

π^+ 、 π^- の寿命測定による CPT 保存の確認

魚崎 直彦 田村 雅直 藤本 慎司

平成 13 年 3 月 7 日

目次

1	実験の目的	6
2	実験の方法および原理	6
2.1	Decay in Flight	6
2.2	セットアップへの思考	7
2.3	粒子の崩壊	8
2.3.1	崩壊モードと寿命	8
2.3.2	崩壊の角度	8
2.4	メイン検出器の選択	10
2.5	多重散乱 (Multiple Scattering)	10
2.6	寿命の測定方法	12
3	実験装置	13
3.1	全体像	13
3.2	検出器	13
3.2.1	Scintillation Fiber counter	13
3.2.2	TOF counter	16
3.2.3	DS counter	17
3.2.4	Finger counter	17
3.3	データ取得の Logic	18
3.3.1	Input Resister	18
3.3.2	Logic	18
3.4	なぜこのセットアップか?	20
4	Scintillation Fiber Counter を用いた解析	21
4.1	導入	21
4.2	TOF によるカット	22
4.3	SciFi1-2 hit	24
4.4	クロストークの除去	24
4.5	SciFi の位置の補正	25
4.6	イベントの選択 (N_0)	27
4.7	崩壊したか否かの判定	28
4.8	計数補正	28
4.8.1	efficiency の補正	28

4.8.2	multiple scattering の tail の補正	29
4.8.3	「偽」の崩壊イベント補正	30
4.8.4	崩壊していても崩壊していないと見えるイベントの 補正	32
4.9	π^+ および π^- の寿命	35
5	DS counter を使った解析	37
5.1	導入	37
5.2	イベントの選択	38
5.3	DS ヒット 総数	39
5.4	計数補正	40
5.4.1	multiple scattering の tail の補正	40
5.4.2	偽崩壊イベントの補正	42
5.4.3	SciFi3 にヒットした崩壊イベントの補正	42
5.5	結果	43
5.6	π^+ および π^- の寿命	43
6	考察	44
6.1	問題点および反省点	44
6.2	π^+ 、 π^- の寿命	45

図 目 次

1	崩壊角度 (CM 系、Lab 系)	9
2	実験のセットアップ (概要)	13
3	全体図	14
4	ファイバー	15
5	Scintillation Fiber counter	15
6	Multi Anode Photomultiplier Tube	15
7	Anode	15
8	TOF counter	16
9	DS counter	17
10	Finger counter	18
11	ロジック図	19
12	TOF(300MeV/c)	22
13	TOF(400MeV/c)	23

14	TOF(500MeV/c)	23
15	ビーム (2GeV/c) の分布	26
16	イベントの選択 (SciFi3)	27
17	「偽」崩壊イベント	30
18	崩壊が判断できない例 (Case 2)	33
19	各点での P_{in}	33
20	DS setup	37
21	軌道が中心軸上でない場合	38
22	軌道が中心軸上にある場合	38
23	probability	39
24	distribution function	41

表 目 次

1	散乱媒質 (この実験)	11
2	散乱角	12
3	崩壊の割合 (1m 走った場合)	20
4	粒子が TOF 間を走るのに要する時間	21
5	イベント数 (TOF triggered)	21
6	イベント数 (SciFi 1-2 hit)	24
7	イベント数 (cross talk 除去)	25
8	ビームの中心	25
9	選んだイベント数	27
10	生き残った粒子数 (補正前)	28
11	生き残った粒子数 (efficiency 補正後)	29
12	生き残った粒子数 N (efficiency および tail 補正後)	30
13	P_{false} の計算結果	32
14	P_{in}^{norm} の計算結果	34
15	最終的な π の parent(N_0) と daughter(N)	34
16	π^+ および π^- の寿命	35
17	SciFi による解析のまとめ 1 (π^+)	35
18	SciFi による解析のまとめ 2 (π^-)	36
19	DS ヒット数	40
20	偽崩壊イベントの補正	42
21	崩壊後 SF3 に入る確率	42

22	SciFi3 ヒットの補正	43
23	崩壊数	43
24	寿命	44

概要

我々は CPT 対称性が保存していることを検証するため、 π^+ および π^- を飛行させたまま (Decay in Flight) それらの寿命を測定することにした。高エネルギー加速器研究機構 (KEK) の陽子シンクロトロン (KEK-PS)、T1 ビームラインで実験を行った。検出器として Scintillation Fiber counter (SciFi) を用い、粒子の軌道を見ることで崩壊したか否かを調べ、寿命を測定した。

1 実験の目的

理論的詳細についてはイントロダクションに譲ることにするが、我々は CPT 対称性が保存しているか否かを検証するために、 π^+ および π^- の寿命を測定することにした。なぜならば π^+ と π^- は互いに粒子、反粒子の関係にあるので、CPT 対称性が保存しているならば、その寿命 (質量も) は同じであると予想されるからである。

2 実験の方法および原理

我々は高エネルギー加速器研究機構 (KEK) の陽子シンクロトロン (KEK-PS)、T1 ビームラインで π ビームを用いて実験を行った。以下では実験の方法と原理について述べる。

2.1 Decay in Flight

我々は π^+ および π^- の寿命を、粒子が飛行している状態 (Decay in Flight) で測定することにした。その理由をまず述べることにしよう。

粒子の寿命を測定する方法としては、Decay in Flight 以外にもいったん何らかの標的で粒子を止めるという方法もある。しかしこの方法では負電荷を持った粒子 (ここでは π^-) の寿命を測定することができない。なぜなら標的を構成している原子の原子核は正電荷を持っているので、 π^- は標的内で止まった後、電磁力で原子核に引き付けられて原子核に衝突し、反応を起こしてしまうからである。これでは、崩壊以外の過程で粒子の数が減ってしまい、正確な寿命を測定することができない。

このような理由から我々は Decay in Flight という方法をとることにした。

2.2 セットアップへの思考

本実験は π^+ と π^- の寿命を測定し比較する事が目的であるので、何をおいても粒子を崩壊させねばならない。そこで、基本的ではあるが崩壊の式を (1) に示す。

$$N = N_0 e^{-\frac{L}{c\beta\gamma\tau}} \quad (1)$$

N_0 : parent

N : daughter

τ : life

L : flight length (lab. system)

c : speed of light

v : speed of particle

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

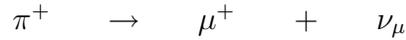
この式を見ても分かるように、粒子をより多く崩壊させるには実験室系での飛程 (L) を長く、そして粒子の運動量を小さくすると有利であることがわかる。

しかし、ここで粒子が空気中および測定器を通過することによる、避けられない運命 '多重散乱' という現象を我々は考えねばならない。この現象により我々は単純に飛程 (L) を長くとり、運動量を小さくすることができないばかりか、ひいては我々の測定結果の解釈を困難にする原因ともなる。この現象については (section 2.5 多重散乱) で述べることにして、次は主役である崩壊について記す。

2.3 粒子の崩壊

2.3.1 崩壊モードと寿命

π^+ (π^- の崩壊モードは π^+ のそのの+を-と入れ替えたものである。)の崩壊はほぼ100%で次の様式で起こる。



この過程の寿命は約26[nsec]である。

また μ^+ は(μ^+ 、 μ^- の崩壊モードについても同様の電荷記号の入れ替え)、



とほぼ100%で崩壊し、その寿命は約2.2[μsec]である。

この二つの寿命を比べても分かるように2桁以上 μ の方が寿命が長いので、本実験では μ は崩壊しないものとし、 π の崩壊のみを扱うものとする。

2.3.2 崩壊の角度

崩壊の角度について、当然のことだが重心系 (Center of mass system、以下CM系)と実験室系 (Laboratory system、以下Lab系)とでは崩壊角がちがう。以下では簡単にCM系とLab系との崩壊角の関連を書きたいと思う。

π 粒子はスピン0なので、CM系においてはその崩壊角は360度で等方的とみてよい。以下の式ではCM系の量についてはすべてゼロをつけるものとする。運動量をPで、エネルギーをEであらわすと、Lorentz変換で、

$$\begin{aligned} E_{\mu_0} &= \gamma(E_\mu - \beta P_\mu^x) \\ P_{\mu_0}^x &= \gamma(P_\mu^x - \beta E_\mu) \\ P_{\mu_0}^y &= P_\mu^y \end{aligned}$$

となる。ここで、上付きのxやyは単にx方向、y方向を示し、下付きは粒子の種類を示すものとする。また、

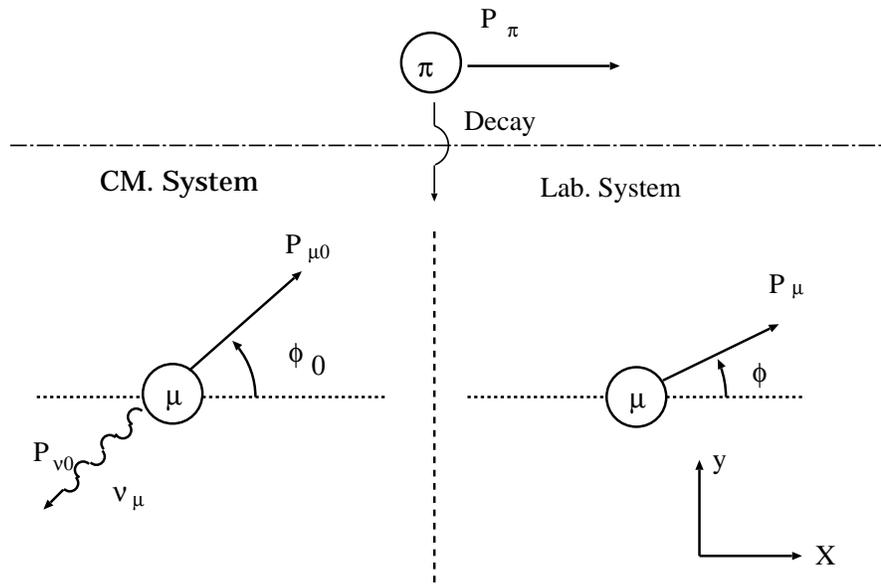


図 1: 崩壊角度 (CM 系、Lab 系)

(CM.system)

$$P_{\mu 0}^x = P_{\mu 0} \cos \phi_0$$

$$P_{\mu 0}^y = P_{\mu 0} \sin \phi_0$$

(Lab.system)

$$P_{\mu}^x = P_{\mu} \cos \phi$$

$$P_{\mu}^y = P_{\mu} \sin \phi$$

そして CM 系での保存則 (自然単位で)

(Momentum conservation law)

$$P_{\mu 0} = P_{\nu 0}$$

(Energy conservation law)

$$m_{\pi} = P_{\nu 0} + \sqrt{P_{\mu 0}^2 + m_{\mu}^2}$$

となる。これらより、

$$\begin{aligned}\tan\phi &= \frac{P_{\mu 0}\sin\phi_0}{\gamma(P_{\mu 0}\cos\phi_0 + \beta E_{\mu 0})} \\ &= \frac{(m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2)\sin\phi_0}{\gamma((m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2)\cos\phi_0 + \beta(m_{\pi}^2 + m_{\mu}^2))}\end{aligned}$$

(ここで m_{μ} は μ 粒子の質量、 m_{π} は π 粒子の質量である。) となり、CM 系と Lab 系との崩壊角の関係が得られた。

2.4 メイン検出器の選択

我々の主要な目的は粒子が崩壊したか、しなかったかを判断することである。崩壊した π が消滅してくれれば非常にうれしいわけだがそういう訳にはいかない。ではどうするか。

そこで我々は粒子の崩壊角に目をつけた。上で述べたように、実験室系において、粒子の運動量が 300[Mev/c] のときは最大約 12[mrad] の角度を持って崩壊する (我々の使ったビームは都合上 300[Mev/c] 以下にはできなかったため、以下最低運動量としてこれをつかう。)。粒子検出器はこの場合シンチレーターを使うわけだが、この崩壊角を識別するためにはふつうのシンチレーターでは役に立たない。そこで小さなシンチレーター、SciFi を使うことにした。SciFi は後で詳しく述べるが、簡単に言うと直径 0.7[mm] のファイバーを束ねたもので、ミリ単位の軌道識別が可能なものである。

2.5 多重散乱 (Multiple Scattering)

この実験において、測定領域中では粒子の運動量を著しく奪う媒質はない (細いファイバーと空気)。そのため散乱は衝突前と衝突後で粒子がエネルギーを失っていない、すなわち弾性散乱だと見て良い。

また粒子は測定領域中の物質により散乱を受ける。それは粒子が物質中を通過するとき、物質中の原子核のクーロンポテンシャルによるものである。この散乱は当然ながらクーロン力の遠隔性により一回ではすまない。一般に粒子は多数回の微小角散乱を受け、その角度の分布は中心極限定理によりだいたいガウス分布になる。ここで「だいたい」といったのは大角度で散乱される一回散乱という現象があるためである。この

一回散乱により散乱角度の分布は厳密にはガウス分布にならない。この現象については「補正」のセクションで述べることにして、ここでは微小角散乱による多重散乱について考察することにし、この現象をどのように我々の実験に適用したかを述べる。

まず散乱角度として、ガウス分布の根自乗平均 (Root Mean Square, 以下 RMS) いわゆる分散を求める式、

$$\theta_0 = \frac{13.6 \text{MeV}}{\beta c p} z \sqrt{\frac{x}{X_0}} [1 + 0.038 \ln(\frac{x}{X_0})] (= \sigma) \quad (2)$$

(about the incident particles)

p : momentum

βc : velocity

z : charge number

(about matter)

x : medium thickness [cm]

X_0 : radiation length

また、複数の媒質があるときには、分散の自乗の和則を用いて (共分散はゼロ)

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots$$

として得られる。我々の実験では、表 1 のような物質を用いた。

表 1: 散乱媒質 (この実験)

Medium	Radiation length [cm]	Total thickness [cm]
Fiber	42.4	0.261
Aluminum sheet	8.9	0.0105
Black sheet	47.9	0.08
Air	30420	97.0

その結果を各運動量について、また参考のため最大崩壊角とともに表 2 にのせておく。

表 2: 散乱角

Momentum [MeV/c]	Scattering (one σ) [mrad]	Max.decay [mrad]
300	3.96	126
400	2.85	94.4
500	2.23	75.6
2000	0.539	18.9

2.6 寿命の測定方法

次に実際にどのようにして寿命を測定するのか、について述べる。

基本的なコンセプトとしては、粒子の軌道を特定することで崩壊したか否かを見ることにする。実験装置の詳細については次章で述べるので詳しくは触れないが、我々の実験のセットアップは図 2 のようになっている。

ここで SciFi というのは Scintillation Fiber counter の略である。ここでは粒子の当たった位置を知ることのできる検出器であると考えてもらって良い。実線が粒子のとった軌道であり、 \times 印が粒子の当たった位置である。

この図でビームは右から来るのだが、SciFi1 と SciFi2 で粒子の軌道を特定することができる。この粒子がそのまま直進すれば破線のような軌道をとるのであるが、地点 A で崩壊すればその軌道を外れてしまう。このことから粒子が崩壊したかどうかを見ることができる。

そして SciFi2 での π の数 (N_0) を求め、そのうちで崩壊せずに生き残って SciFi3 に到達した π の数 (N) を求めれば、 π の寿命 τ を粒子の崩壊の式 (eq. 1) から求めることができる。

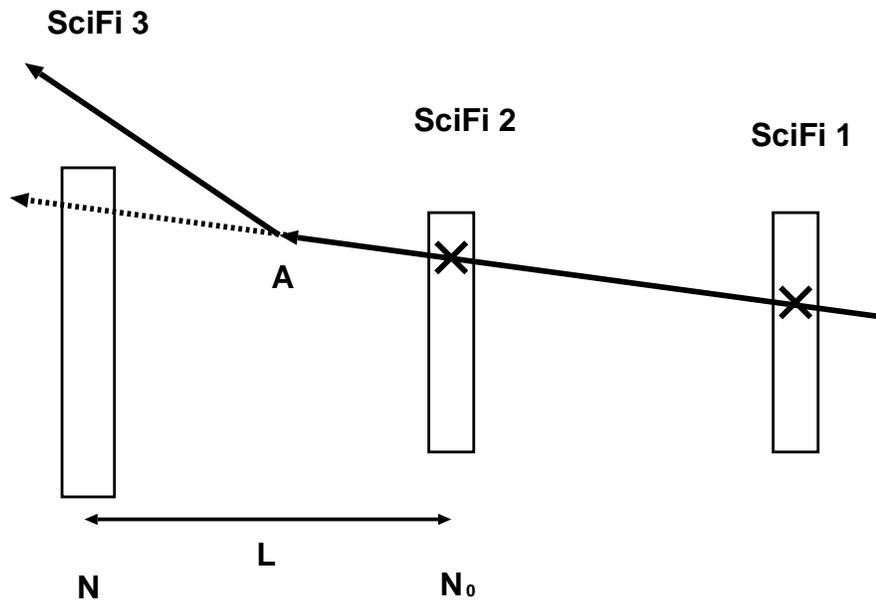


図 2: 実験のセットアップ (概要)

3 実験装置

3.1 全体像

我々の実験装置の全体図を図 3 に記す。

3.2 検出器

次にそれぞれの検出器について個別に述べる。

3.2.1 Scintillation Fiber counter

まず我々の実験におけるメインの検出器である、Scintillation Fiber counter について説明する。

我々が検出器として用いた Scintillation Fiber は直径が 0.7mm の円柱状である。これを図 4 のように並べる。SciFi1 および SciFi2 では図のよ

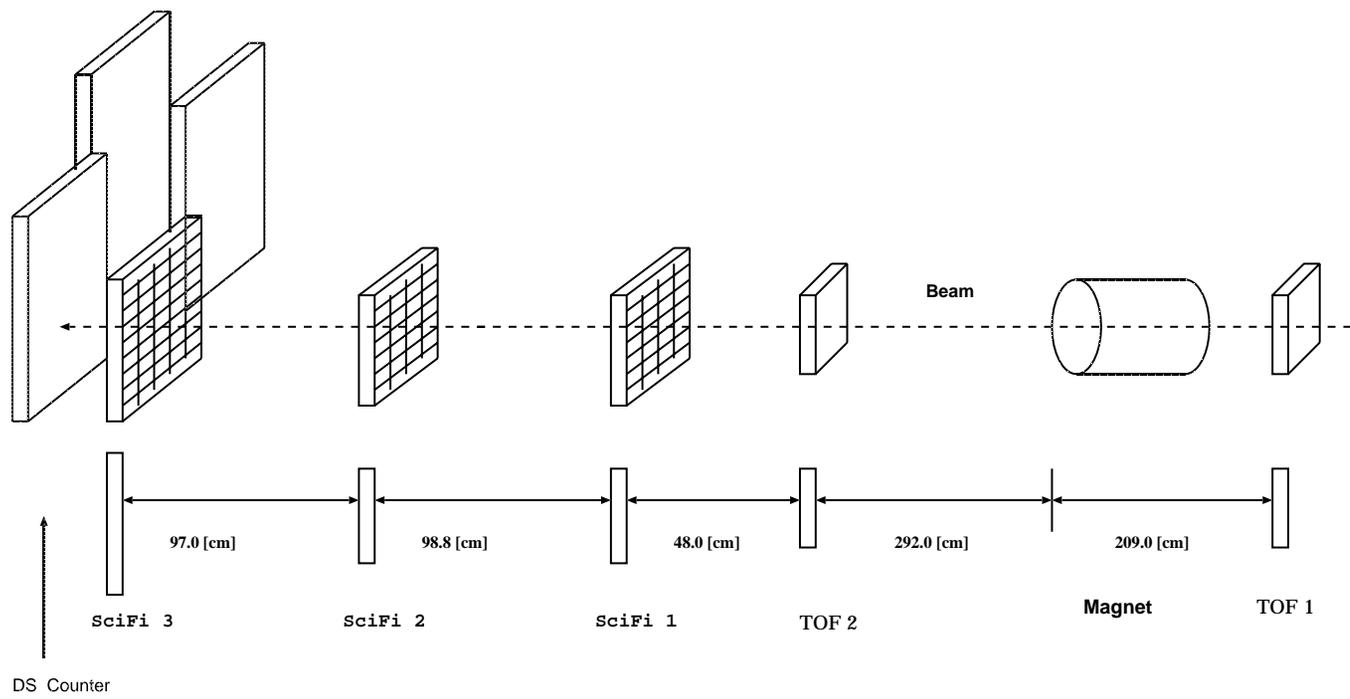


图 3: 全体图

うにファイバー 4 本 (2.8mm) で 1channel とし、SciFi3 ではファイバー 6 本 (4.2mm) で 1channel とする。このファイバーを縦横 8channel ずつ並べたものが Scintillation Fiber counter(以下 SciFi と略す) である。これを図 5 に示す。

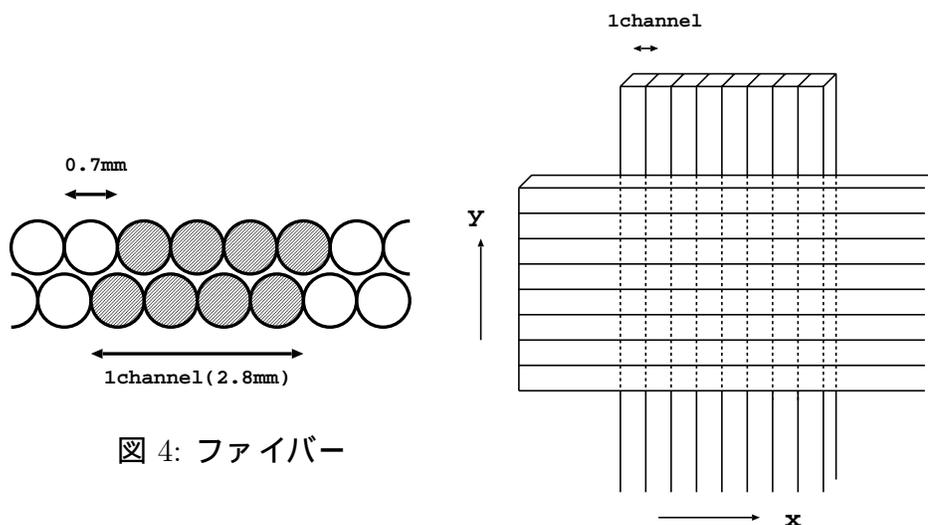


図 4: ファイバー

図 5: Scintillation Fiber counter

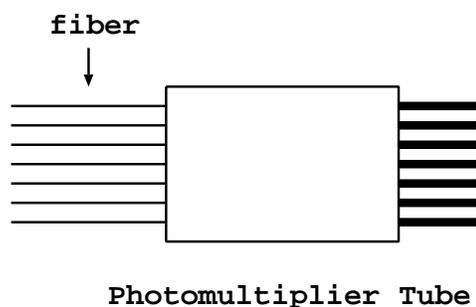


図 6: Multi Anode Photomultiplier Tube

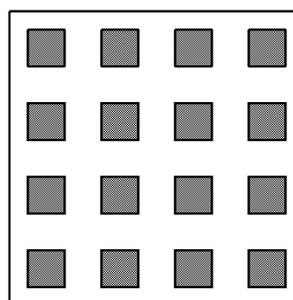


図 7: Anode

SciFi の 16channel の output は Multi Anode Photomultiplier Tube につながっている。Multi Anode Photomultiplier Tube は図 6 のようなもので、16channel 分の Anode を持っていて、Anode は図 7 のようになっている。Anode に入ったシンチレーション光による光子が光電効果によって電子を生じ、その電子を光電子増倍管で増幅することによって電気信号

を得ることができる。この信号を用いて SciFi のどの部分に粒子が当たったか、という情報を知ることができる。

この Scintillation Fiber counter をビーム上流から順に SciFi1、SciFi2、SciFi3 と名付ける。

3.2.2 TOF counter

次に TOF counter について述べよう。TOF とは Time of Flight(飛行時間法)の略であり、TOF counter とは粒子がある地点から別の地点まで飛行するのにどれだけ時間がかかったかを知ることができる検出器である。

この実験では2つの Plastic Scintillation counter を用いた。TOF counter は厚さ 1cm、横 11cm、縦 5cm の Plastic Scintillator で両側に光電子増倍管がついている (図 8)。この TOF counter を2つ使い、それらの output を TDC(Time to Digital Converter)に入力してデータを集めれば2つの counter に粒子の当たった時間を知ることができる。その差をとれば2つの counter 間の距離を粒子が飛行するのにどれだけ時間がかかったかという情報が得られる。

TOF を用いれば質量の異なる粒子の識別を行うことができる。質量の異なる粒子が同じ運動量を持っていれば当然速度が異なるからである。

TOF counter をビーム上流から順に TOF1、TOF2 と名付ける。また両側につけた光電子増倍管についてはビーム上流から見て左(L)、右(R)とする。

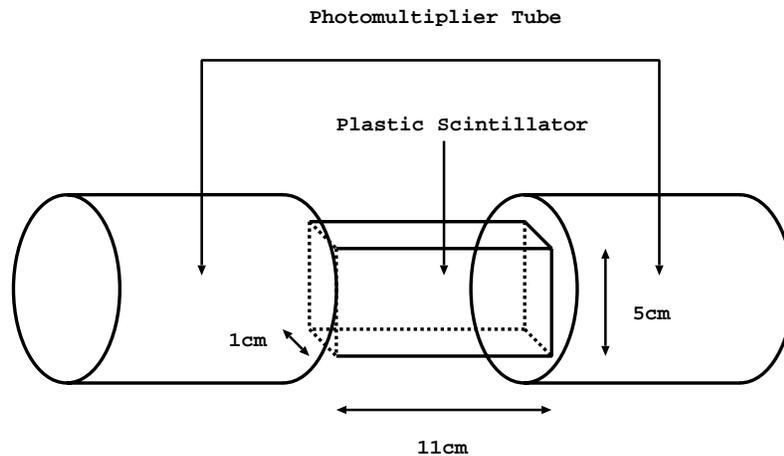


図 8: TOF counter

3.2.3 DS counter

DS counter について説明する。DS counter は Distribution Scintillation counter の略であり、厚さ 1cm、横 35cm、縦 31cm の Plastic Scintillator である。DS counter を図 9 に記す。

この counter を SciFi3 の後ろに 3 枚設置し、崩壊して外に出ていった粒子を検出する。DS counter が SciFi3 の後方全体を覆っているのが理想であるが、SciFi を置く台が邪魔だったためセットアップの都合上 SciFi3 の後方の上半分のみを覆っている。

3 枚の DS counter をビーム上流から見て、左側、中央、右側にあるものを順に DS(L)、DS(C)、DS(R) と名付ける。

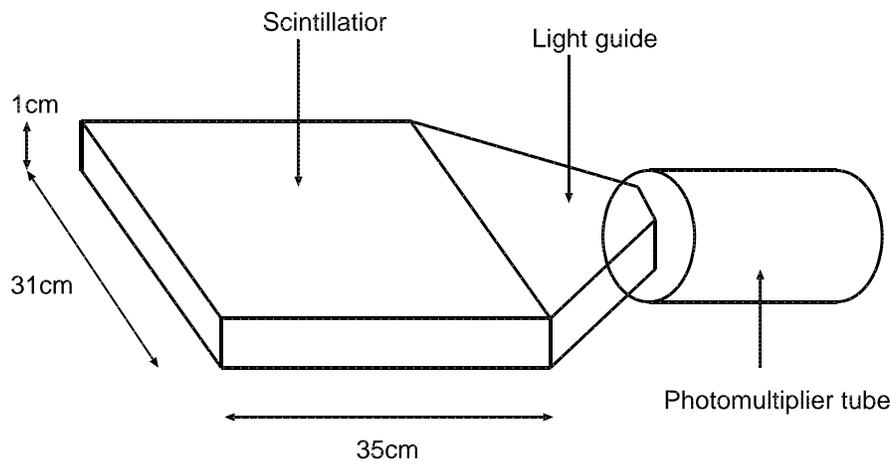


図 9: DS counter

3.2.4 Finger counter

Finger counter は厚さが 0.5cm、横幅 1cm、長さ 2cm の Plastic Scintillator である。これを図 10 に示す。

この Finger counter は SciFi1 および SciFi3 のすぐ前方に接触するように設置してある。Finger counter は後の解析において SciFi の efficiency を求める際に用いられる。

SciFi1 の前に設置した Finger counter を Finger1、SciFi3 の前に設置した Finger counter を Finger2 と名付ける。

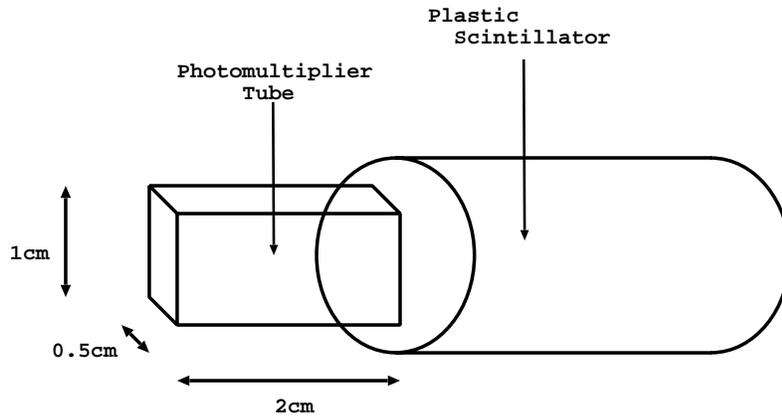


図 10: Finger counter

3.3 データ取得の Logic

個別の検出器についての説明が終わったので、次はデータ取得のロジックについて述べる。ロジック図を図 11 に示す。

3.3.1 Input Resister

ロジック図にある Input Resister について説明する。Input Resister には Gate In と 16channel の Input がある。Gate 信号が入っている間に、あるチャンネルに信号が入ると 1 を立て (鳴ったという情報が得られる)、信号が入らなければ 0 を立てる (鳴らなかったという情報が得られる)。つまり 1 イベントごとに 16 桁の 2 進数が得られるわけである (この 2 進数の 1 桁ずつが SciFi の channel に対応している)。

3.3.2 Logic

まず第一に TOF1 の L、R および TOF2 の L、R の 4 つの信号の coincidence が取られている。この coincidence 信号が TDC の start および Input Resister の Gate In に入力されている。TOF1 の L、R と TOF2 の L、R、Finger1、Finger2 および DS(L)、DS(C)、DS(R) は TDC の Input に入力され、時間情報を得ることができる。SciFi1、SciFi2、SciFi3 はそれぞれ 16channel の Input Resister に入力されている。

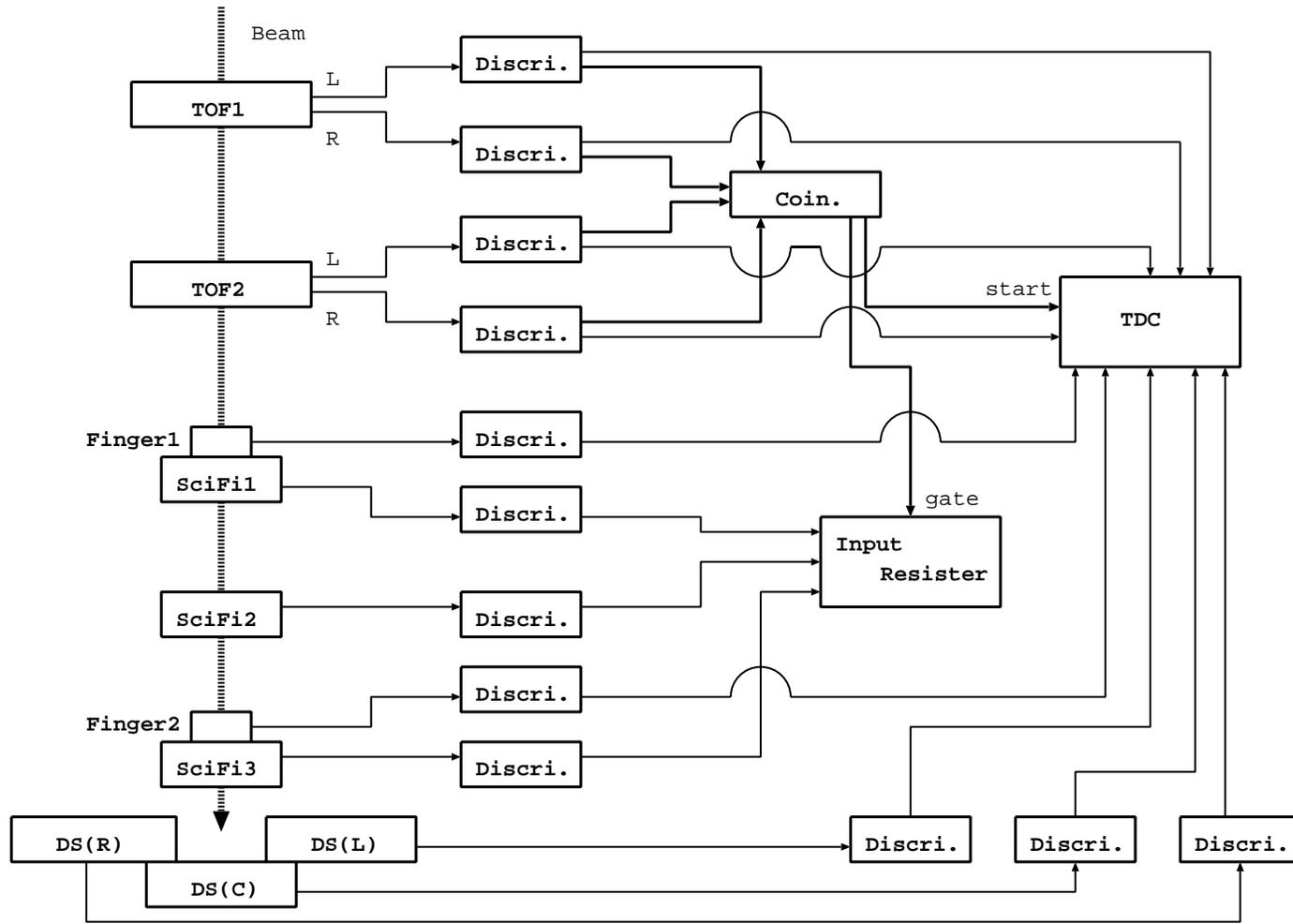


図 11: ロジック

3.4 なぜこのセットアップか？

実験装置についての説明が終わったところで、なぜこのセットアップにしたのかということの説明しよう。

セットアップは用いる π ビームの運動量とも関係している。section 2.2(セットアップへの思考)でも述べたように、運動量が小さいほど粒子は多く崩壊する。だが逆に section 2.5(多重散乱)で述べたように運動量が小さいほど multiple scattering による散乱角は大きくなる。また、崩壊を見る区間の距離については、距離が長いほど崩壊する粒子数は多くなるが、同時に通過する空気の層が長くなるので散乱角も大きくなる。

このように π の運動量、崩壊を見る区間の距離には相反する問題が存在する。ここで一般的に知られている π の寿命 26[nsec]を用いて、 π が1m 走った場合にどれだけ崩壊するかとどれだけ散乱されるかを 300[MeV/c]、400[MeV/c]、500[MeV/c]、2[GeV/c]の各運動量で実際に計算してみよう。その結果が表 3 である。

表 3: 崩壊の割合 (1m 走った場合)

momentum[MeV/c]	崩壊の割合	散乱角 (RMS)[mrad]
300	5.79%	3.96
400	4.37%	2.85
500	3.51%	2.23
2000	0.89%	0.54

SciFi2-SciFi3 間の距離は multiple scattering による散乱を小さくするため短くとりたかったのだが、現場での設置の関係上 1m 以上近づけることができなかつたため、0.97m とした。

さらに運動量の決定にはもう一つの要素が存在する。我々は TOF counter を用いて粒子識別を行おうと考えているのだが、同じ距離を走るのにかかる時間は当然運動量が大きいほど短い。我々のセットアップでは2つの TOF counter 間の距離は 5.01[m] である。この距離を陽子、 π 、 μ 、電子がどれだけ時間がかかるかを 300[MeV/c]、400[MeV/c]、500[MeV/c]、2[GeV/c]の各運動量で実際に計算したのが表 4 である。(ただし陽子、 π 、 μ 、電子の質量はそれぞれ 938.27[MeV/c]、139.57[MeV/c]、105.66[MeV/c]、0.511[MeV/c] という一般的に知られている値を用いた。)

表 4: 粒子が TOF 間を走るのに要する時間

momentum[MeV/c]	陽子 [nsec]	π [nsec]	μ [nsec]	電子 [nsec]
300	54.87	18.43	17.72	16.71
400	42.61	17.69	17.28	16.71
500	35.53	17.35	17.08	16.71
2000	18.45	16.75	16.73	16.71

これから分かるように π と μ の識別というのは質量が近いいため難しい。これらの理由から我々は 300[MeV/c] でメインの測定を行うことにした。補助として 400MeV/c、500MeV/c でも測定を行った。また崩壊を見るという目的とは別に SciFi の位置の補正等の目的で 2[GeV/c] でもデータをとった。

4 Scintillaton Fiber Counter を用いた解析

4.1 導入

このセクションでは Scintillaton Fiber Counter(SciFi) を用いた解析について述べる。我々は π^+ および π^- についてそれぞれ 300[MeV/c]、400[MeV/c]、500[MeV/c]、2[GeV/c] の各運動量でデータをとった。trigger を TOF counter でかけたイベント数を以下の表 5 に記す。また以下で行うイベントの選択の結果は表 17、18 にまとめてある。

表 5: イベント数 (TOF triggered)

momentum[MeV/c]	π^+	π^-
300	150000	80000
400	100000	50000
500	100000	50000
200	50000	50000

4.2 TOFによるカット

さて次に TOF によるカットを行う。 π^+ の 300[MeV/c] での TOF のデータを図 12 に示す。

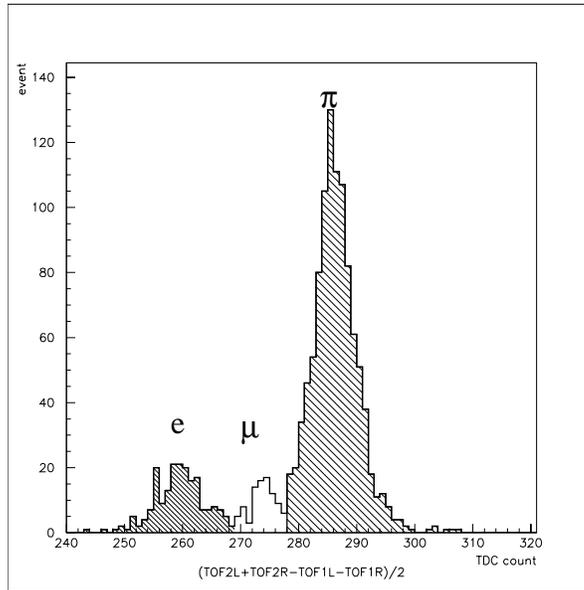


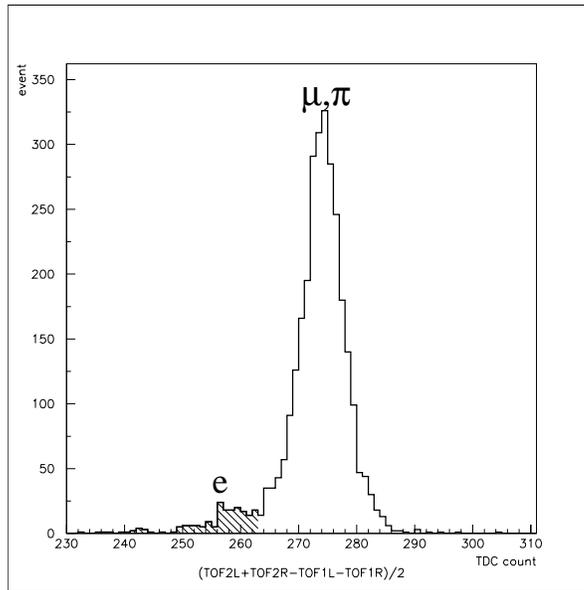
図 12: TOF(300MeV/c)

これは TOF1 の L、R の平均と TOF2 の L、R の平均の差をとったものである。横軸は TDC count で、縦軸はイベント数である。3 つのピークは左から順に e^+ 、 μ^+ 、 π^+ に相当する。

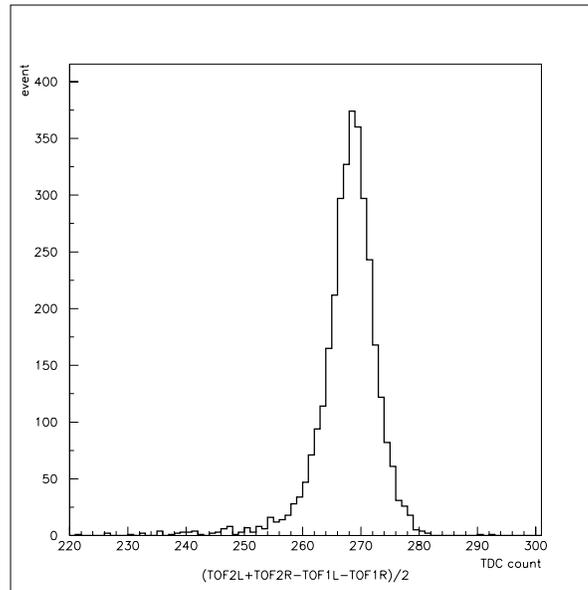
このデータから π^+ のみを選びだすため、TDC count が 280~310 の範囲にあるもののみを選んだ。300[MeV/c] の π^- についても同様のカットを行った。しかし、section 3.4 でも述べたように 400[MeV/c]、500[MeV/c] では π と μ を識別することは困難である。実際に π^+ 、400[MeV/c] での TOF のデータを図 13 に示す。

このように π と μ を識別することはできないが、 e^+ を除くために TDC count が 265~310 の範囲のみを選んだ。

さらに π^+ 、500[MeV/c] では図 14 のようになり、 e^+ を識別するのも難しくなる。



☒ 13: TOF(400MeV/c)



☒ 14: TOF(500MeV/c)

4.3 SciFi1-2 hit

次にイベントの選択について述べる。我々は SciFi1 および SciFi2 を用いて粒子の軌道を特定するので、粒子が SciFi1 と SciFi2 に当たっていないといけない。そのようなイベントを選び出すと、以下の表 6 のようになる。

表 6: イベント数 (SciFi 1-2 hit)

momentum[MeV/c]	π^+	π^-
300	5159	2836
400	4466	2607
500	5523	3573
2000	13875	10832

4.4 クロストークの除去

クロストークの除去について述べる前に、クロストークについて説明する。実験装置のセクションでも述べたように、SciFi は縦横 8channel ずつの Fiber が組み合わせてある。この 16 本の Fiber は Multi Anode Photomultiplier Tube に接続されている。この Multi Anode Photomultiplier Tube の Anode は section 3.2 検出器の図 7 のようになっているのであるが、本来信号の行くべき電極の隣の電極が光子を拾ってしまうことがある。これがクロストークである。その結果として、複数の channel に粒子が当たっているように見えてしまう。これでは粒子の軌道を特定することができない。したがって、この様なクロストークを起こしているイベントは除くことにした。クロストークを起こしているイベントを除去すると、イベント数は以下の表 7 の様になる。

表 7: イベント数 (cross talk 除去)

momentum[MeV/c]	π^+	π^-
300	1475	632
400	1412	886
500	1736	1474
2000	5556	4594

4.5 SciFi の位置の補正

次に SciFi の位置の補正に移る。3 つの SciFi がちょうど一直線上に並んでいるのが理想的ではあるが、実際にはそのようにはなっていない。したがって SciFi の位置をデータ上で補正しなければならない。そのために 2GeV/c のビームのデータを用いることにした。なぜならば 2[GeV/c] の運動量では π はほとんど崩壊せず、また運動量が大きい方が multiple scattering による影響も小さいので、ビームがほぼ直進すると考えて良いからである。2[GeV/c] のビームで粒子が SciFi のどの点に当たっているかをヒストグラムで表したのが図 15 である。もっとも粒子が多く当たっている channel をビームの中心であると考え、SciFi の位置の補正を行った。

2GeV/c のビームであわせた中心を表 8 に記した。

表 8: ビームの中心

	x	y
SciFi1	2	5
SciFi2	2	2
SciFi3	3	3

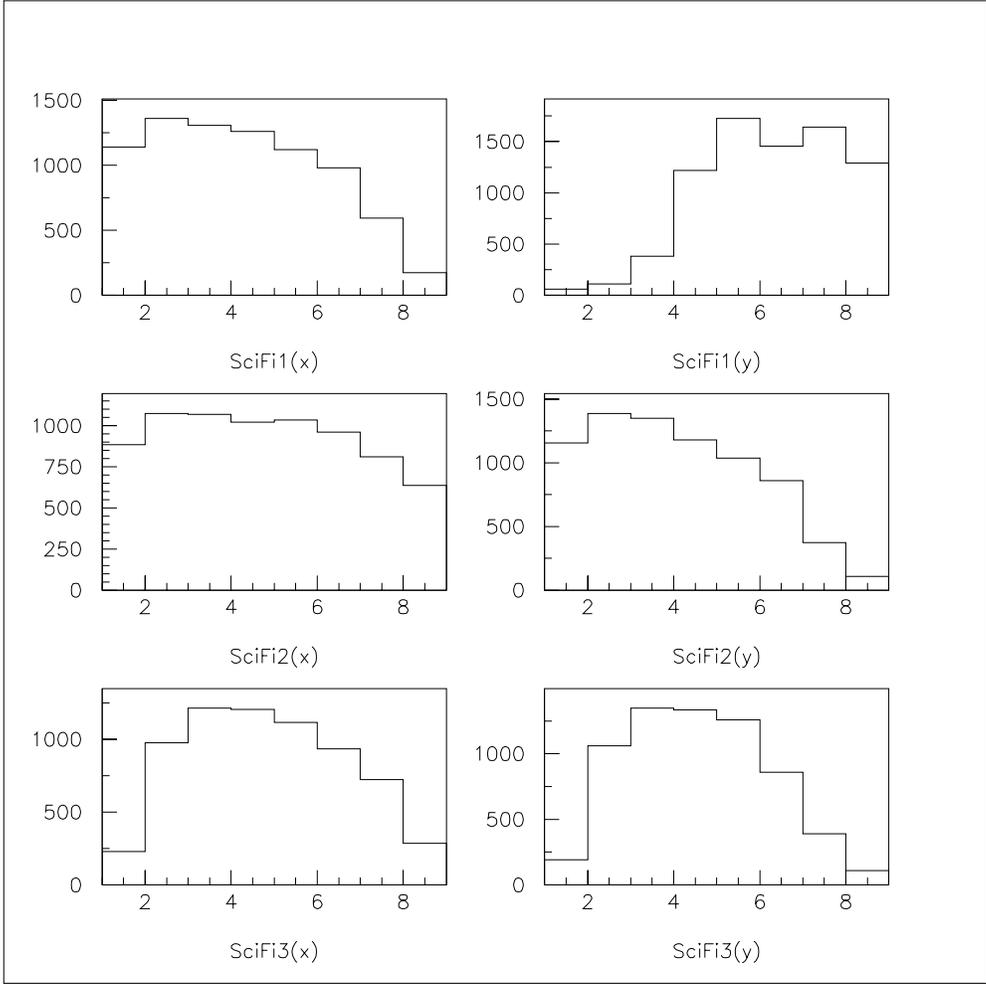


図 15: ビーム (2GeV/c) の分布

4.6 イベントの選択 (N_0)

さて次に崩壊したかどうかを確認するもとの π (つまり親の π) をどのように選ぶかについて述べる。我々は SciFi1 と SciFi2 に当たった位置から予想される軌道から外れる粒子を崩壊したとみなすので、そのまま直進しても SciFi3 に当たらないようなものは除かなければならない。そのため SciFi3 の中心 4×4 channel (図 16 の斜線部分) に当たると予想されるもののみを選ぶことにした。

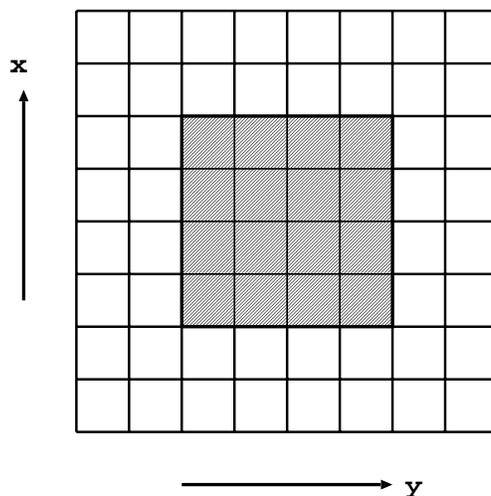


図 16: イベントの選択 (SciFi3)

このようにして選んだイベント数を表 9 に記す。このイベント数が親の π の数 (N_0) である。

表 9: 選んだイベント数

momentum[MeV/c]	π^+	π^-
300	418	196
400	462	311
500	695	599

4.7 崩壊したか否かの判定

では粒子が崩壊したかどうかの判定に移る。我々が数えるのは生き残った π の数 N である。単純に考えると、SciFi1 と SciFi2 から予想される粒子の位置と実際の SciFi3 に当たった位置が一致すれば、その π は崩壊しなかったと見て良い。しかし実際には section 2.5 多重散乱で述べたように粒子は飛行する際の媒質によって散乱されるため、崩壊しなくても予想された位置からずれてしまう。したがって上のように単純に考えるわけには行かない。

表 3 でも記したように、SciFi2-SciFi3 間で multiple scattering によって、300MeV/c で 3.96 [mrad]、400MeV/c で 2.85 [mrad]、500MeV/c で 2.23 [mrad] だけ散乱される (いずれも RMS)。これは SciFi3 での channel に直すとそれぞれ、0.914channel、0.658channel、0.516channel に相当する。

予想された位置から 2σ の範囲に入ったものを生き残ったと見なし、その数から multiple scattering の tail の補正を行おうと考えたのだが、我々は channel 単位でしかものを見ることができない。そこで、300[MeV/c] では 2channel(およそ 2σ)、400[MeV/c] では 2channel(およそ 3σ)、500[MeV/c] では 2channel(およそ 4σ) の範囲に入ったものを生き残ったと見なすことにした。

このようにして生き残った粒子の数を数えたのが表 10 である。

表 10: 生き残った粒子数 (補正前)

momentum[MeV/c]	π^+	π^-
300	314	141
400	387	258
500	616	528

4.8 計数補正

4.8.1 efficiency の補正

しかし上で求めた数をそのまま生き残った粒子数であると考えられるわけにはいかず、幾つかの補正を加えなければならない。まず考えるのは SciFi

の efficiency の補正である。SciFi に粒子が入った場合、100% の確率で鳴るわけではない。粒子が入射しても入ってないと見なしてしまうことがある (inefficiency)。その分だけ粒子の当たった数を少なく見積もっているわけである。SciFi の efficiency を求めるために Finger counter を用いる。Finger2 と SciFi3 は密着しているので、Finger2 を通った粒子は必ず SciFi3 を通ると考える。efficiency を求めるには Finger2 の hit 数と、Finger2 に粒子が当たっていることを要求したときの SciFi3 の hit 数の比をとれば良い。実際に運動量 300[MeV/c] の場合、

$$\text{efficiency} = \frac{\text{SciFi3 の hit 数}}{\text{Finger2 の hit 数}} = \frac{1726}{1758} = 0.982 \quad (3)$$

となる。上で求めた数に SciFi の efficiency の補正を加えると表 11 のようになる。

表 11: 生き残った粒子数 (efficiency 補正後)

momentum[MeV/c]	π^+	π^-
300	320	144
400	394	263
500	627	538

4.8.2 multiple scattering の tail の補正

次に行うのは multiple scattering の tail についての補正である。生き残った粒子数を数えた際に multiple scattering の 2σ (あるいは 3 、 4σ) の範囲に入ったものを選んだのだが、それ以上に散乱されるものも存在する。崩壊しなかったにも関わらず、 2σ (あるいは 3 、 4σ) の範囲に入らなかったものは当然崩壊したと見なしてしまう。その補正を行わなければならない。

multiple scattering による散乱角と確率の関係はほぼガウス分布になる。正確には大角度でラザフォード散乱のようになり tail が伸びるのだが、その影響は小さいのでここでは無視する。multiple scattering によって散乱されたものが 2σ の範囲にはいる確率は x 方向のみで考えると 95% である。(y 方向も同様)したがって平面で考えると 2σ の範囲にはいる確

率は 90.3% になる。3 σ にはいる確率は x 方向のみで考えると 99.7% で、平面で考えると 99.4% になる。4 σ では平面で考えて 99.99% が範囲にはいるので、100% と考えた。この補正を加えると生き残った粒子数 N は表 12 のようになる。

表 12: 生き残った粒子数 N (efficiency および tail 補正後)

momentum [MeV/c]	π^+	π^-
300	354	159
400	396	264
500	627	538

4.8.3 「偽」の崩壊イベント補正

本実験では SciFi 1 と SciFi 2 との間で粒子の軌道をトラックして、そのトラックした軌道による SciFi 3 予想ポイントへのヒットの有無を見るわけだが、SciFi 1-2 間でのトラックが本物である保証はない。どういうことかということ図 17 を参照して頂きたい。

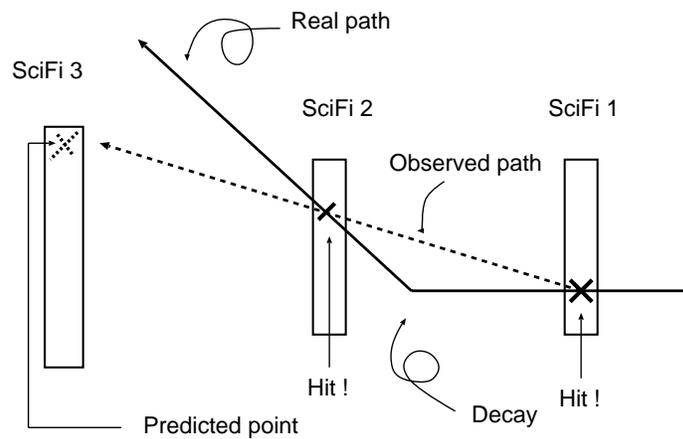


図 17: 「偽」崩壊イベント

この図において実線は実際に粒子がたどった経路で、点線はそれに反して我々が観測してしまった経路である。崩壊は実際には SciFi 1-2 間で

起きているにも関わらず、このようなケースにおいては「崩壊した」と見てしまう。そこでこのようなイベントは取り除く必要があるわけである。その方法として我々は数値計算シミュレーションを行うことにした。

このシミュレーションにおいて、崩壊は SciFi 1-2 間で一様に起こるとし、さらに簡単のためビームは各 SciFi に対して垂直に入射していると仮定した。これにより、SciFi 1-2 間で崩壊してその粒子が SciFi 2 を鳴らし、さらに SciFi 3 を鳴らさない確率 P_{false} を求めた (イベントとしては図 17 の Real path を通ったもの)。以下で本当に SciFi 2-3 間で崩壊した数の見積もり方を説明する。まず SciFi 2-3 間で本当に崩壊した粒子数を $n_{real}^{(2-3)}$ 、SciFi 2-3 間で我々が崩壊したと判断した粒子数を $n_{obs}^{(2-3)}$ 、さらに SciFi 1-2 間で崩壊したにもかかわらず SciFi 2-3 間で崩壊したと判断された (すなわち「偽」崩壊イベント) 粒子数を n_{false} とすると、以下の式が成り立つ。

$$n_{real}^{(2-3)} = n_{obs}^{(2-3)} - n_{false}$$

また、SciFi 1-2 間で本当に崩壊した粒子数を $n_{real}^{(1-2)}$ とし、さらに全崩壊数の関係から SciFi 1-2 間と SciFi 2-3 間で崩壊する粒子数は同じだと仮定すると、

$$\begin{aligned} n_{false} &= n_{real}^{(1-2)} P_{false} \\ n_{real}^{(1-2)} &= n_{real}^{(2-3)} \end{aligned}$$

これらの式より、

$$n_{real}^{(2-3)} = \frac{n_{obs}^{(2-3)}}{1 + P_{false}}$$

となる。以下に P_{false} の計算結果を各運動量ごとに示しておく。

表 13: P_{false} の計算結果

momentum[MeV/c]	P_{false}
300	0.0928
400	0.104
500	0.111
2000	0.0794

以上により $n_{real}^{(2-3)}$ が得られるわけだが、補正をきちんとだす際には全選択イベント数 (次セクションにおいて N_{in} として定義されている数) から $(n_{obs}^{(2-3)} - n_{real}^{(2-3)})$ を引くことを忘れてはならない。

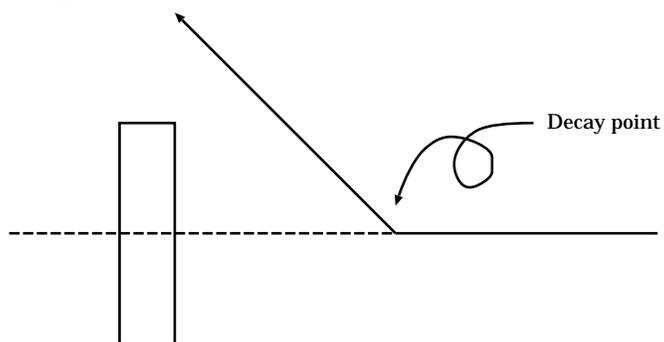
4.8.4 崩壊していても崩壊していないと見えるイベントの補正

いくら SciFi がミリ単位で位置がわかり、粒子の最大崩壊角が 300[MeV/c] で約 12[mrad] だといっても、粒子があまりに SciFi に近いところで崩壊してしまったり、超前方へ崩壊してしまうと、直進した場合に予想されるのと同じチャンネルに入ってしまう。そのイベントは崩壊したとは判断されない (図 18)。なおこのセクションについては SciFi は全体ではなく、1チャンネル分、すなわち SciFi 1、2 では 2.8[mm]、SciFi 3 については 4.2[mm] 分で議論を進めることにする。

ここで、 P_{de} を SciFi 2-3 間で粒子が崩壊する確率、 N_{in} をトラックした (すなわち崩壊したか否かを見る) 粒子数、 l_{tot} を SciFi 2-3 間の距離とする。また粒子が崩壊したにもかかわらず、トラックした軌道から予測される SciFi のチャンネルに入ってしまう (図 18 の Case 2) イベント数を n 、その確率を P_{in} とする。前述べたように Lab 系では崩壊角度は一様でなく粒子数密度にもかたよりのため、それも考慮する必要があるが、それを考慮した各点での P_{in} は図 19 である。横軸は SciFi 2 からの距離で、単位は [mm] である。この確率を全区間 l_{tot} で積分し規格化した積分確率を P_{in}^{norm} とすると、次で与えられる。

$$P_{in}^{norm} = \frac{1}{970} \int_0^{l_{tot}} P_{in}(l) dl$$

Case 1



Case 2

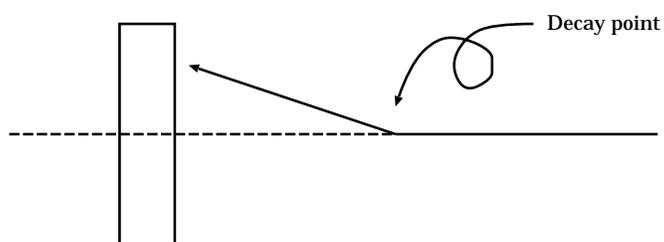


図 18: 崩壊が判断できない例 (Case 2)

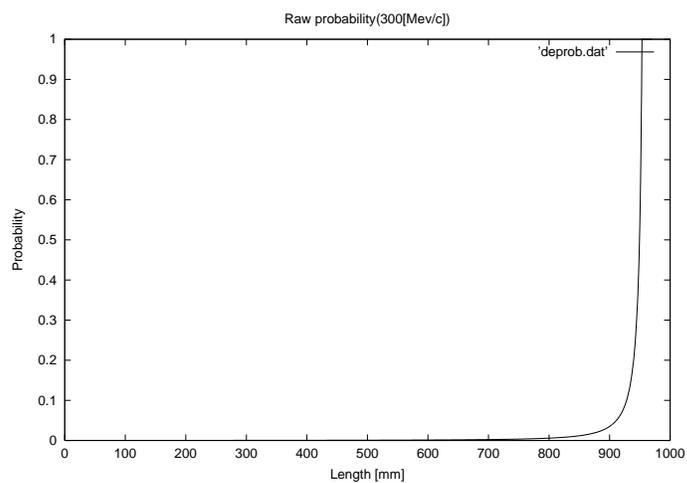


図 19: 各点での P_{in}

そして、 n 、 $n_{real}^{(2-3)}$ 、 $n_{obs}^{(2-3)}$ の間に成り立つ式は、

$$\begin{aligned} n_{real}^{(2-3)} &= n_{obs}^{(2-3)} + n \\ n_{real}^{(2-3)} &= N_{in} P_{de} \\ n &= N_{in} P_{de} P_{in}^{norm} \end{aligned}$$

これらの式より P_{de} を求めると、

$$P_{de} = \frac{n_{obs}^{(2-3)}}{N_{in}(1 - P_{in}^{norm})}$$

以下に、各運動量の P_{in}^{norm} をあげておく。

表 14: P_{in}^{norm} の計算結果

momentum[MeV/c]	P_{in}^{norm}
300	0.0290
400	0.0383
500	0.0476
2000	0.183

さらに前セクションと本セクションの補正を加えた後のこのたびの実験の計数を表にして次に掲げておく。

表 15: 最終的な π の parent(N_0) と daughter(N)

momentum[MeV/c]	π^+		π^-	
	N_0	N	N_0	N
300	413	353	193	158
400	456	394	307	263
500	688	624	593	535

4.9 π^+ および π^- の寿命

さてこれで π^+ と π^- の寿命を求めるための準備が整った。表 9 の N_0 と表 12 の N を equation 1、粒子の崩壊の式に代入すると、表 16 のように寿命が求まる。また、これまでのイベント選択の過程を表 17、18 にまとめておく。

表 16: π^+ および π^- の寿命

momentum[MeV/c]	π^+	π^-
300	9.6 ± 1.3 [nsec]	7.5 ± 1.3 [nsec]
400	7.7 ± 1.1 [nsec]	7.3 ± 1.2 [nsec]
500	9.2 ± 1.2 [nsec]	8.8 ± 1.2 [nsec]

表 17: SciFi による解析のまとめ 1 (π^+)

	π^+		
	300[MeV/c]	400[MeV/c]	500[MeV/c]
TOF triggered	150000	100000	100000
SciFi 1-2 hit	5159	4466	5523
cross talk 除去	1475	1412	1736
選んだイベント数	418	462	695
生き残った粒子数 (補正前)	314	387	616
(efficiency 補正後)	320	394	627
(efficiency および tail 補正後)	354	396	627
選んだイベント数 N_0(補正後)	413	456	688
生き残った粒子数 N (補正後)	353	394	624

表 18: SciFi による解析のまとめ 2 (π^-)

	π^-		
	300[MeV/c]	400[MeV/c]	500[MeV/c]
TOF triggered	80000	50000	50000
SciFi 1-2 hit	2836	2607	3573
cross talk 除去	632	886	1474
選んだイベント数	196	311	599
生き残った粒子数 (補正前)	141	258	528
(efficiency 補正後)	144	263	538
(efficiency および tail 補正後)	159	264	538
選んだイベント数 N_0 (補正後)	193	307	593
生き残った粒子数 N (補正後)	158	263	535

5 DS counterを使った解析

5.1 導入

このセクションではDS counterを用いた解析について述べる。ここでは前のセクションとは逆に、崩壊した粒子を直接観測する事が目的である。DS counterは図20に示すようにSciFi3を取り囲むように設置されている。図のようにDS counterはSciFi3の中心線より上半分の領域しか覆っていないため、崩壊して下半分の領域へ行った粒子は、崩壊が上下の領域で対称だとして推測することにする。また、 π の最大崩壊角は300MeV/cでは約126mradなのでSciFi2、SciFi3間の距離が970mmであることを考えると上半分の領域に関して言えばDS counterは崩壊領域を十分に覆っているとと言える。

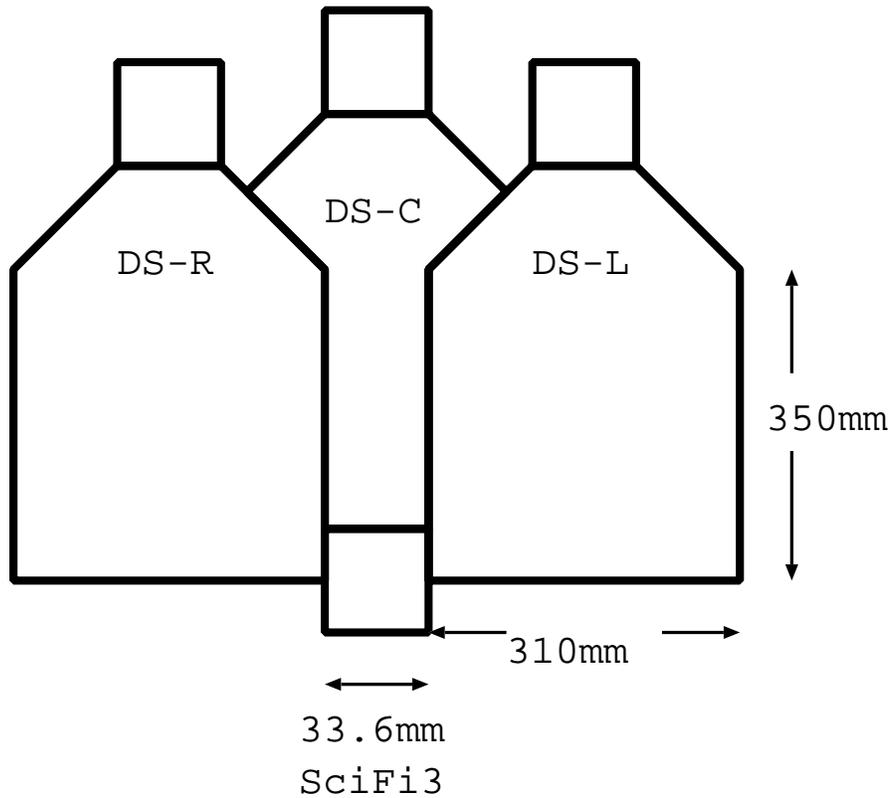


図 20: DS setup

5.2 イベントの選択

DS counter にヒットがあった場合にそれを π の崩壊とするためには、元のイベントは SciFi の解析と同様に、崩壊しなかった場合には SciFi3 に入るような π でなければならない。この時、得られる結果は次の 3 通りがある。

- DS にヒットがある
- SciFi3 にヒットがある
- DS にも SciFi3 にもヒットがない

DS にヒットがあった場合 π が崩壊したと言える。また、DS にも SciFi3 にもヒットしなかった場合は崩壊して DS が覆っていない下の領域にいったと考えられる。SciFi3 にヒットがあった場合は崩壊していないものと崩壊したものがある。どちらであるかは判断できないため、何らかの方法で推定するしかない。そこで、次のように考えた。

崩壊した π は当然最大崩壊角内にあるわけだが、その立体角を SciFi3 が完全に覆っていれば DS にはヒットしない。しかし SciFi3 にはいる確率は、 π と SciFi3 の距離のみでなく、位置にも依存する。(図 21) 実際に π がどの位置において崩壊したか知る方法はないため、図 22 に示すように、SciFi1、2 から予想される軌道が SciFi3 の中心の 4channel に来ると予想されるイベントに絞って見ることにする。

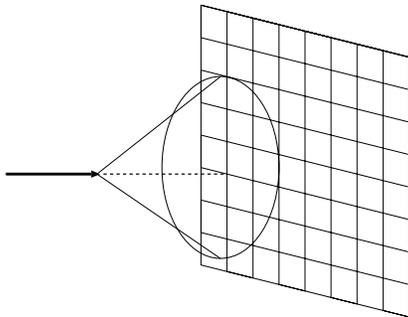


図 21: 軌道が中心軸上でない場合

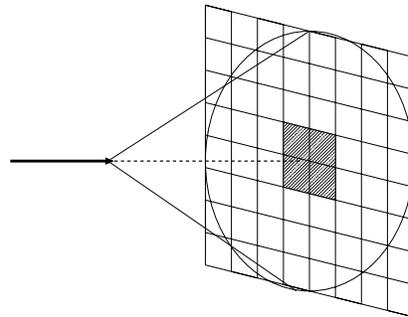


図 22: 軌道が中心軸上にある場合

こうすることによって、崩壊して SciFi3 にはいる確率は π と SciFi3 との距離のみに依存すると近似できると考えたのである。図 23 に 400MeV/c での例を示す。横軸は SciFi2 からの距離であり、SciFi2、3 間の距離は 970mm である。縦軸は崩壊後に SciFi3 に入る確率を表している。

π は SciFi2、3 間でも崩壊するが、その数は元のイベント数に比べて少ないため、崩壊確率はこの区間で一様とすると崩壊して DS にヒットする数の二倍と SciFi3 にヒットする数の比は図 23 の面積比に等しくなると考えられる。つまり DS にヒットした数から、崩壊して SciFi3 にヒットした数を求めることができる。

しかし、実際には十分なイベント数がなかったために有意な結果を得ることができず、中心の 16channel を見るように変更せざるを得なかった。

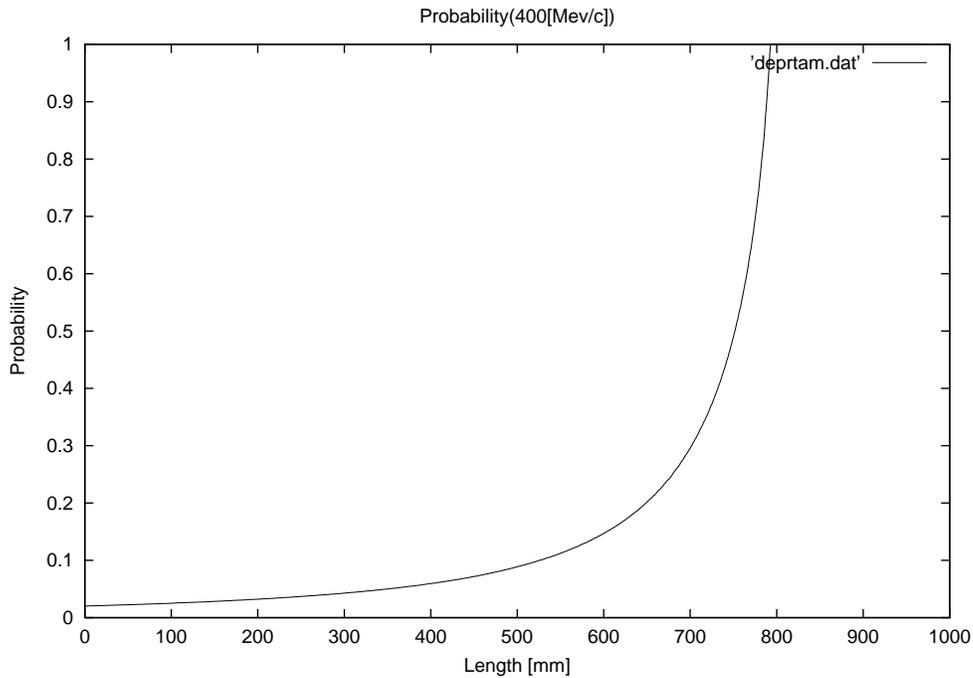


図 23: probability

5.3 DS ヒット 総数

得られたヒット数を表 19 に示す。

表 19: DS ヒット数

π^+		
momentum[MeV/c]	イベント数	DS ヒット数
300	418	23
400	462	13
500	695	25

π^+		
momentum[MeV/c]	イベント数	DS ヒット数
300	196	8
400	311	6
500	599	13

5.4 計数補正

DS counter にヒットしたイベント数から π の寿命をだすにはいくつか補正をする必要がある。まず最初に、崩壊せずに DS counter にヒットしたイベントを取り除く。本実験は SciFi2 での multiple scattering は微小角であるとして行ったが、実際にはごくわずかに大角度に散乱されるものがある。さらに SciFi の解析と同様、SciFi1,2 間で崩壊したイベントも取り除く。これらを取り除いたヒット数は SciFi2、3 間で崩壊したものだけである。そしてその数を用いて、「イベントの選択」で述べたように、崩壊後 SciFi3 にヒットしたイベント数を求めると、SciFi2、3 間で崩壊したイベント数が求められる。

5.4.1 multiple scattering の tail の補正

multiple scattering は小角度では Gaussian で近似されるが、大角度では一回散乱が効いてくるため、Gaussian からのずれが大きくなる。その様子を図 24 に示す。散乱角が 2.5σ のあたりで multiple scattering より single scattering が重要になる領域への移行がおこる。この領域における角度分布を $P(\theta)$ とすると

$$P(\theta) = \frac{1}{2}\pi N x \left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2 \frac{1}{\theta^3}$$

と表すことができる。ここで、 x は散乱物質の厚さ、 N はその単位体積あたりの粒子数、 z 、 Z はそれぞれ入射粒子と散乱物質の電荷、 p 、 v は入射粒子の momentum と速度である。また、入射方向と θ 以上の角度をなす方向に散乱される粒子数は、 n を入射粒子数として、

$$n \int 2\pi\theta P(\theta) d\theta$$

である。SciFi2、3 間の距離は 970mm、SciFi3 の中心から DS までの距離は 16.8mm なので、SciFi2 において約 17mrad 散乱されると SciFi3 に入らない。しかし 17mrad は 300MeV/c では約 4.3σ に相当し、実際に計算してみると、17mrad 以上散乱されるものは個数にして 0.04 個であり、計数に影響はないのでこの効果は無視する。

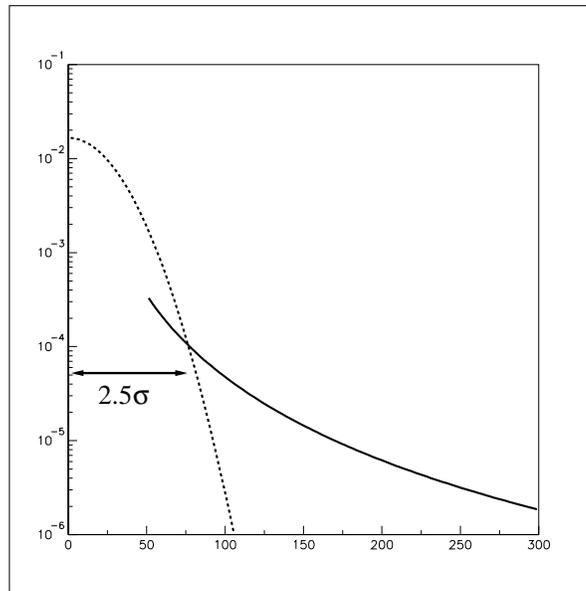


図 24: distribution function

5.4.2 偽崩壊イベントの補正

次に、実際は SciFi1、2間で崩壊したにもかかわらず、SciFi2、3間で崩壊したかのようにみているイベントを補正する。これは SciFi の解析において詳しく述べているのでそちらを参照して頂きたい。SciFi1、2間と SciFi2、3間で π が同数崩壊するとして、SciFi1、2間で崩壊して SciFi3 にヒットしないイベント数は下の表のようになる。

表 20: 偽崩壊イベントの補正

momentum[MeV/c]	π^+	π^-
300	3.9	1.4
400	2.4	1.1
500	5.0	2.6

このイベントは親の π と DS ヒットの両方から取り除く。

5.4.3 SciFi3 にヒットした崩壊イベントの補正

最後に、崩壊後 SciFi3 にヒットしたイベントを補正する。300MeV/c, 500MeV/c についても図 23 と同様に、中心軌道上で一様に π が崩壊するとしたときの、崩壊した π が SciFi3 に入る確率を表 21 に示す。

表 21: 崩壊後 SF3 に入る確率

573 momentum[MeV/c]	崩壊後 SF3 に入る確率
300	0.214
400	0.279
500	0.342

この確率および DS にヒットしたイベント数から、崩壊後 SciFi3 に入ったと思われるイベント数は表 22 のようになる。

表 22: SciFi3 ヒットの補正

momentum[MeV/c]	π^+	π^-
300	11.9	4.1
400	9.5	4.4
500	24.5	12.7

5.5 結果

以上の補正を加えると、イベント数と、DS counter を用いて得られた崩壊数は表 23 のようになる。

表 23: 崩壊数

π^+		
momentum[MeV/c]	イベント数	崩壊数
300	414	54
400	460	33
500	670	70

π^-		
momentum[MeV/c]	イベント数	崩壊数
300	195	19
400	310	15
500	573	26

5.6 π^+ および π^- の寿命

得られた結果を (1) 式を使って計算すると π^+ および π^- の寿命は表 24 のようになる。

表 24: 寿命

momentum[MeV/c]	π^+ [nsec]	π^- [nsec]
300	10.8 ± 1.6	14.7 ± 3.5
400	15.2 ± 2.7	22.8 ± 6.0
500	8.2 ± 1.0	19.4 ± 3.9

6 考察

では、この実験の考察を行う。過去の実験によって知られている π^+ 、 π^- の寿命は 26.033 ± 0.005 [nsec] である。またこの実験と同時に行った、FADCを用いた実験で測定された値は 28.6 ± 2.8 [nsec] である。これらと比較しても残念ながら我々の測定した π^+ 、 π^- の寿命の値は満足のいくものではない。このセクションではこのことについての問題点、反省点を中心に述べたいと思う。

6.1 問題点および反省点

もっとも大きな問題点は、やはりクロストークの多さであろう。x-channel と y-channel 間のクロストークによりトラックさえも怪しくなる可能性がある。そのためクロストークを除いたのだが、その結果イベント数が少なくなってしまった。ほかに問題点としては多重散乱の影響を軽く考えすぎていたことがある。現場においてあまりに散乱されていたために崩壊と散乱の区別もできなかったため当初のセットアップから変更を余儀なくされ、ずいぶん時間を浪費してしまった。そのためイベント数を多く集めることができなかった。

クロストークの原因としては光電子増倍管にかける動作電圧が高すぎるということも考えられる。しかし我々は主な原因として、Multi Anode の電極面への接着が甘かったからではないかと考えている。しかし実験装置は実験終了後に解体してしまったため、確認することはできなかった。測定前に放射線源などを用いて SciFi のチェックをもっとすべきだった。

6.2 π^+ 、 π^- の寿命

では、 π^+ 、 π^- の寿命について考察する。

まず Scintillation Fiber Counter を用いた解析では、各運動量ごとの測定で、寿命は誤差の範囲に入っている。また π^+ と π^- の寿命は誤差の範囲に入っているが、これをもって CPT 保存の確認とは言い難いだろう。

DS を用いた解析では運動量ごとの測定での値のばらつきが大きい。また 500[MeV/c] では、 π^+ と π^- の寿命は誤差の範囲に入っていない。この原因として考えられるものは、ビームの指向性である。我々のセットアップでは DS は SciFi の上半分しか覆っていない。装置の設置の都合上そうになったのだが、その時点ではビームは上下で対称であろうから、上半分を測定してその個数を 2 倍にすれば良いと考えたのであるが、運動量や電荷の正負でビームの指向性が変わるならこのようなことはできない。だが、300、400、500[MeV/c] では多重散乱の影響が大きくこの運動量のビームを用いて中心を合わせることはできなかった。

我々の寿命測定の結果は全般的に寿命が短い方向で得られた。これは、この測定においては粒子が崩壊しすぎという結果である。実際、SciFi 3 の外にでたという粒子数は SciFi、DS 両サイドからみても矛盾はなかった。これは本当に粒子が SciFi の外に出ていると結論づけることができる。粒子を崩壊を伴わずに外に出す要因となる現象として、

1. Multiple Scattering
2. 偽のトラック
 - (a) x-channel、y-channel 間のクロストーク
 - (b) SciFi 1-2 間の Multiple Scattering の影響

の 1、2 が考えられるが、1 について解析の段階において SciFi 3 の中心 2×2 チャンネルに当たると予想されるイベントを親粒子とし、さらに SciFi 3 の全範囲を直進領域ととった場合においてもさらに外に出すぎているので、これは Multiple Scattering の式に反しているなのでこの可能性は否定される。

つぎに 2 であるが、まず (a) について、これは SciFi の解析時に取り除いてあるので問題はない。(b) について、軌道の不定性すなわち Multiple Scattering による SciFi 2 におけるトラックチャンネルの揺らぎは空気の影響によるものである(連続媒質のため)。ところが、すでに 400[MeV/c] の運動量において空気の散乱は無視できるほどである。よって (b) による可能性も否定される。正直なところ、現時点では何故粒子が SciFi 3 の外

にでているのか不明である。
以上で考察を終わる。

参考文献

- [1] V. L. Highland, Nucl. Instr. and Meth. **129**(1975)497.
- [2] G. R. Lynch and O. I. Dahl, Nucl. Instr. and Meth. **B58**(1991)6.
- [3] B. Rossi and K. Greisen, Rev. of Mod. Phys. **13**(1941)240.
- [4] W. T. Scott, Rev. of Mod. Phys. **35**(1963)231.
- [5] H. S. Snyder and W. T. Scott, Phys. Rev. **76**(1949)220.
- [6] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics. 3rd ed., Wiley, 1999
- [7] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, Numerical Recipes in C 2nd. ed., Cambridge, 1999
- [8] H. Goldstein, Classical Mechanics. 2nd. ed., Addison-Wesley, 1980