

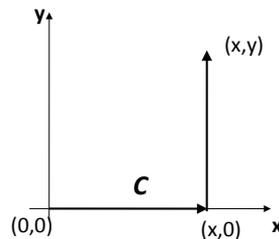
物理学基礎論 A (月3) 試験 (7月25日 13:00~14:30)

注意事項

- 学部、学生番号、氏名を必ず書くこと。解答用紙は裏側も利用してよい。

問1 次の問いに答えよ。

- (1) 2次元平面において、質点 m に力 $\vec{F} = (\sin(x + y^2), 2y \sin(x + y^2))$ が働く。力 \vec{F} が保存力であることを示し、質点 m が下図のように、経路 $C: (0,0) \rightarrow (x,0) \rightarrow (x,y)$ にそって動く時、この力 \vec{F} がする仕事 $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ を計算せよ。



- (2) 中心力場 $\vec{F}(\vec{r}) = f(|r|)\frac{\vec{r}}{|r|}$ において、運動方程式に従って運動している物体の角運動量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ が保存することを示せ。
- (3) 質量 M の天体のまわりをまわっている、質量 m の小惑星の軌道を考える。極座標で、質量 M の天体から質量 m の天体までの距離を r 、その角度を θ とする。動径方向の運動方程式は $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GmM}{r^2}$ と書ける (G は万有引力定数)。(2) で求めたように、角運動量 $h = mr^2\dot{\theta}$ は保存するとする。軌道の形を調べるために r を θ の関数として運動方程式を解き、その一般解が

$$\frac{1}{r} = A \cos(\theta + \delta) + \frac{GMm^2}{h^2} \quad (1)$$

となることを示せ。ここで、 A と δ は積分定数である。

問2 ロケットが自分自身に対して後方に速度 V (一定) で燃料を噴出して、直線上を運動する場合を考える (V は燃料を噴出直後のロケットと燃料の相対速度とする)。ロケットの質量の初期値は M_0 、初速度は 0 とする。ロケットと燃料は質点と考え、外力は働いておらず、燃料を噴出するとロケットの質量はその分軽くなる。

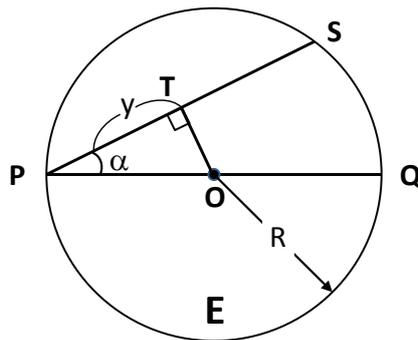
- (1) 質量 m の燃料を1回だけ噴出した場合の、ロケットの速度を求めよ。
- (2) 次に、ロケットが単位時間当たり質量 m で燃料を噴出している場合を考える。燃料噴出を始めてから t 秒後のロケットの加速度 a を求めたい (燃料は残っているとす)。時刻 t で、微小時間 Δt 当たりの速度変化を Δv とし、加速度 $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ を求めよ。
- (3) (2) の問題の続きで、 t 秒後の速度 v をもとめよ。

問 3 (平成 21 年度京大理学物理大学院入学試験 I-1 より抜粋) 下図のように、一様な密度で半径 R の完全な球体 E を考える。自転はしていない。表面での重力加速度を g とする。その表面の一点 P からその対極点 Q (P と中心 O を結ぶ直線が、表面と交わる場所) を定義する。直線 PQ と点 P で角 α を成す直線が球体表面と交わる点を S とする。線分 PS の中点を T とする。点 P から点 S に行く 2 つの経路を考える。

経路 (i) 表面から無限小の高さで E を等速円運動で回る (大きさを持たない) 人工衛星に乗って $P \rightarrow S$ に最短距離で行く。

経路 (ii) P から T を通って、 S に到る、無限小の半径の円柱をくりぬいて、その中を P に静止していた質点が S まで摩擦なくすべり落ちる。

- (1) 経路 (i) で P から S に到着するまでにかかる時間を答えよ。
- (2) P から S まで経路 (ii) ですべり落ちる質点について、その運動方程式を書け。ただし、 T を原点とした位置座標を y とする。(T から P へ向かう方向を正とする。)
- (3) 経路 (ii) で P から S に到着するまでにかかる時間を答えよ。



問 4 鉛直面内で放物線 $y = ax^2$ の上に滑らかに拘束された質点の平衡点のまわりの微小振動を考える。(注意) 鉛直と言った時には、質点には $-y$ 方向に重力が作用していると考え。重力加速度は g とする。

- (1) この質点の持つポテンシャル $U(x)$ を求め、更に質点にかかる x 方向の力を求めよ。
- (2) x 方向の運動方程式をたて、その一般解を求めよ。
- (3) (2) の一般解より、振動の周期を求めよ。

時間が余れば、試験や講義の感想とかも書いて下さい。