j_\mu^{fi} = -e\bar{u}\gamma_\mu ue^{i(p_f - p_i) \cdot x} \quad (2.14)$$

とかける。ここで u は式(2.7)のように 4 次元のスピンオールである。

2.3.3 電磁場の A^μ の表式

電磁場 A^μ も通常荷電粒子によって生成されている。ここで電磁場 A^μ が電子によって生成されるとし、その電子の始状態の運動量を p_1 、終状態の粒子の運動量を p_2 とすると、そのカレントは

$$j_{21}^\mu = -e\bar{u}\gamma^\mu ue^{i(p_2 - p_1) \cdot x} \quad (2.15)$$

と表せる。このカレントが Maxwell 方程式を満たす条件より

$$\square A^\mu = j_{21}^\mu \quad (2.16)$$

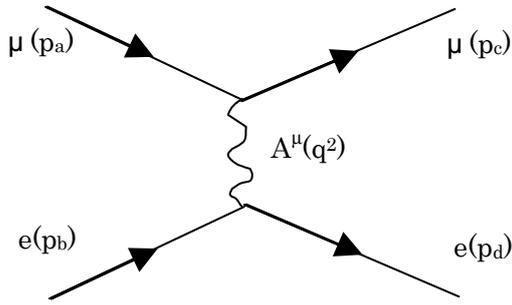
となる。式(2.15)を式(2.16)に代入し $q = (p_2 - p_1)$ とすると式(2.16)は

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_{21}^\mu \quad (2.17)$$

となる。

2.3.4 Dirac 粒子同士の散乱 - 1 (Trace 公式)

ここで全ての道具立てが揃ったので、Dirac 粒子同士の散乱を計算する。実際にはミューオンが入射して電子（標的）により散乱される過程を計算する。入射粒子と標的粒子が同じ（電子電子散乱）場合は、最終的に観測される電子が入射粒子だったのか、標的粒子だったのかを識別することが不可能になり、その分計算過程が増えるので、ここでは異種粒子同士の散乱を考える。散乱の様子をファインマンダイアグラムで表すと、



である。この反応の散乱振幅は式(2.13)、(2.14)、(2.17)より

$$\begin{aligned} S_{ca} &= -i \int j_{\mu}^{ca}(x) \left(-\frac{1}{q^2} \right) j_{ab}^{\mu} d^4x \\ &= -i (-e \bar{u}_c \gamma_{\mu} u_a) \left(-\frac{1}{q^2} \right) (-e \bar{u}_d \gamma^{\mu} u_b) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_c - p_d) \end{aligned}$$

となる。ここで 関数の意味は 4 元運動量移行の保存である。

$$\text{ここで } -e^2 (\bar{u}_c \gamma_{\mu} u_a) \left(\frac{1}{q^2} \right) (\bar{u}_d \gamma^{\mu} u_b) \text{ を不変振幅 } M \text{ と定義する。}$$

散乱断面積は散乱振幅の 2 乗より M^2 を計算する必要がある。ただし、 M は全スピン状態についての平均を取る必要があるので、 M^2 を再定義して

$$\begin{aligned} |M|^2 &= \frac{e^4}{q^4} \frac{1}{(2s_{\text{電子}} + 1)} \frac{1}{(2s_{\text{ミューオン}} + 1)} \sum_{\text{電子スピン}} \sum_{\text{ミューオンスピン}} [(\bar{u}_c \gamma_{\nu} u_a) (\bar{u}_d \gamma^{\nu} u_b)]^{\dagger} [(\bar{u}_c \gamma_{\mu} u_a) (\bar{u}_d \gamma^{\mu} u_b)] \\ &= \frac{e^4}{q^4} \left\{ \frac{1}{(2s_{\text{電子}} + 1)} \sum_{\text{電子スピン}} [\bar{u}_d \gamma^{\nu} u_b]^{\dagger} [\bar{u}_d \gamma^{\mu} u_b] \right\} \left\{ \frac{1}{(2s_{\text{ミューオン}} + 1)} \sum_{\text{ミューオンスピン}} [\bar{u}_c \gamma_{\nu} u_a]^{\dagger} [\bar{u}_c \gamma_{\mu} u_a] \right\} \\ &= \frac{e^4}{q^4} L_{\text{電子}}^{\nu\mu} L_{\text{ミューオン}}^{\mu\nu} \end{aligned}$$

となる。ここで $1/(2s+1)$ の因子は粒子の始状態のスピンがわからないので、全スピン状態について平均を取っており、 $\sum_{\text{スピン}}$ は終状態が全てのスピン状態を含むので和をとっている。

この $L_{\text{電子}}^{\nu\mu}$ を計算する必要がある。

ここでエルミート共役の括弧は

$$v=0 \text{ の場合 } [\bar{u}_d \gamma^0 u_b]^{\dagger} = [u_d^{\dagger} \gamma^0 u_b]^{\dagger} = [u_d^{\dagger} \gamma^0 \gamma^0 u_b]^{\dagger} = [u_b^{\dagger} \gamma^{0\dagger} \gamma^{0\dagger} u_d] = [u_b^{\dagger} \gamma^0 \gamma^0 u_d] = [\bar{u}_b \gamma^0 u_d]$$

$$v=i \text{ の場合 } [\bar{u}_d \gamma^i u_b]^{\dagger} = [u_d^{\dagger} \gamma^0 \gamma^i u_b]^{\dagger} = [-u_d^{\dagger} \gamma^i \gamma^0 u_b]^{\dagger} = [-u_b^{\dagger} \gamma^{0\dagger} \gamma^{i\dagger} u_d] = [u_b^{\dagger} \gamma^0 \gamma^i u_d] = [\bar{u}_b \gamma^i u_d]$$

となり、エルミート共役は単に粒子 \mathbf{b} と \mathbf{d} の順序を入れ替えただけである。各行列の成分をあらわに示すと

$$\begin{aligned} L_{\text{電子}}^{\nu\mu} &= \frac{1}{2} \sum_{\text{スピンの}} \sum_{i=1,4} \sum_{j=1,4} \sum_{k=1,4} \sum_{l=1,4} (\bar{u}_b^{(s)})_i (\gamma^\nu)_{ij} (u_d^{(s)})_j (\bar{u}_d^{(s)})_k (\gamma^\mu)_{kl} (u_b^{(s)})_l \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{スピンの}} \sum_{i=1,4} \sum_{j=1,4} \sum_{k=1,4} \sum_{l=1,4} (u_b^{(s)})_l (\bar{u}_b^{(s)})_i (\gamma^\nu)_{ij} (u_d^{(s)})_j (\bar{u}_d^{(s)})_k (\gamma^\mu)_{kl} \\ &\sum_{\text{スピンの}} u^{(s)} \bar{u}^{(s)} = \sum_{i=1,2} u_i \bar{u}_i = \mathbf{p} + m \text{ より} \end{aligned}$$

$$[\text{HW}] \sum_{i=1,2} u_i \bar{u}_i = \mathbf{p} + m, \quad \sum_{i=3,4} v_i \bar{v}_i = \mathbf{p} - m \text{ を示せ。}$$

$$\begin{aligned} L_{\text{電子}}^{\nu\mu} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1,4} \sum_{j=1,4} \sum_{k=1,4} \sum_{l=1,4} (\mathbf{p}_b + m)_{li} (\gamma^\nu)_{ij} (\mathbf{p}_d + m)_{jk} (\gamma^\mu)_{kl} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1,4} \{ (\mathbf{p}_b + m) (\gamma^\nu) (\mathbf{p}_d + m) (\gamma^\mu) \}_{ll} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} [(\mathbf{p}_b + m) (\gamma^\nu) (\mathbf{p}_d + m) (\gamma^\mu)] \end{aligned}$$

となる。

(付録) トレース定理と 行列の性質 (クォークとレプトン p130)

$$L_{\text{電子}}^{\nu\mu} = \frac{1}{2} \{ \text{Tr}(\mathbf{p}_b \gamma^\nu \mathbf{p}_d \gamma^\mu) + m \text{Tr}(\gamma^\nu \mathbf{p}_d \gamma^\mu) + m \text{Tr}(\mathbf{p}_b \gamma^\nu \gamma^\mu) + m^2 \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu) \}$$

ここで、 m の 1 次の項は奇数個の 行列を含んでいるので 0。

$$\text{Tr}(\mathbf{p}_b \gamma^\nu \mathbf{p}_d \gamma^\mu) = 4 \{ p_b^\nu p_d^\mu + p_b^\mu p_d^\nu - (\mathbf{p}_b \cdot \mathbf{p}_d) g^{\nu\mu} \}$$

$$\text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu) = 4 g^{\nu\mu}$$

$$L_{\text{電子}}^{\nu\mu} = 2 \{ p_b^\nu p_d^\mu + p_b^\mu p_d^\nu - (\mathbf{p}_b \cdot \mathbf{p}_d - m^2) g^{\nu\mu} \}$$

2.3.5 Dirac 粒子同士の散乱-2 (散乱断面積)

電子の質量を m_e ミューオンの質量を m_μ とすると、

$$\begin{aligned} |M|^2 &= \frac{e^4}{q^4} L_{\text{電子}}^{\nu\mu} L_{\text{ミューオン}}^{\tilde{\nu}\tilde{\mu}} \\ &= \frac{4e^4}{q^4} \{ p_b^\nu p_d^\mu + p_b^\mu p_d^\nu - (\mathbf{p}_b \cdot \mathbf{p}_d - m_e^2) g^{\nu\mu} \} \{ p_\nu^a p_\mu^c + p_\mu^a p_\nu^c - (\mathbf{p}^a \cdot \mathbf{p}^c - m_\mu^2) g_{\nu\mu} \} \quad (2.18) \\ &\approx \frac{8e^4}{(p^c - p^a)^4} \{ (\mathbf{p}_b \cdot \mathbf{p}^a)(\mathbf{p}_d \cdot \mathbf{p}^c) + (\mathbf{p}_b \cdot \mathbf{p}^c)(\mathbf{p}_d \cdot \mathbf{p}^a) \} \end{aligned}$$

ここで最後の式変形で、高エネルギー反応を扱うという仮定のもと、粒子の質量を無視した。

[HW] 意欲のある人は式(2.18)の $|M|^2$ を正確に書いたときに

$$|M|^2 = \frac{8e^4}{q^4} \{ (p_b \cdot p^a)(p_d \cdot p^c) + (p_b \cdot p^c)(p_d \cdot p^a) - m_e^2 p^c \cdot p^a - m_\mu^2 p_d \cdot p_b + 2m_e^2 m_\mu^2 \}$$

となることを示せ。

断面積は散乱振幅 S_{ca} の 2 乗を単位時間 T ・単位体積 V で割った量を基に

$$\text{断面積} = \frac{|S_{ca}|^2}{TV \cdot (\text{入射フラックス})} \cdot (\text{終状態の数})$$

と表せる。

微分断面積は、入射粒子のフラックスを F 、終状態の数を $dLips$ (ローレンツ不変な位相空間因子) として

$$d\sigma = \frac{|M|^2}{F} dLips \tag{2.19}$$

$$dLips = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_c + p_d - p_a - p_b) \frac{d^3 p_c}{(2\pi)^3 2E_c} \frac{d^3 p_d}{(2\pi)^3 2E_d}$$

として表せる。

(注) $|S_{ca}|^2$ で出てくるデルタ関数の 2 乗は

$$|(2\pi)^4 i \delta^{(4)}(p_i - p_f)|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) \left[\int e^{i(p_i - p_f)x} d^4 x \right] = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) \left[\int d^4 x \right] = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) VT$$

と計算される (長島教科書 p97)。

話を簡単にするために重心系 ($\vec{p}_a = -\vec{p}_b$) の場合を考える。この場合 $dLips$ は

$$dLips = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_c + p_d - p_a - p_b) \frac{d^3 p_c}{(2\pi)^3 2E_c} \frac{d^3 p_d}{(2\pi)^3 2E_d}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \frac{d^3 p_c}{2E_c} \frac{1}{2E_d} \delta(E_c + E_d - E_a - E_b)$$

重心系で $\sqrt{s} = E_a + E_b (= W)$ と定義すると $\sqrt{s} = E_c + E_d$ 、 $p_c = -p_d$ より

$$dLips = \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_c^2 dp_c d\Omega}{4E_c E_d} \delta(E_c + E_d - E_a - E_b)$$

$$W = E_c + E_d = (p_c^2 + m_c^2)^{1/2} + (p_d^2 + m_d^2)^{1/2}$$

$$dW = p_c dp_c \left(\frac{1}{E_c} + \frac{1}{E_d} \right)$$

を使って

$$dLips = \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_c d\Omega}{4\sqrt{s}} \quad (2.20)$$

となる。また

また、 F は粒子の速度を $v_a = |p_a|/E_a$ として、粒子 a, b が直線的に衝突するとして

$$F = |\vec{v}_a - \vec{v}_b| (2E_a)(2E_b) \quad (2.21)$$

と表せる{単位体積中に $2E$ 個の粒子があるように規格化}。

$$F = |\vec{v}_a - \vec{v}_b| (2E_a)(2E_b) = 4E_a E_b \left| \frac{p_a}{E_a} + \frac{p_b}{E_b} \right| = 4p_a \sqrt{s} \quad (2.22)$$

よって

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s} \frac{p_c}{p_a} |M|^2 \quad (2.23)$$

実験室系の場合は、 μ が静止している、つまり $p_a = (m_\mu \ 0 \ 0 \ 0)$ の状態である。

この場合は、電子の速度を光速と仮定して

$$F = |\vec{v}_b| (2E_a)(2E_b) = \left| \frac{\vec{p}_b}{E_b} \right| 4E_a E_b = 4m_\mu |\vec{p}_b|$$

$dLips = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\vec{p}_d|^2 d\Omega}{m_\mu |\vec{p}_b|}$ となる (クォークとレプトン p138-139。長島教科書 2 巻付録 C の

b 参照)。よって

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{LAB} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|\vec{p}_d|^2}{|\vec{p}_b|^2} \frac{1}{m_\mu^2} |M|^2 \quad (2.24)$$

となる。この式は電子と陽子の散乱の章で使う。

2.3.6 Dirac 粒子同士の散乱-3 (マンデルシュータム[Mandelstam]変数)

$a+b \rightarrow c+d$ 反応で、ローレンツ不変な変数であるマンデルシュータム変数を定義する

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2 \\ t &= (p_a - p_c)^2 \\ u &= (p_a - p_d)^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

ここで s は全エネルギーの 2 乗、 t は運動量移行 (伝播光子のエネルギー) の 2 乗に対応している。

[HW] $s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$ を示せ。

ここで式(2.24)の変数を使って式(2.18)を書き直す。粒子の質量が無視できる場合は

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2 \sim 2p_a \cdot p_b \\ &= (p_c + p_d)^2 \sim 2p_c \cdot p_d \\ t &= (p_a - p_c)^2 \sim -2p_a \cdot p_c \\ &= (p_b - p_d)^2 \sim -2p_b \cdot p_d \\ u &= (p_a - p_d)^2 \sim -2p_a \cdot p_d \\ &= (p_b - p_c)^2 \sim -2p_b \cdot p_c \end{aligned} \quad (2.26)$$

なので

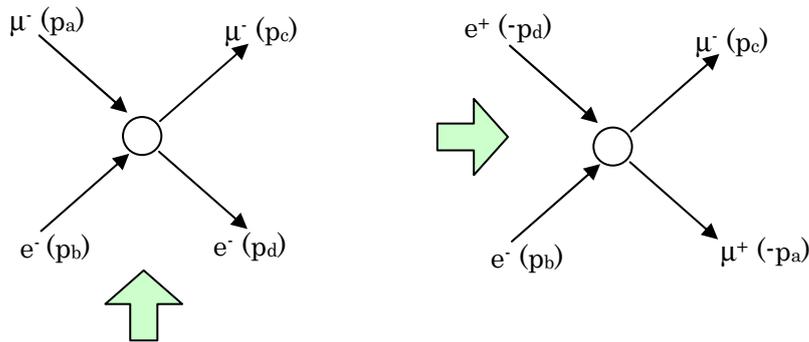
$$|M|^2 \approx \frac{2e^4}{t^2} (s^2 + u^2) \quad (2.27)$$

と表せる。

2.3.7 Dirac 粒子同士の散乱-4 ($e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 散乱断面積)

次に電子陽電子衝突実験で $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 反応の反応断面積を求める。

$e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+$ 散乱で右辺の e^- を左辺に移項し e^+ に ($p_a \rightarrow -p_d$)、左辺の μ^- を右辺に移項し μ^+ に ($p_d \rightarrow -p_a$) にする $\{a+b \rightarrow c+d \Rightarrow -d+b \rightarrow c-a\}$ になる。



[HW] $p_a \rightarrow -p_d$ の置き換えでマンデルシュタム変数 s と t が入れ代わることを示せ。
よって $s \leftrightarrow t$ の置き換えを(2.26)に行い

$$|M|^2 \approx \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2) \quad (2.28)$$

となる。

[HW](2.25)について重心系で粒子の質量が無視できる場合、

$$\begin{aligned} s &\sim 2p_a \cdot p_b = 4p_a^2 \\ t &\sim -2p_a \cdot p_c = -2p_a^2(1 - \cos\theta) \\ u &\sim -2p_a \cdot p_d = -2p_a^2(1 + \cos\theta) \end{aligned} \quad (2.29)$$

となることを示せ。ただし、 θ は重心系での散乱角である。

(2.23)、(2.28)、(2.29)を用いると

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s} \frac{p_c}{p_a} \frac{2e^4}{16p^4} 4p^4 \{ (1 - \cos\theta)^2 + (1 + \cos\theta)^2 \} \\ &= \frac{e^4}{64\pi^2} \frac{1}{s} (1 + \cos^2\theta) \\ &= \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2\theta) \end{aligned}$$

全断面積は $d\Omega \equiv 2\pi d(\cos\theta)$ について θ を 0 から π まで積分して (方向は1周積分して 2π が出た)

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (2.30)$$

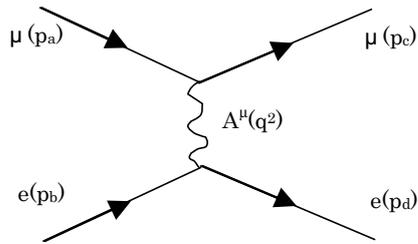
となる (1.4 節の例題参照)。

[HW] 現在日本の B ファクトリー実験は重心系エネルギー 10GeV で BB 中間子を大量生成し実験を行っている。 $\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-)$ は何 pb か? pb は $10^{-12} \times \text{b} (10^{-24}\text{cm}^2) = 10^{-36}\text{cm}^2$ である。また現在 B ファクトリーは $10^{34}\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ という高ルミノシティで実験を行って

いる。毎秒何個の $\mu^+\mu^-$ 対が生成されていることになるか？

2.3.8 不変振幅 M の計算に対するファインマン側

2.3.4 で見た不変振幅 M を基に、Feynman (ファインマン) によって発見されたファインマン側をまとめる。



をファインマンダイアグラムという。このダイアグラムに対応する不変振幅は

$$M = -e^2 (\bar{u}_c \gamma_\mu u_a) \left(\frac{1}{q^2} \right) (\bar{u}_d \gamma^\mu u_b)$$

と記述でき、この過程の断面積は(2.19)より、入射粒子のフラックス F と、位相空間因子

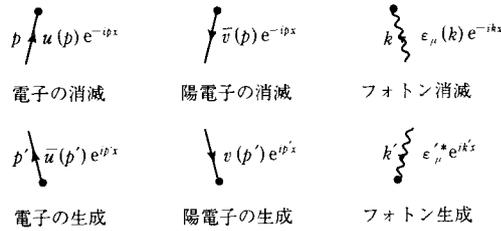
$dLips$ (終状態の状態数に対応する量) を使って $d\sigma = \frac{|M|^2}{F} dLips$ と記述できる。

反応断面積は、その反応過程に対応するファインマンダイアグラムを描き、次のルールを使うことで不変振幅 M がわかる。

表 6-2 $-i\mathcal{M}$ に対する Feynman 則

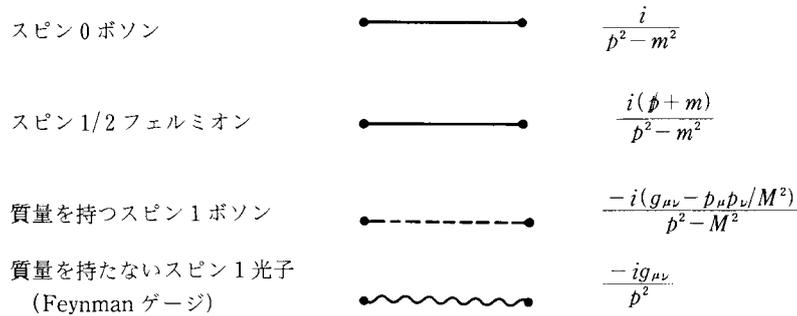
	対応する因子
● 外線	
スピン 0 ボソン (または反ボソン)	1
スピン 1/2 フェルミオン (入る, 出る)	u, \bar{u}
反フェルミオン (入る, 出る)	\bar{v}, v
スピン 1 光子 (入る, 出る)	$\epsilon_\mu, \epsilon_\mu^*$

外線

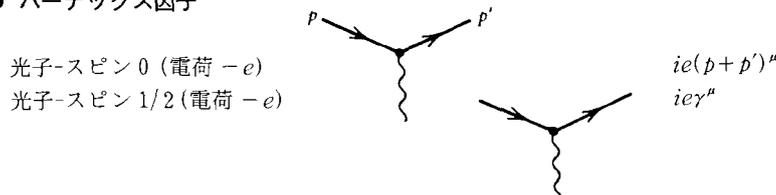


平面波を含めて、以下のように書いてもわかりやすい。

- 内線——伝播関数 (+ie 処方が必要)



- パーテックス因子



閉線：閉線の運動量につき積分 $\int d^4k / (2\pi)^4$ を行う。フェルミオンの閉線に対しては -1 をかけ、それに伴う γ 行列のトレースをとる。
 同種フェルミオン： $e^- \leftrightarrow e^-$ の入れかえ、または始状態 $e^- \leftrightarrow$ 終状態 e^- の入れかえを行ったグラフでは -1 をかける。

ここで 2.3.3 節の考察より、内線—伝播関数(Propagator)—は光子の満たす方程式のグリーン関数となっている。同様に内線が電子の場合は、伝播関数はディラック方程式

$(p - m)\varphi = -e\gamma^\mu A_\mu\varphi$ のグリーン関数で

$\frac{-1}{(p - m)} = -\frac{p + m}{p^2 - m^2}$ となる (注：実際には $-i$ がかかる。QL の p143)。

2.3.9 コンプトン散乱

例としてコンプトン散乱 ($\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$) の不変振幅 M は

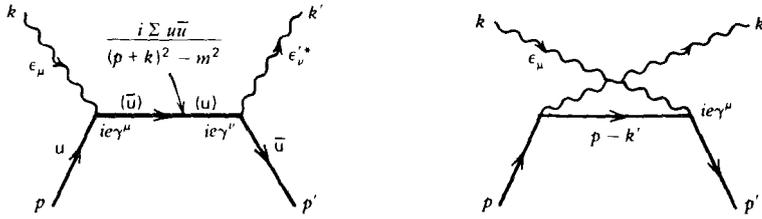


図 6.12 Compton 散乱 $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$ に対する Feynman 図

より

$$M_1 = \bar{u}(p') \epsilon_{\nu}^* (e\gamma^{\nu}) \frac{(p+k+m)}{(p+k)^2 - m^2} (e\gamma^{\mu}) \epsilon_{\mu} u(p)$$

$$M_2 = \bar{u}(p') \epsilon_{\mu} (e\gamma^{\mu}) \frac{(p-k+m)}{(p-k)^2 - m^2} (e\gamma^{\nu}) \epsilon_{\nu}^* u(p)$$

$$|M|^2 = |M_1 + M_2|^2$$

について電子のスピ平均した振幅を計算する必要がある (QL p149-151、長島教科書 p113 参照)。ここで ϵ は光子の偏極ベクトルで直線偏光の場合は独立な 2 つの偏極ベクトルとして $\bar{\epsilon}_1 = (1,0,0)$, $\bar{\epsilon}_2 = (0,1,0)$, と取れる。

これを元の実験室系での微分断面積をせつせと計算するとクライナー仁科の公式

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{実験室系}} = \frac{\alpha^2}{4m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 + 4(\bar{\epsilon} \cdot \bar{\epsilon}')^2 \right]$$

が導ける。ここで $k = (\omega, \mathbf{k})$, $k' = (\omega', \mathbf{k}')$ と置いている。

もし、もっと計算をしたい人は、教科書を見てコンプトン散乱の式を導き出してみなさい。