物理学基礎論A（月3） 試験（7月27日 13:00〜14:30)

注意事項

- **学部、学生番号、氏名を必ず書くこと。解答用紙は裏側も利用してよい。**

問1 一様な重力中の質点の運動を考える。地表から水平線に対して一定の角度 θ で原点から初速度 v_0 で物体を放り投げた。この質点が点 (x_0, y_0) にある的に当たるための角度 θ の条件を求める。

(1) $\tan\theta = \alpha$ とおくと、α の満たすべき式は $\frac{g}{2v_0^2}x_0^2\alpha^2 - x_0\alpha + (y_0 + \frac{g}{2v_0^2}x_0^2) = 0$ となることを示せ。

(2) 上の方程式を解き、的に命中するための角度 θ を求めなさい。

(3) 的に当てるための、最小初速度はいくらか？

(4) 初速度 v_0 で当てることのできる、的の位置 (x_0, y_0) の条件を求めなさい。

問2 図1のように、自然長 l、バネ定数 k の下端に質量 m の重りをつるし、上端 O を上下に動かし $A\cos(\omega t)$（ただし $\omega \neq \sqrt{k/m}$）で表される振動をさせる。運動方程式をたて、それを解いて重りの運動を調べよ（つまり運動方程式を解き、一般解を求めなさい)。

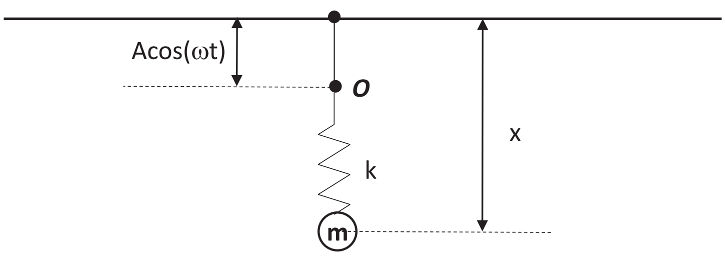

図 1: 問2の説明図

問 3 太陽の周りを回る惑星の運動を考える。太陽の質量を M、惑星の質量を m とする。太陽を中心とした極座標で地球の位置は (r, θ) と表せる。また万有引力定数は G とする。

(1) 惑星の運動において角運動量 $mr^2\dot{\theta} \equiv h$ が保存していることを示せ。

(2) エネルギー保存則から

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{h^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r} = E \tag{1}$$

を導け。ただし、E はこの系の全エネルギーである。

(3) 式 (1) を、$u = \frac{1}{r}$ を使って変形すると、

$$\frac{du}{\pm\sqrt{\frac{2mE}{h^2} + \frac{G^2M^2m^4}{h^4} - (u - \frac{GMm^2}{h^2})^2}} = d\theta \tag{2}$$

となることを示せ。

(4) 式 (2) を解くと、惑星の軌道の方程式は

$$r = \frac{l}{1 + \epsilon\cos\theta} \tag{3}$$

と求まる。式 (2) を解いて、半直弦 l と離心率 ϵ を求めよ。ここで、不定積分の公式 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\cos^{-1}\frac{x}{a} + C, (C:$ 積分定数$)$ を用いてもよい。また、惑星の軌道が楕円になるためのエネルギー E の条件を示せ。

問 4 質量 m の質点が、座標 x の水平直線上を運動している。この質点に働く x 方向の力は、

$$F(x) = (1 - \frac{x}{a})e^{-x/a}, \qquad (a > 0) \tag{4}$$

である。次の問いに答えよ。

(1) ポテンシャル $V(x)$ を求め、そのグラフの概略を図示せよ。

(2) この質点は $x = a$ の付近で振動する。この振動の振幅が a に比べて非常に小さい時、すなわち微小振動が起こる時に、振動の周期 T を近似的に求めなさい。