オルソポジトロニウムの寿命測定

課題演習A2 2015年度後期

天野　良樹
岩島　呂帆
岡本　慎太郎
近藤　千尋

・発表の流れ

1 実験目的

2 ポジトロニウムとは

3 実験説明

4 データ解析

5 考察

1. 実験目的

- 電子と陽電子の対消滅は量子電磁力学（QED）の検証に用いられる素粒子反応の1つ

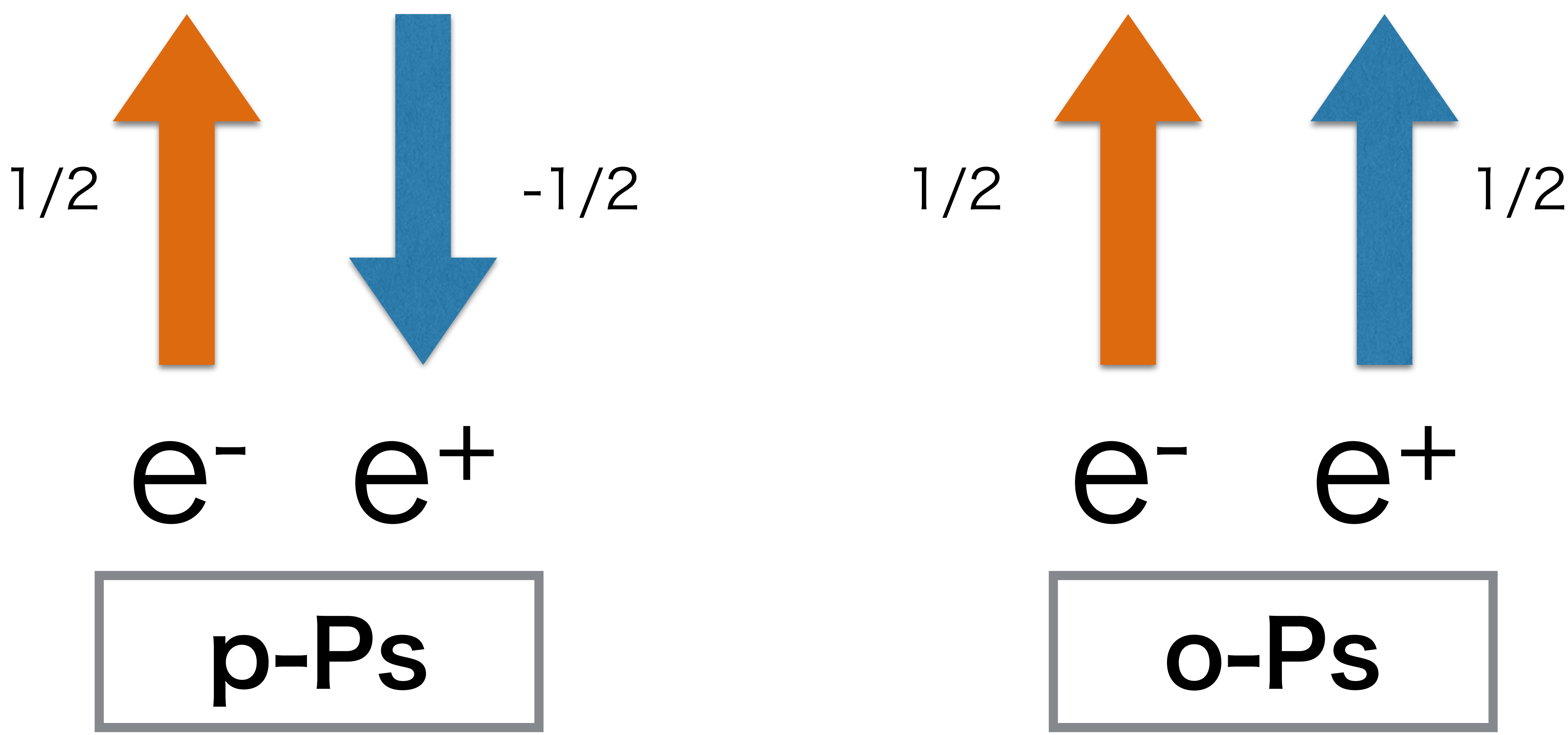
- ポジトロニウム（Ps）は電子と陽電子が束縛されて対になった一種の原子

↓

- Psの寿命を測定してQEDの理論値と比べてみる！

2. ポジトロニウムとは

・ Psは構成する電子と陽電子のスピンの向きによって２種類に分類できる。スピン1重項（S=0）のものをパラポジトロニウム（p-Ps）、スピン3重項（S=1）のものをオルソポジトロニウム（o-Ps）と呼ぶ。



- p-Psは崩壊すると2個の光子を、o-Psは崩壊すると3個の光子を放出する。

- それぞれの寿命の理論値は

$$\tau_{\text{p-Ps}}=0.125\ [\mathrm{ns}]$$

$$\tau_{\text{o-Ps}}=139\ [\mathrm{ns}]$$

となる。

3. 実験

a) 実験原理

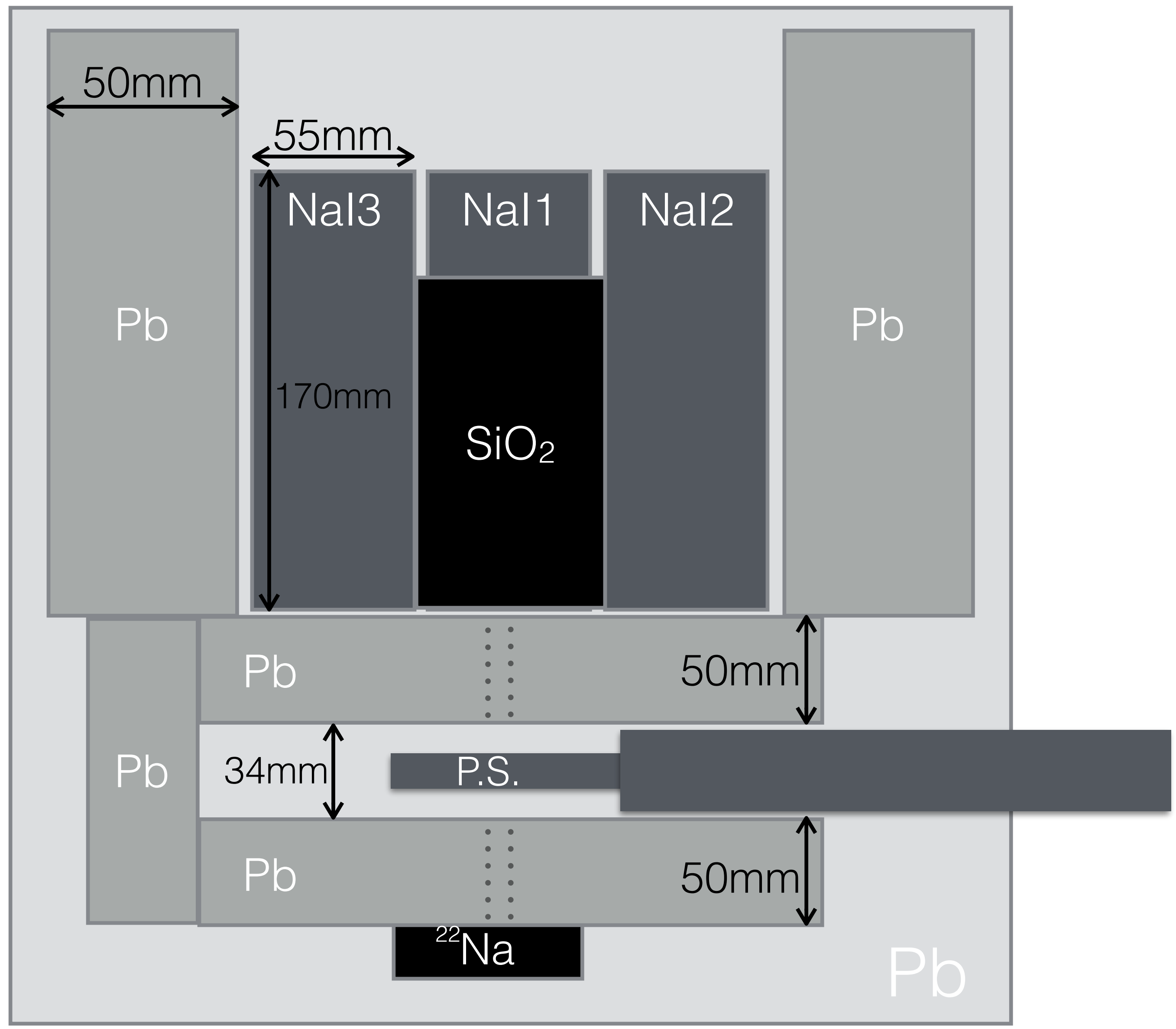
b) セットアップ

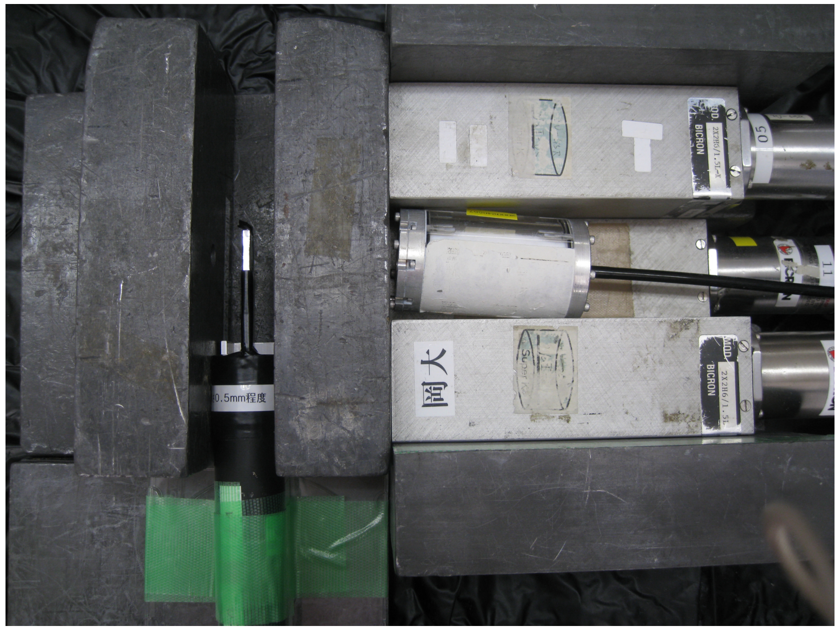
c) 回路

実験原理

線源^{22}Naのβ^+崩壊によって放出されるe^+をシリカパウダーに向けて入射させるとp-Ps,o-Psを形成する。そこで、線源とシリカパウダーの間にプラスチックシンチレーター(P.S.)を置きe^+を検出(e^+はそのままP.S.を通過する)。また、シリカパウダーをNaIシンチレーターで囲みPsの崩壊によるγ線を検出し、それぞれが検出された時間の差を計測することでPsの寿命を測定する。

セットアップ模式図


50mm
55mm
NaI3
NaI1
NaI2
Pb
Pb
170mm
SiO2
Pb
50mm
Pb
34mm
P.S.
Pb
50mm
22Na
Pb

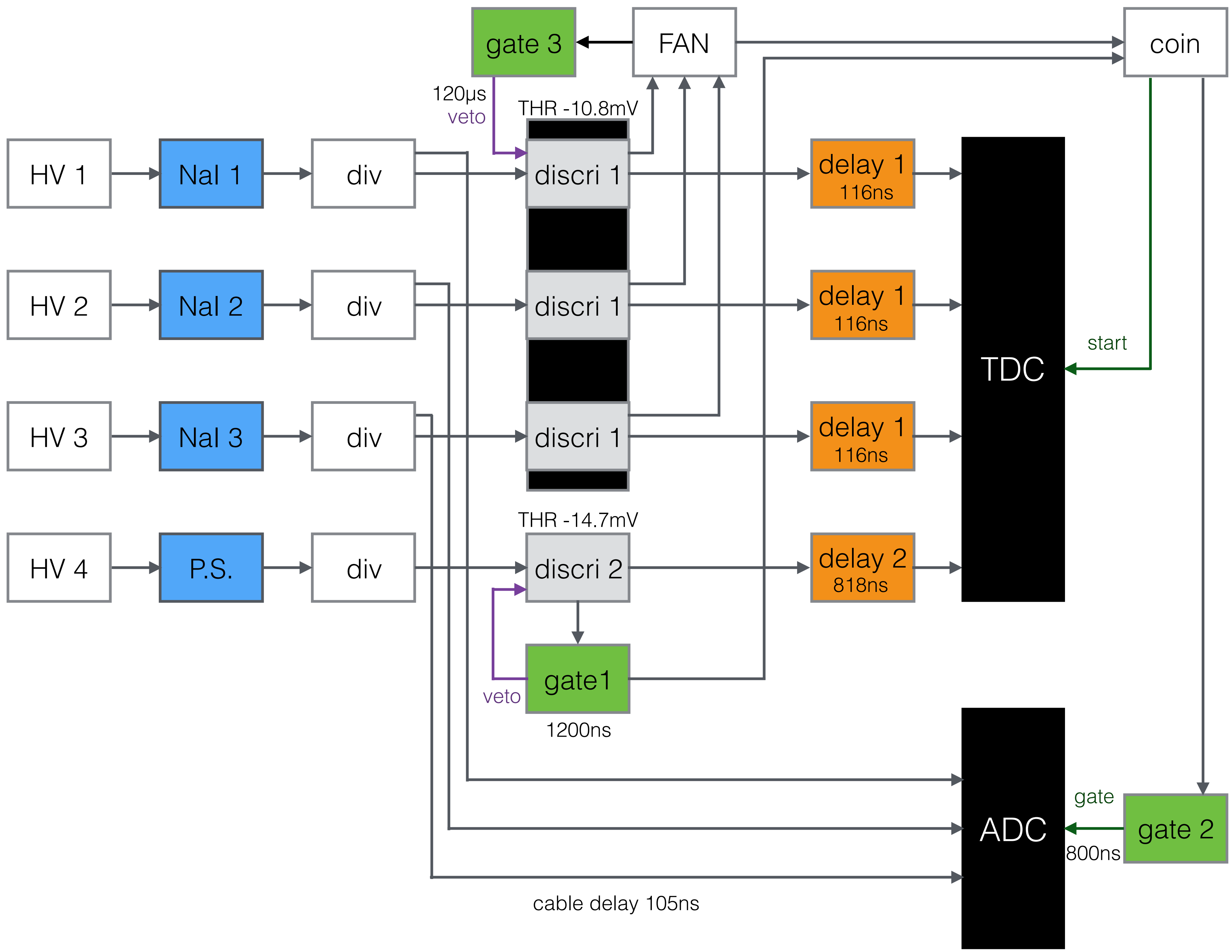


(i)装置の配置

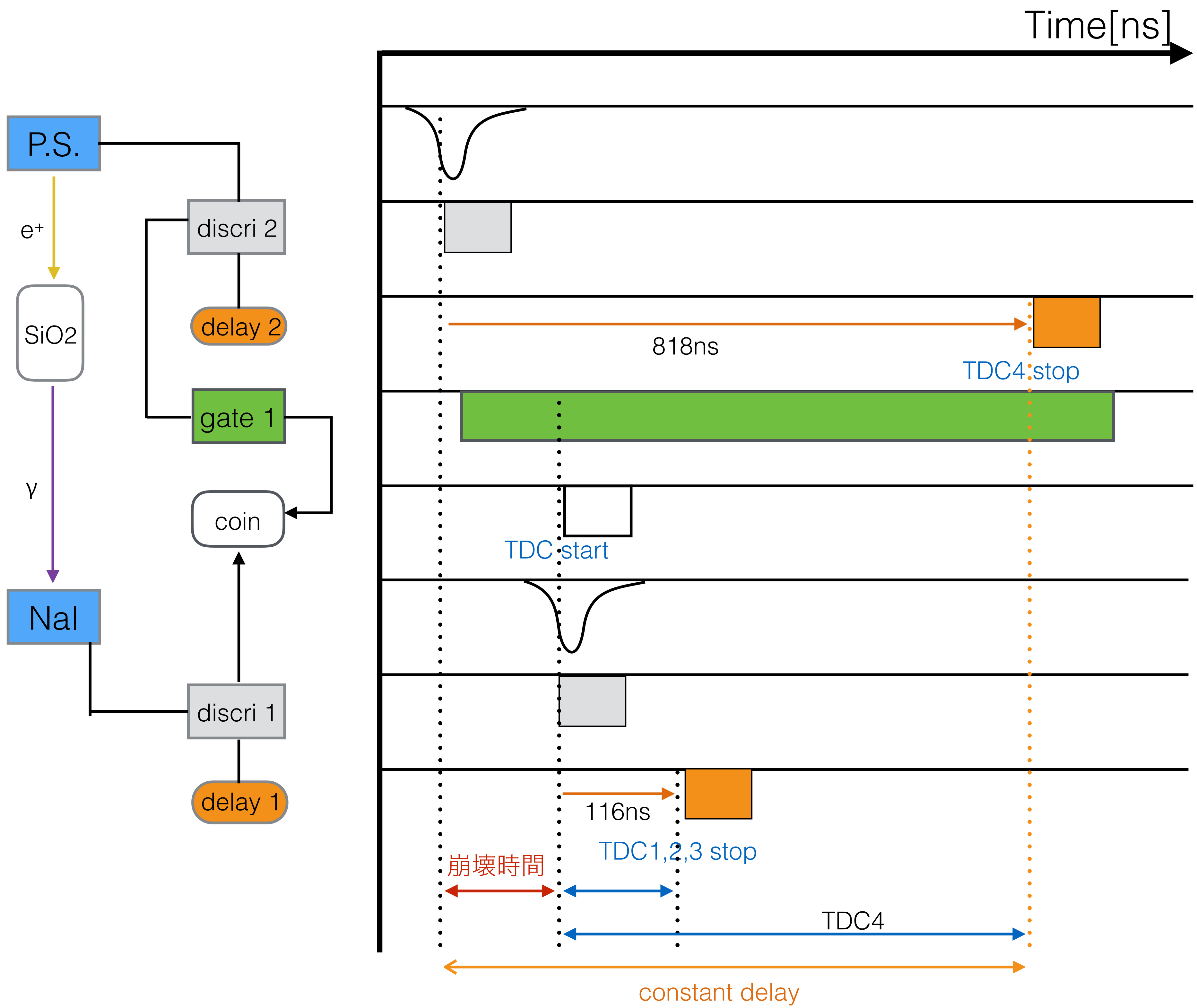
(ii)鉛ブロックによる遮蔽

(iii)遮光の様子

回路の模式図


gate 3
FAN
coin
120μs
veto
THR -10.8mV
HV 1
NaI 1
div
discri 1
delay 1
116ns
HV 2
NaI 2
div
discri 1
delay 1
116ns
start
TDC
HV 3
NaI 3
div
discri 1
delay 1
116ns
THR -14.7mV
HV 4
P.S.
div
discri 2
delay 2
818ns
veto
gate1
1200ns
gate
ADC
gate 2
800ns
cable delay 105ns

回路概念図



Time[ns]
P.S.
e+
SiO2
γ
NaI
discri 2
delay 2
gate 1
coin
discri 1
delay 1
818ns
TDC4 stop
TDC start
116ns
TDC1,2,3 stop
崩壊時間
TDC4
constant delay

HVの調整

	HV[V]	ペデスタル (ADCのch数)	ピーク (ADCのch数)	差 (ADCのch数)
NaI1	1250	203	965	762
NaI2	1350	187	920	733
NaI3	1110	223	937	714

4. データ解析

元のデータ

↓

a) Calibration

(andデータの抽出)

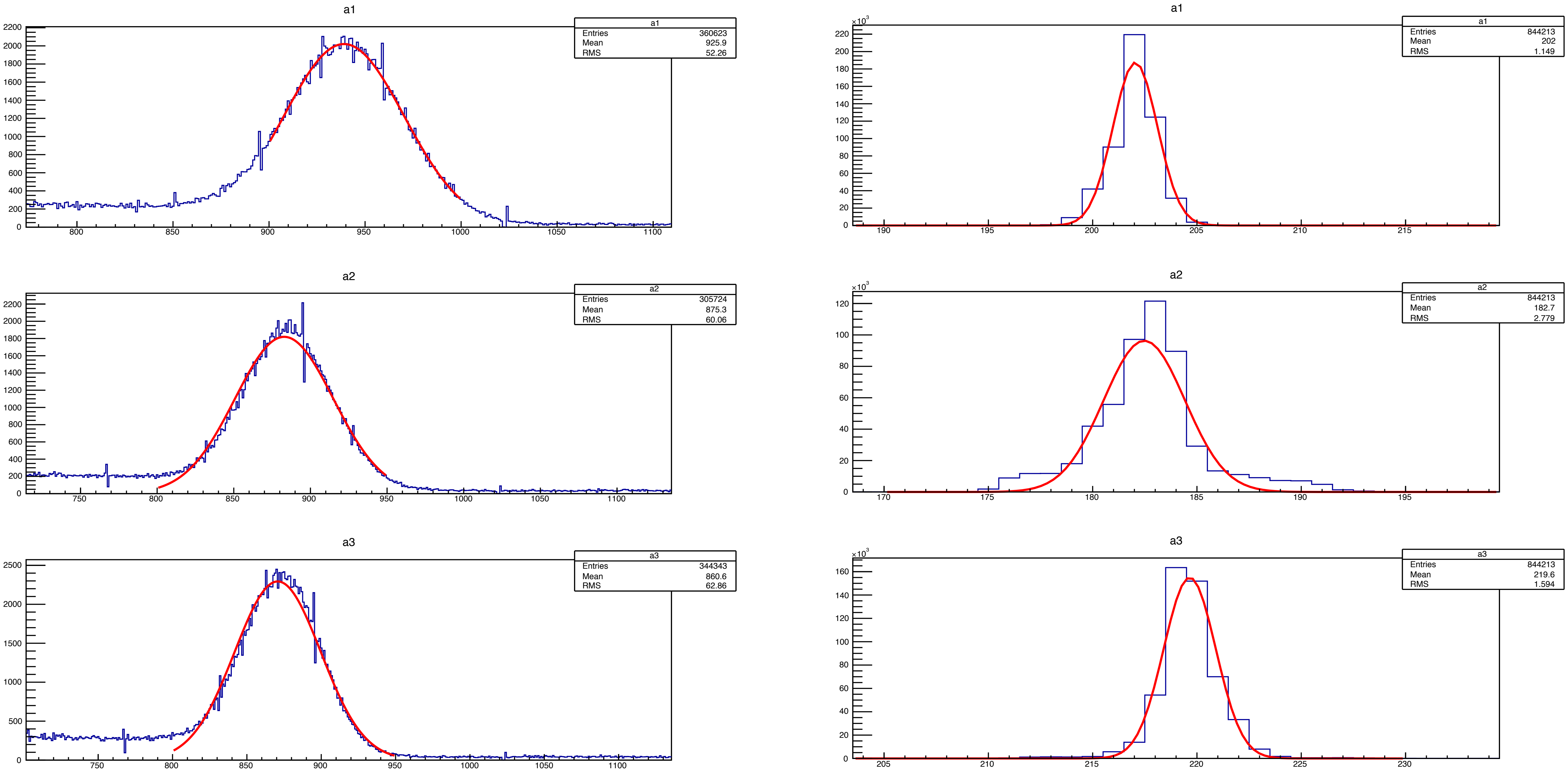
↓

b) TQ補正 → 一度寿命を求める

↓

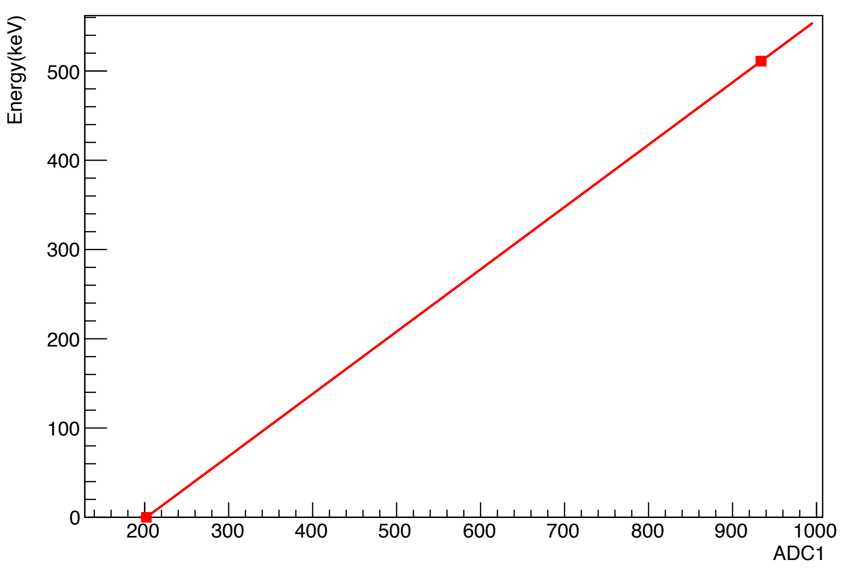
c) pick-off補正 → 寿命を求める

Calibration

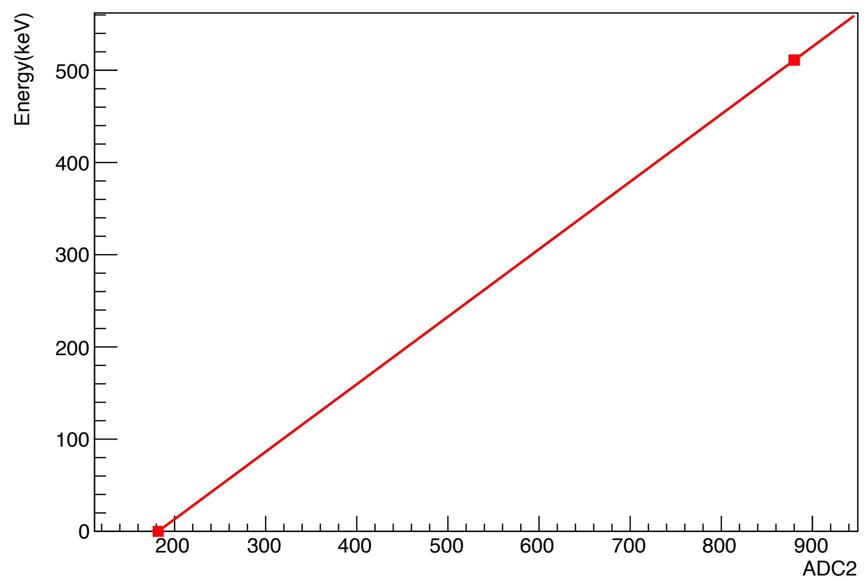


511keVpeakとpedestalを求めるフィッティングの様子

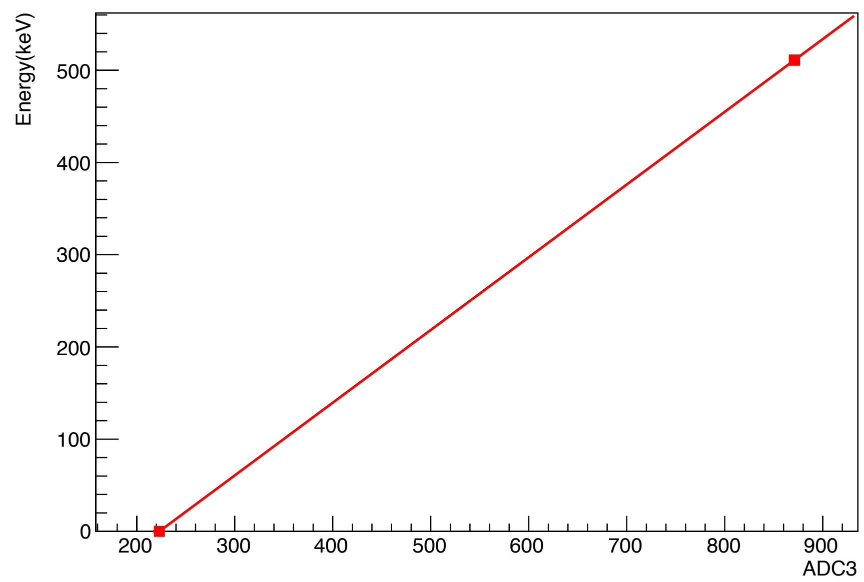
（左が511keV、横軸:CH）



E(keV) = 0.698*(ch) - 141.014



E(keV) = 0.732*(ch) - 133.241



E(keV) = 0.789*(ch) - 175.853

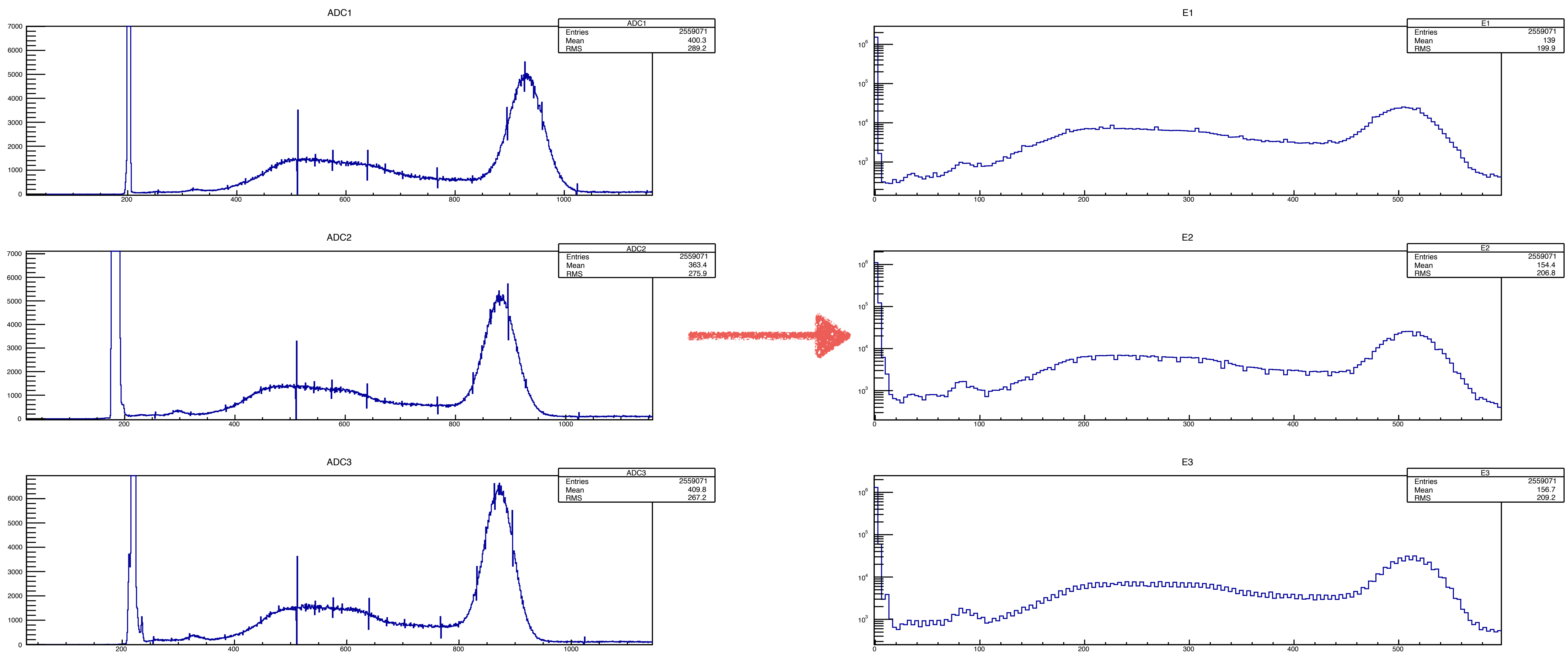
ADC1, ADC2, ADC3のエネルギー較正

	ADC1(ch)	ADC2(ch)	ADC3(ch)
0keV (pedestal)	202	182	223
511keV (peak)	934	880	871

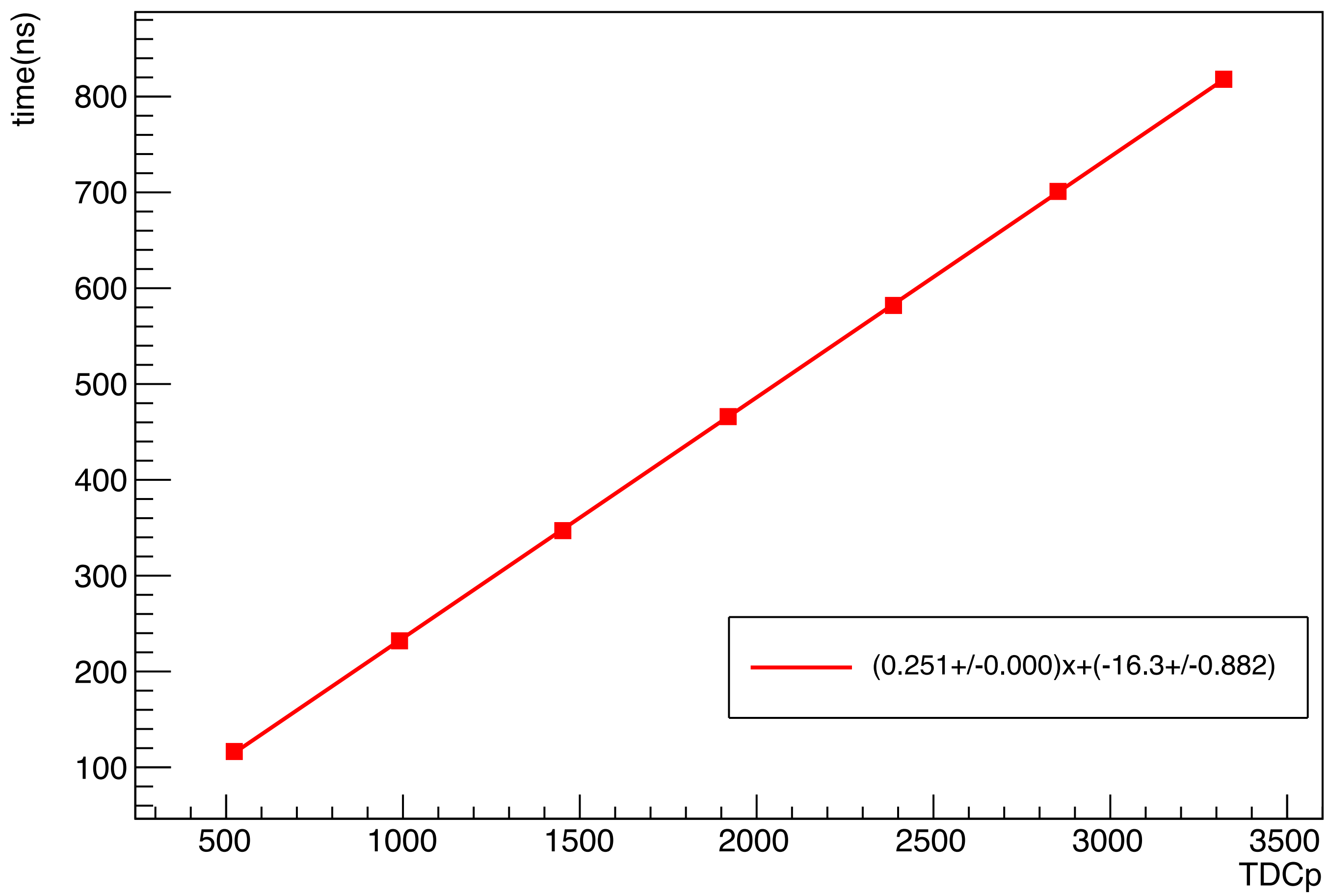
ADC Calibration

元のデータ
（横軸:ch数）

Calibration後
（横軸:エネルギー（keV））



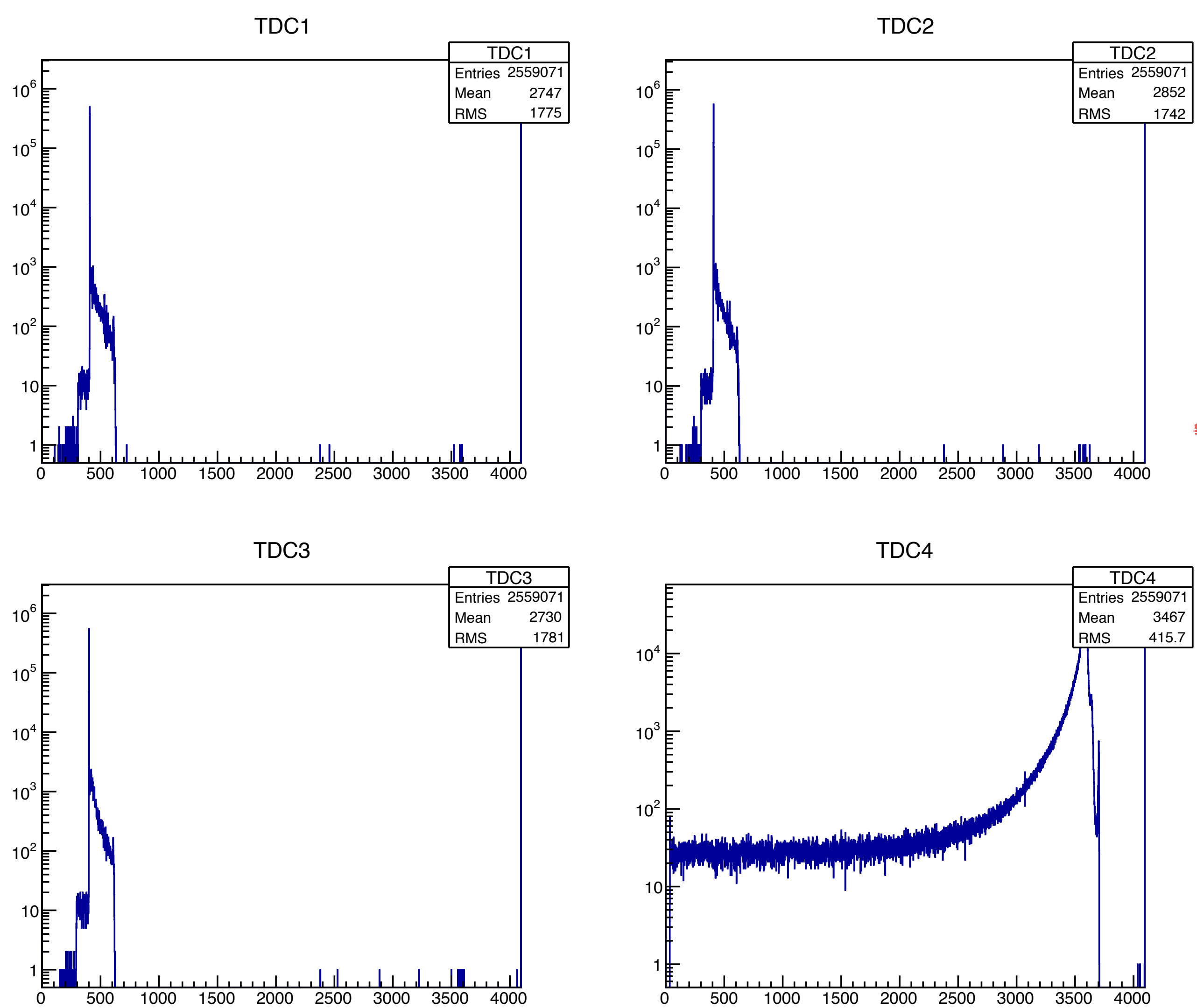
TDC Calibrationの様子



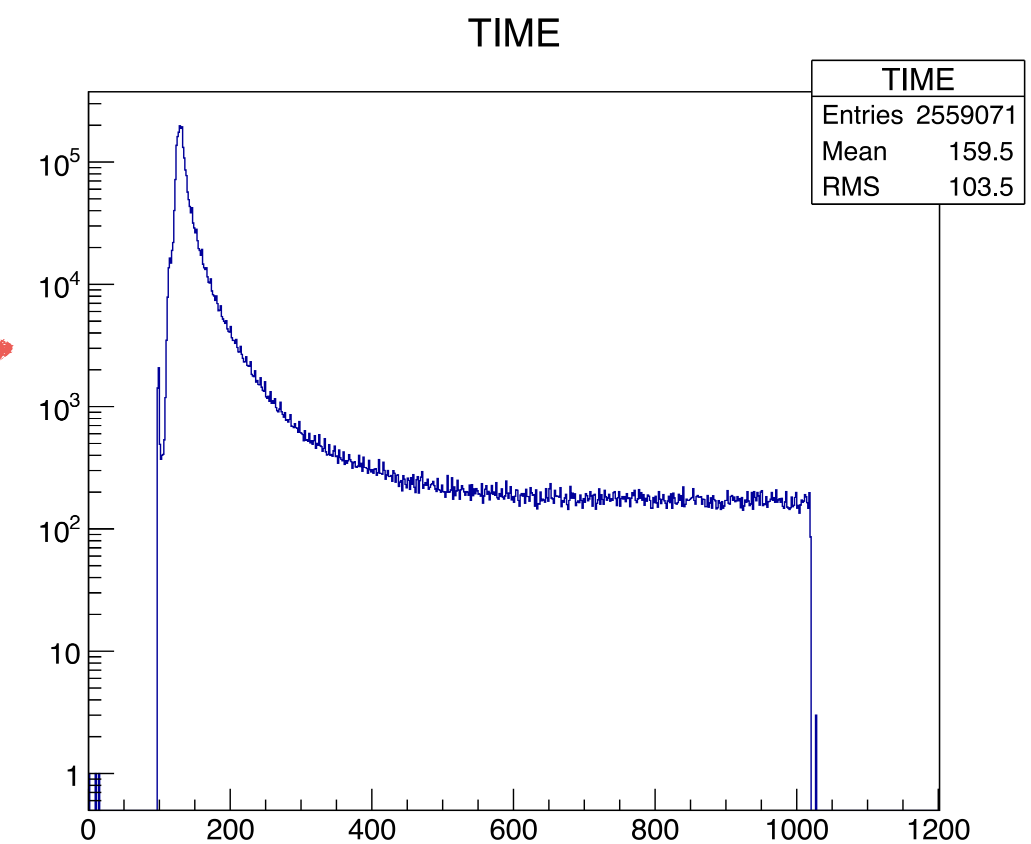
Fixed delay(ns)	TDC(ch)
116.5	523
232.0	990.3
347	1452
466	1919.5
582	2387
701	2852.2
818	3320.5

TDC Calibration

元のデータ
（横軸:ch数）

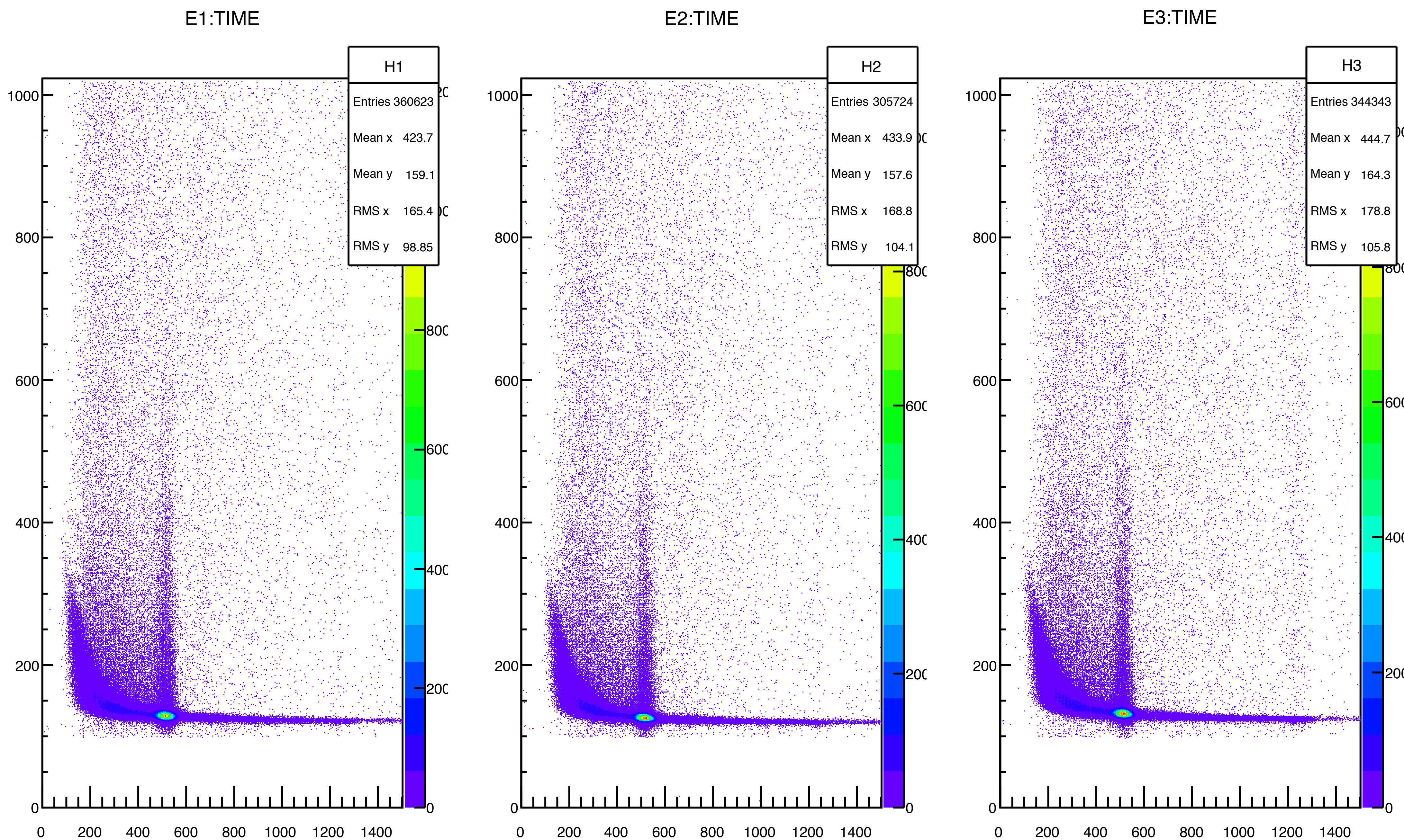


Calibration後
（横軸:時間（ns））



同時に反転もさせている

Calibration後のエネルギー/時間分布



横軸:エネルギー(keV)、縦軸:時間(ns)

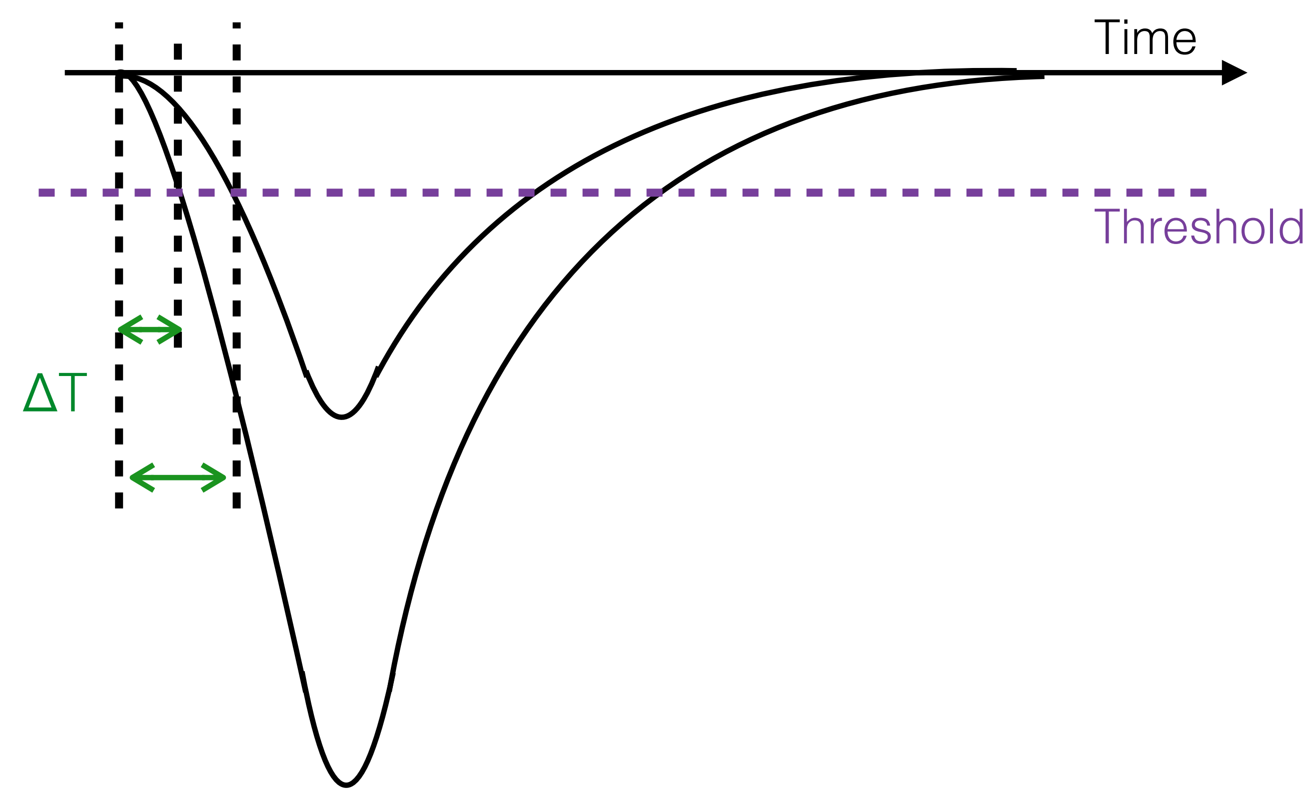
（補足）

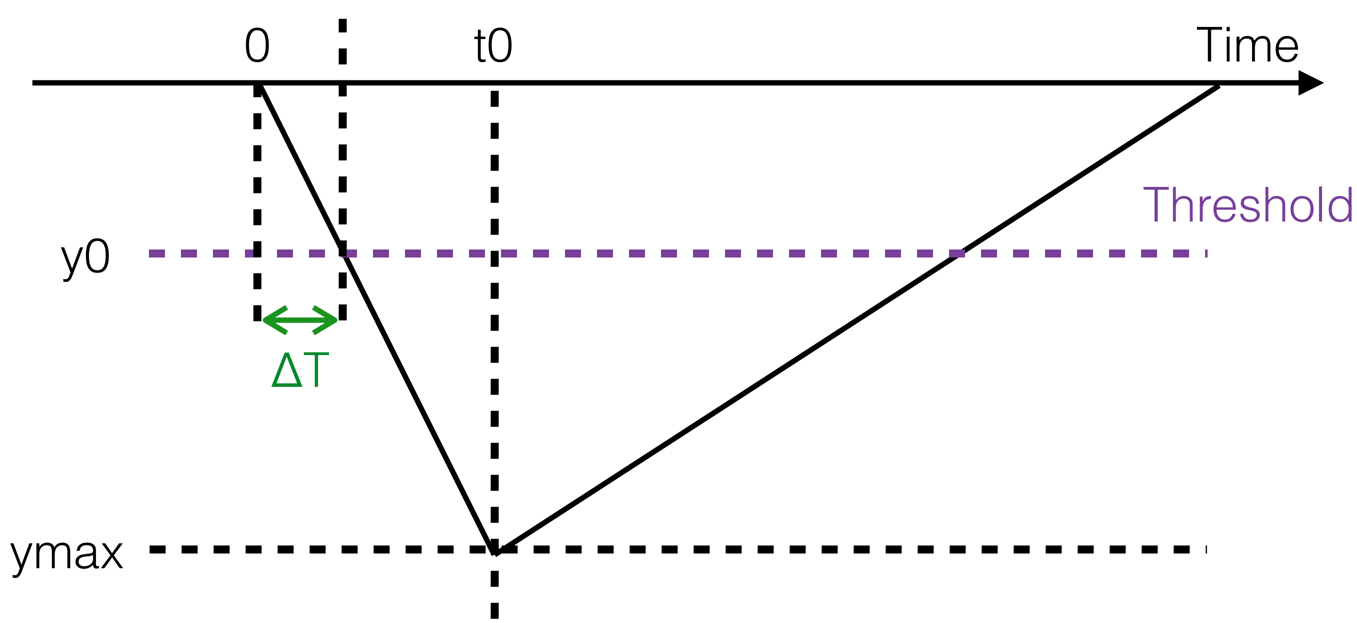
二次元分布図の作成の前に、すべてのデータの中から
NaI1,2,3のどれか一つのみが正しく信号を受け取ったと
考えられるデータのみを、TDC1,2,3の値を条件に用いる
ことで抽出した。

TQ補正

TQ補正とは？

ΔTをエネルギーEの
関数として求める。



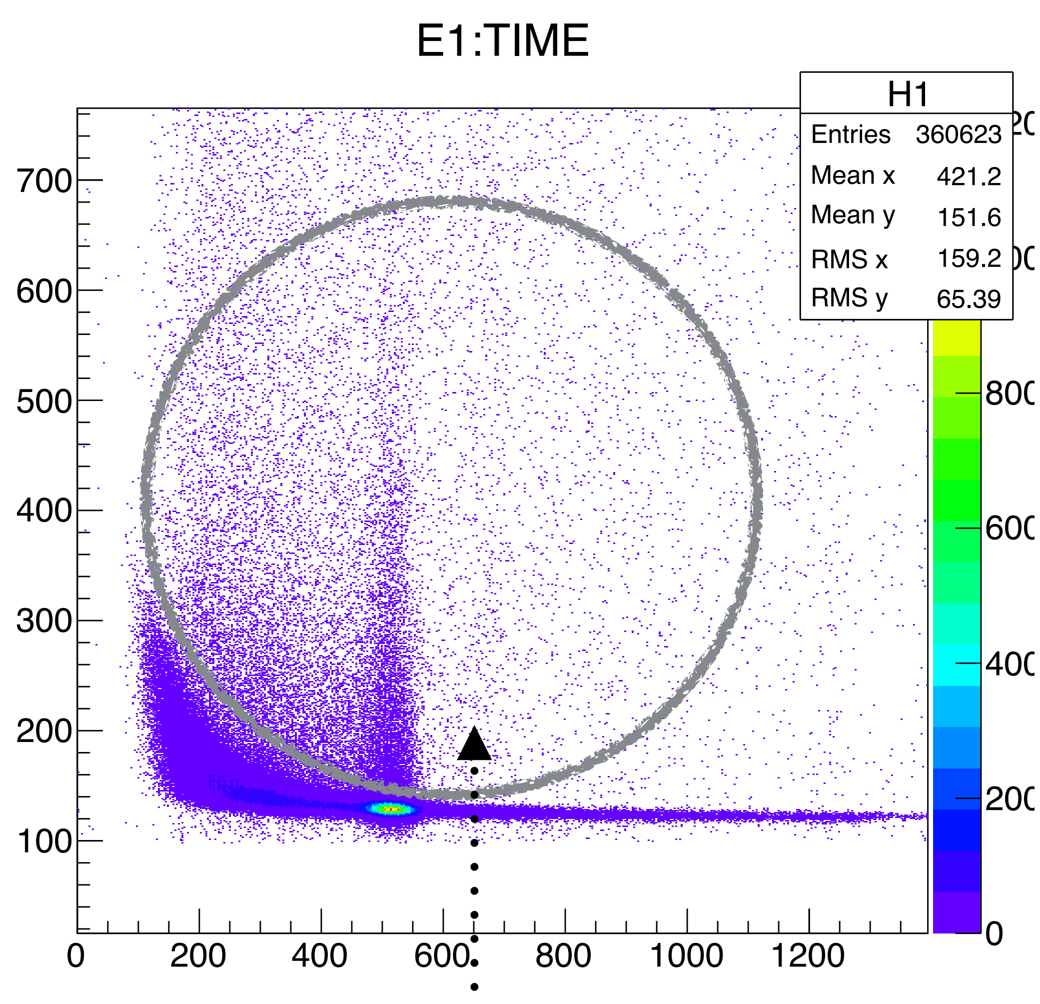


最も簡単な近似

YmaxはEに比例するとする。

ΔT : t0 = Y0 : Ymax
より　ΔT ∝ E^(-1)

実際の方法



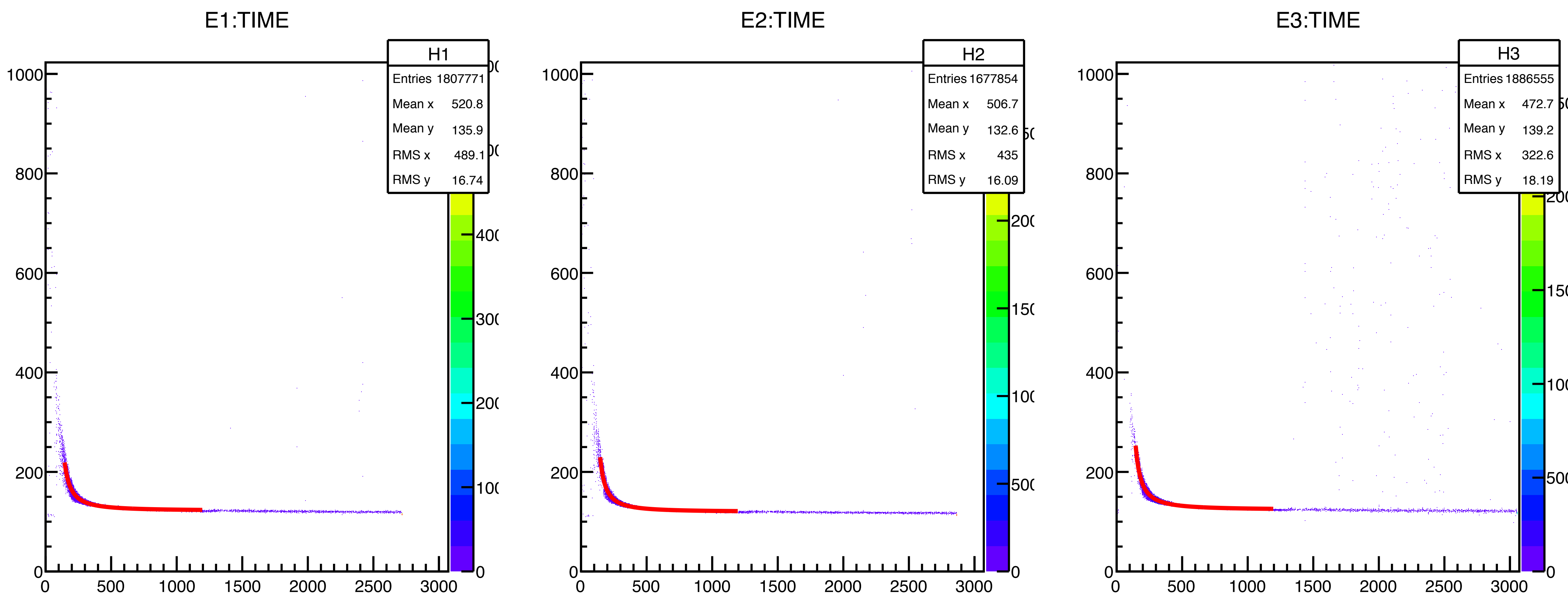
この辺は要らない

実際の補正式としては

ΔT(E) = p0 / (E - p1)^p2 + p3
(p0~p3はパラメーター)を用いた。

TQ補正のためのデータとしては、できるだけ短い時間で崩壊したものが都合が良く、また観測される多くの反応がすぐに崩壊するp-Psであることから、全データの中でエネルギーごとに、観測数が最も多いところの６割以上であるところのみのデータを用いることにした。

フィッティングの図

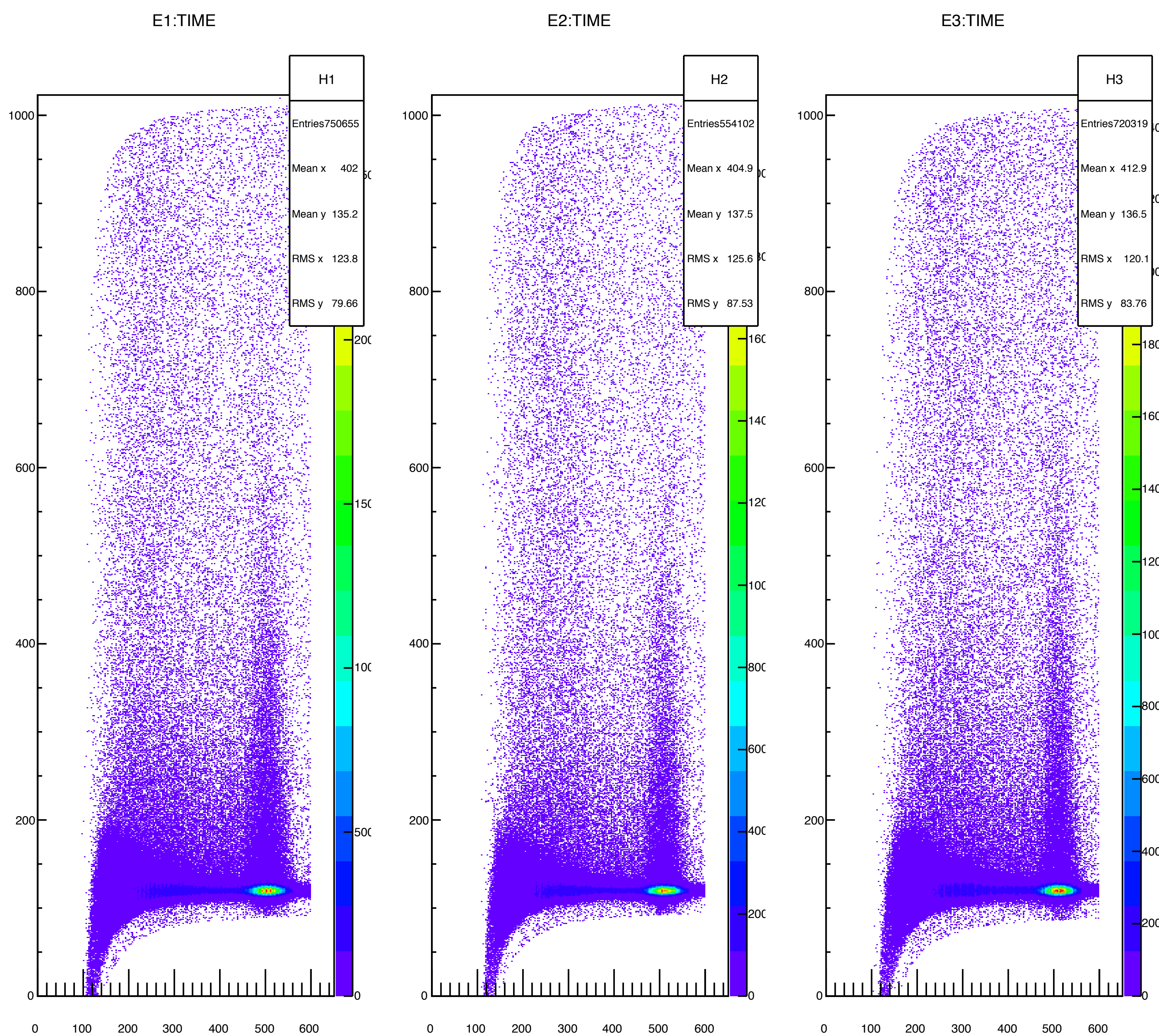


フィッティング範囲については、下限は点の数が大きく減少しているところを境目として140を採用し、上限は、大きなエネルギーにおいて（おそらく全体のデータ数が少ないため）右上の領域に点が散見されたことからこれに影響を受けない範囲として1200を採用した。

結局得られたTQ補正式

NaI1	46737/(E-76.7)^1.46 + 122.016
NaI2	48581/(E-84.4)^1.48 + 119.746
NaI3	42297/(E-86.5)^1.42 + 123.841

TQ補正後のヒストグラム



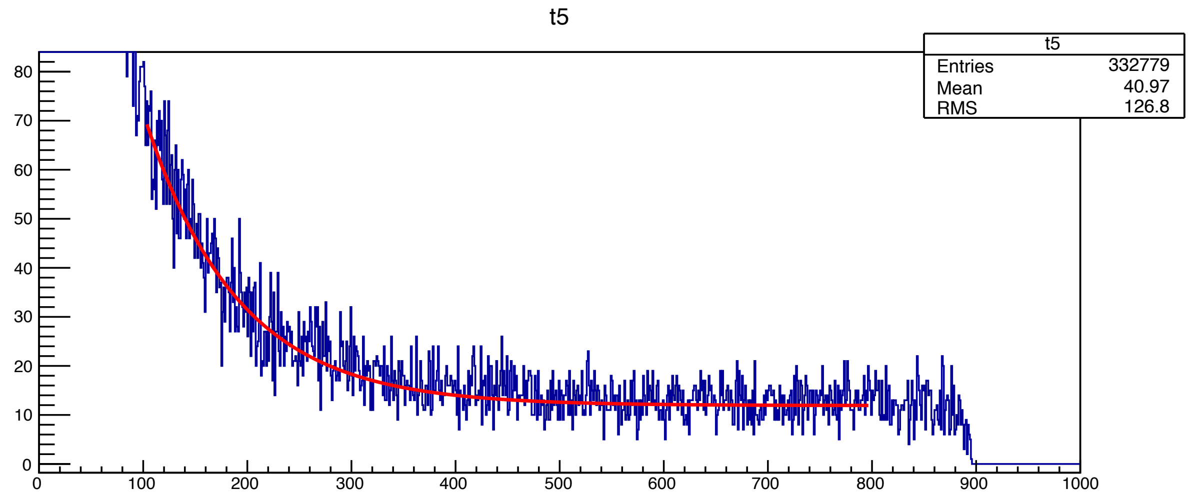
得られたTQ補正式で補正したもの。
頻度の高い部分の直線性は再現できているように見える。

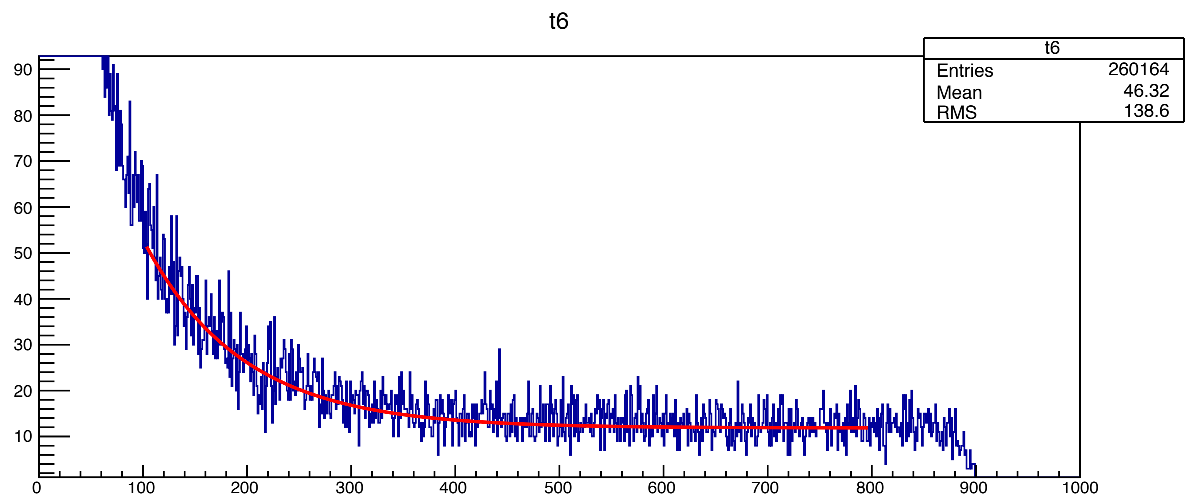
TQ補正後の時間分布から求めた寿命

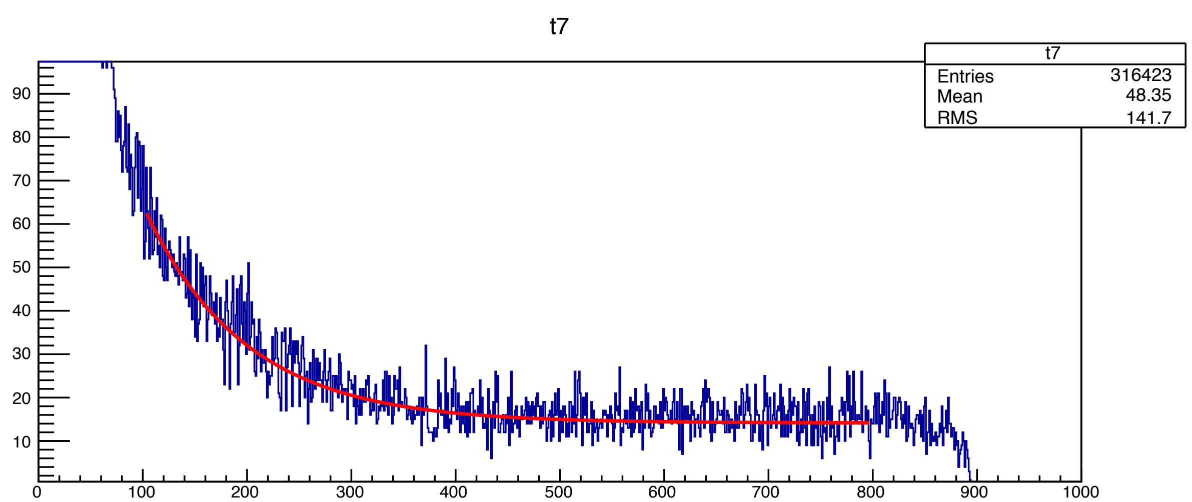
NaI1	89.6ns
NaI2	92.1ns
NaI3	100ns

カウント数 = p0*exp(-Time/p1) +p2 でフィッティングし、p1の値を寿命とした。

フィッティングの様子

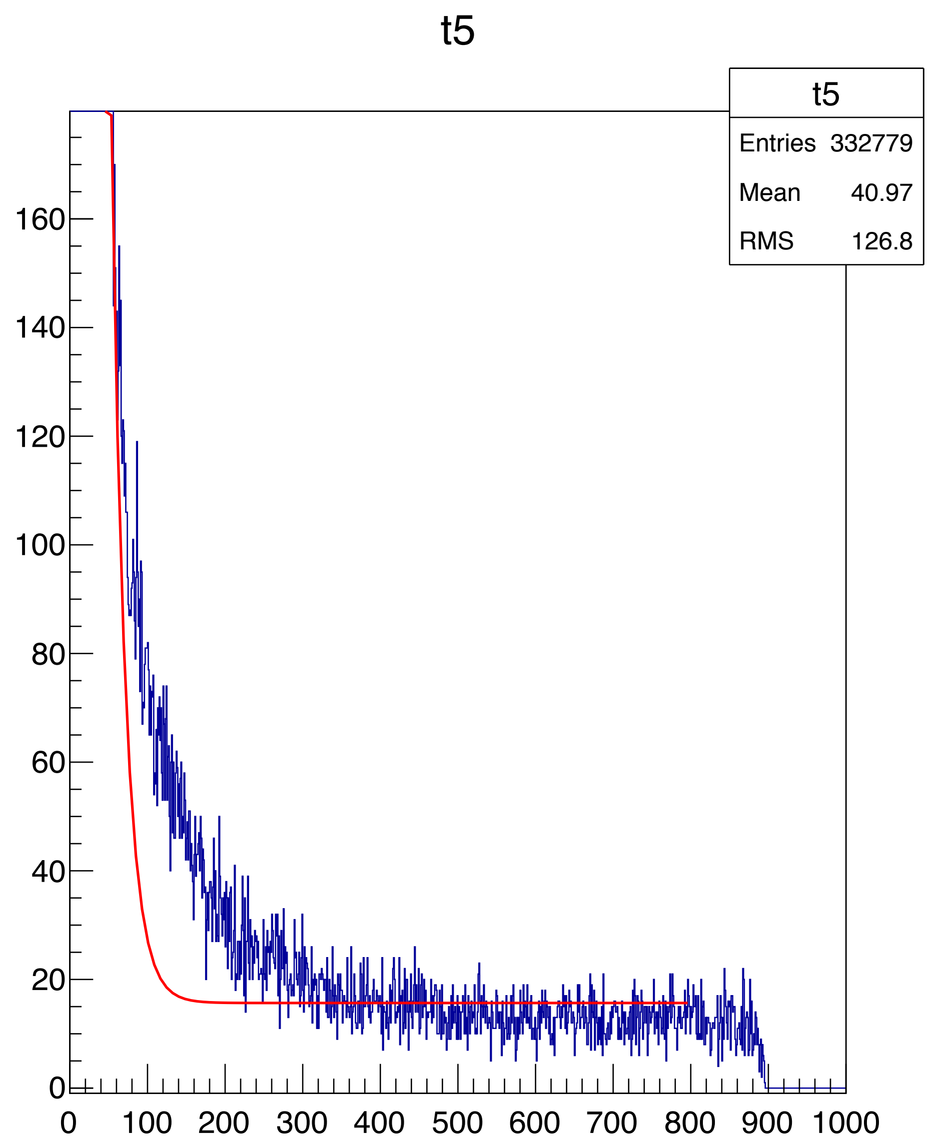






フィッティング範囲は100ns-800nsとした。これより崩壊の速いものを含めようとすると次のページのようにずれてしまったためこの範囲を採用した。崩壊が速いものはp-Psが多く含まれていると考えられるため、遅い崩壊をするものを優先してフィッティングした。

範囲を崩壊が速い側に広げた時のフィッティング失敗図



大きくずれている。範囲は10ns-800ns

pick-off補正

Pick-off補正とは

オルソポジトロニウム　→　3γ　（見たい反応）

→　pick-off反応

→　スピン交換反応

→　化学反応

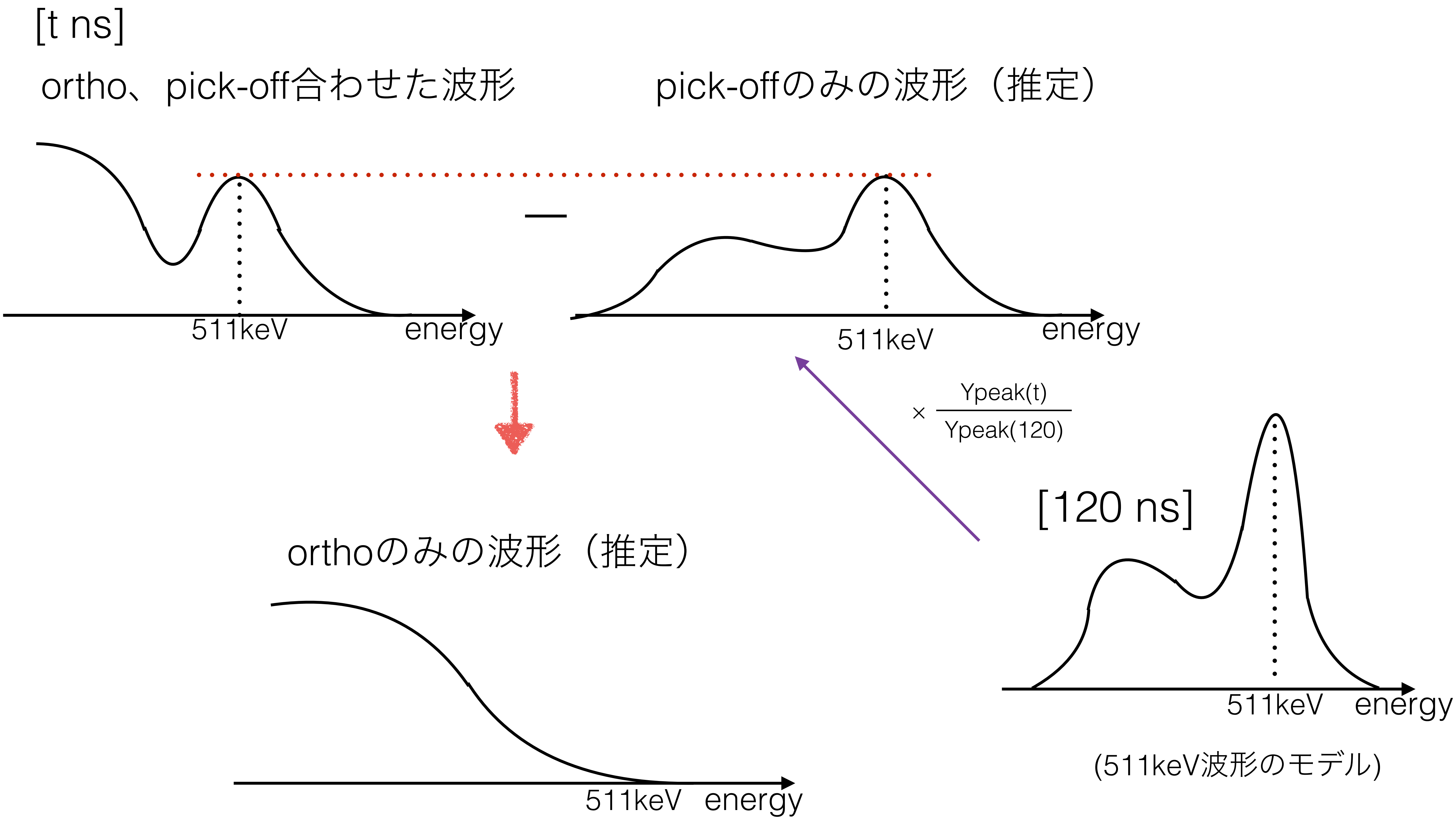
競合している！　$\Gamma_{obs} = \Gamma_{ortho} + \Gamma_{pick\text{-}off}$

３γ以外の崩壊をするオルソポジトロニウムも観測してしまうことにより、求める寿命に誤差が生じるので、その影響を評価し補正する。具体的には、観測された反応のうち競合する反応によるものが３γに対してどれくらいであるか

（ $f(t) = \Gamma_{pick\text{-}off} / \Gamma_{ortho}$ ）

を各時刻で求め、それを寿命を求めるフィッティングの式に組み込むことで補正を行う。

どう見積もるか



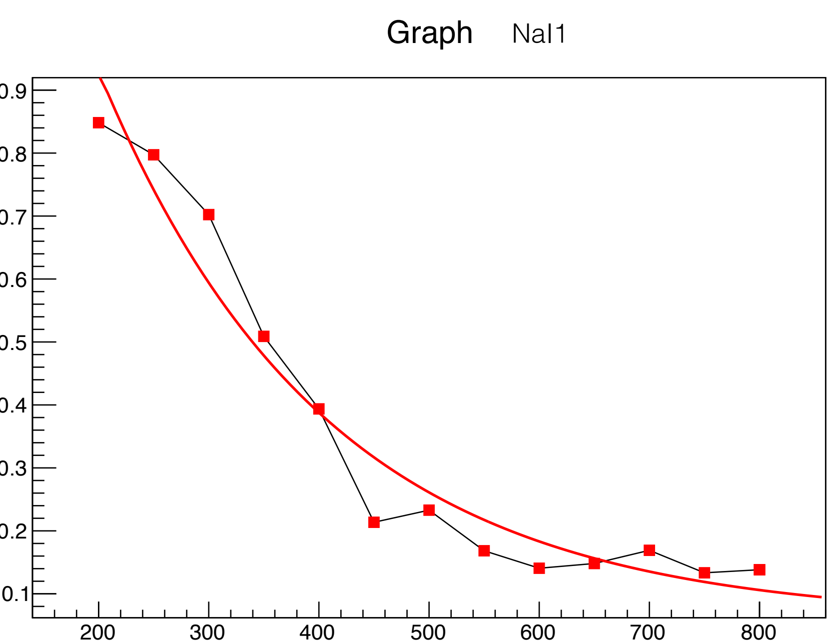
[t ns]
ortho、pick-off合わせた波形
pick-offのみの波形（推定）
511keV
energy
511keV
energy
−
$\times \frac{\mathrm{Ypeak(t)}}{\mathrm{Ypeak(120)}}$
[120 ns]
511keV
energy
(511keV波形のモデル)
orthoのみの波形（推定）
511keV
energy

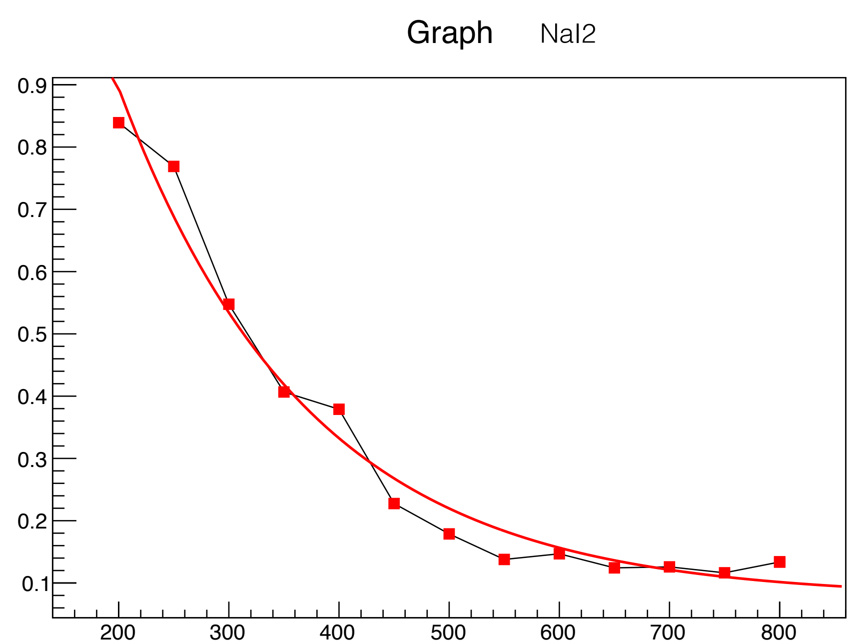
pick-off補正関数のfitting

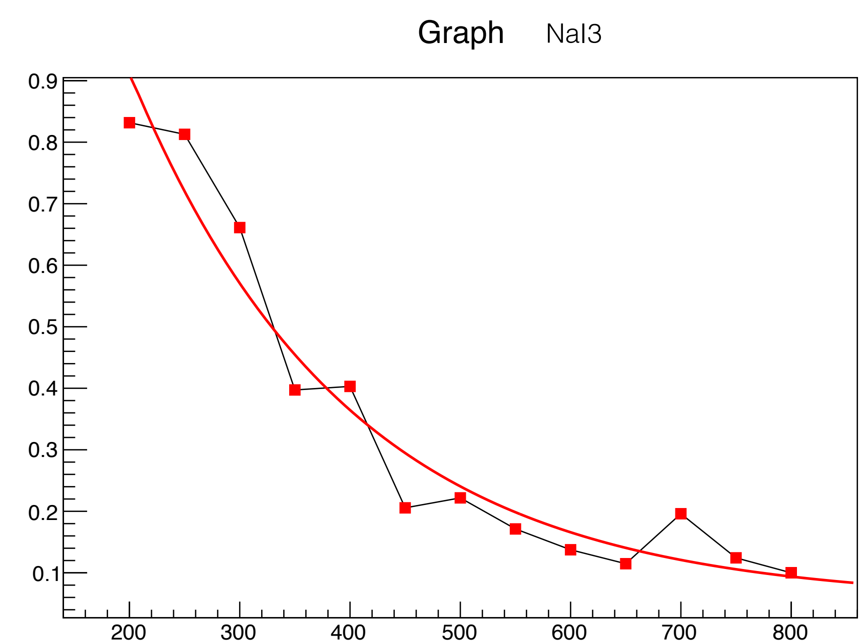
$$f(t) = \Gamma\text{pick-off} / \Gamma\text{ortho} = N\text{pick-off} / N\text{ortho}$$

$$f(t) = p0 * \exp(-Time/p1) + p2$$

でフィッティング







pick-off補正関数

NaI1	$2.307\times\exp(-t/205)+0.059$
NaI2	$2.620\times\exp(-t/172)+0.076$
NaI3	$2.374\times\exp(-t/197)+0.053$

寿命を求める式

崩壊幅の定義より、

$$\frac{dN(t)}{dt} = -N(t) \times (\Gamma_{ortho} + \Gamma_{pick-off}) = \frac{N(t)}{t_{ortho}} \times (1 + f(t))$$

解いて、

$$N(t) = exp(-\frac{1}{t_ortho}\int dt(1 + f(t)))$$

観測しているのは崩壊したo-Psであるから、

-dN(t) / dt を求める（微分する）。

$$-\frac{dN(t)}{dt} = N_0(1 + f(t)) \times exp(-\frac{1}{t_{ortho}}\int dt(1 + f(t)))$$

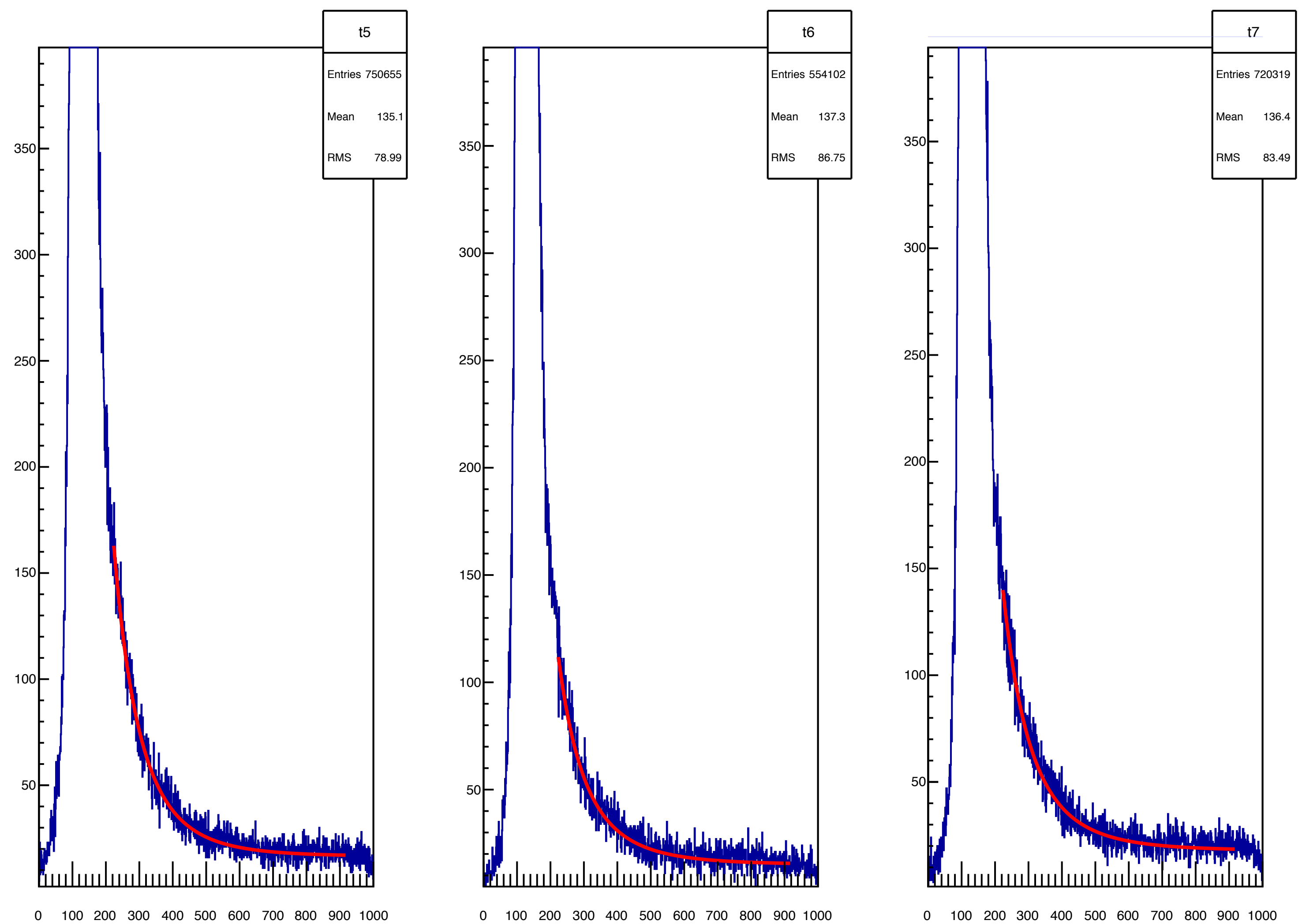
定数をパラメーターに

置き換えて、

$$p_0(1 + f(t))exp(-\frac{1}{p_1}\int dt(1 + f(t))) + p_2$$

この式でフィッティングを行った。

p1が寿命である。



pick-off補正後の寿命のfitting

pick-off補正後の寿命

NaI1	169.9 ± 3.7 (ns)
NaI2	176.5 ± 5.4 (ns)
NaI3	179.5 ± 4.5 (ns)

5.考察
誤差の評価

誤差伝搬の公式

$$\text{where } q = q(x_1, \cdots x_n)$$

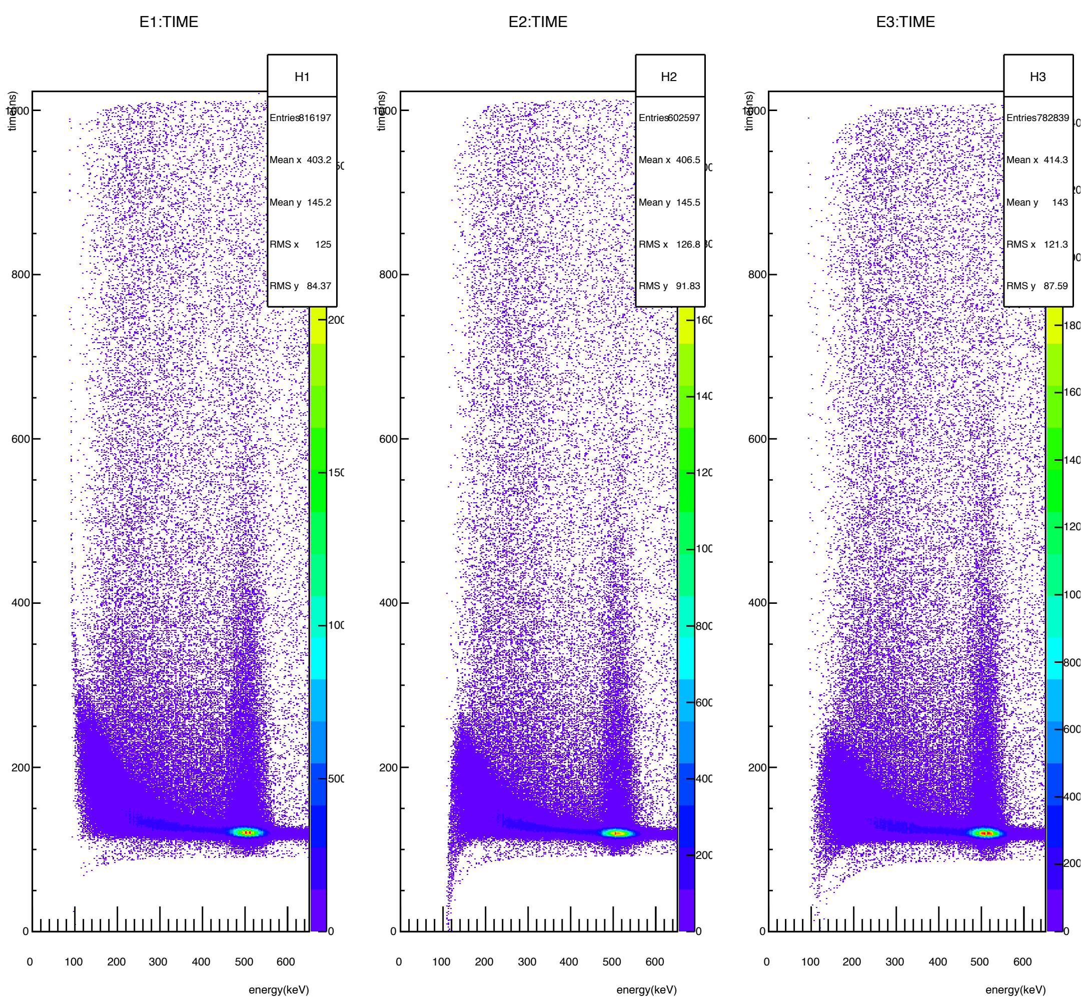
$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x_1}\delta x_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial q}{\partial x_n}\delta x_n\right)^2}$$

を用いて解析によって生じる統計的な誤差を評価する。
TQ補正関数ΔTにこの公式を用いると

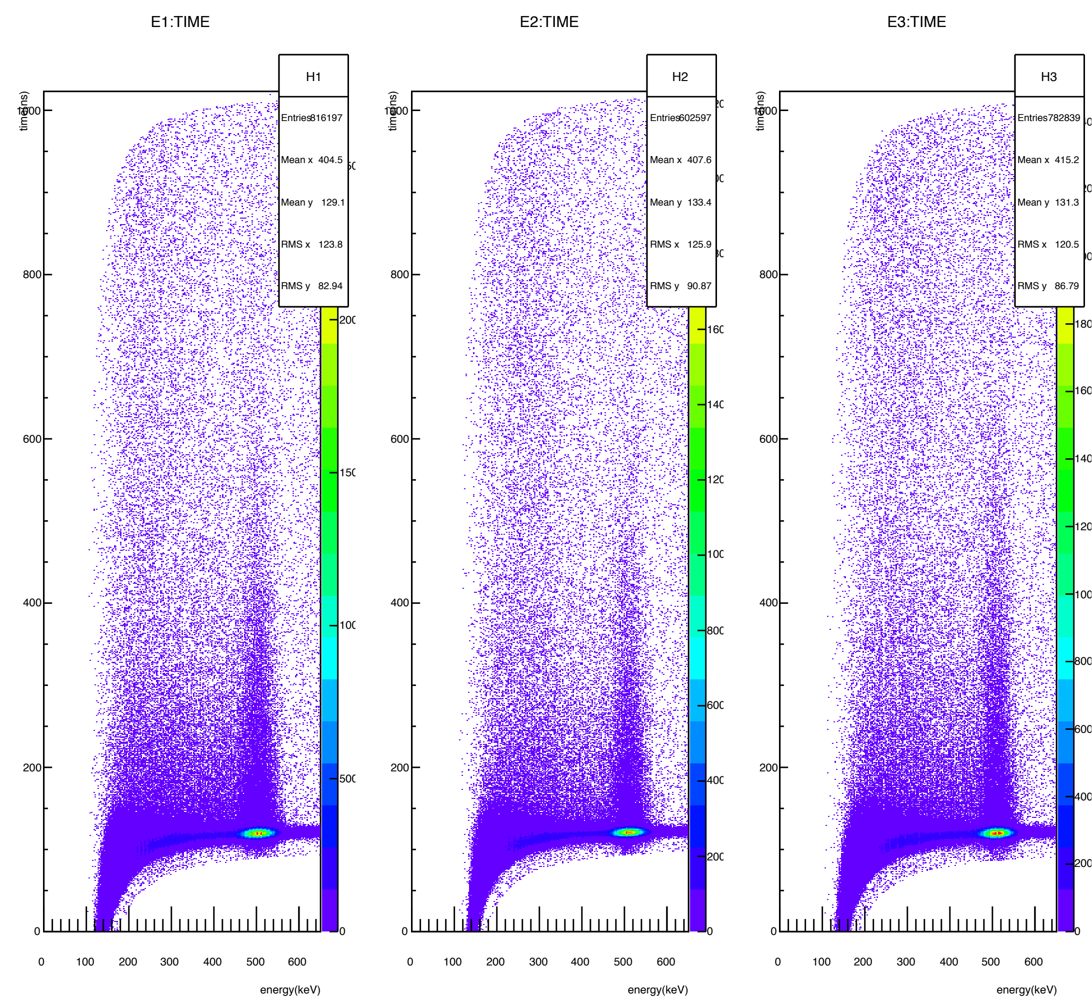
$$\Delta T = \frac{p_0}{(E - p_1)^{p_2}}$$

$$\begin{aligned}\delta\Delta T &= \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta T}{\partial p_0}\delta p_0\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial p_1}\delta p_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial p_2}\delta p_2\right)^2} \\ &= \frac{p_0}{(E - p_1)^{p_2}}\sqrt{\left(\frac{\delta p_0}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{E - p_1}\delta p_1\right)^2 + (\log{(E - p_1)}\delta p_2)^2}\end{aligned}$$

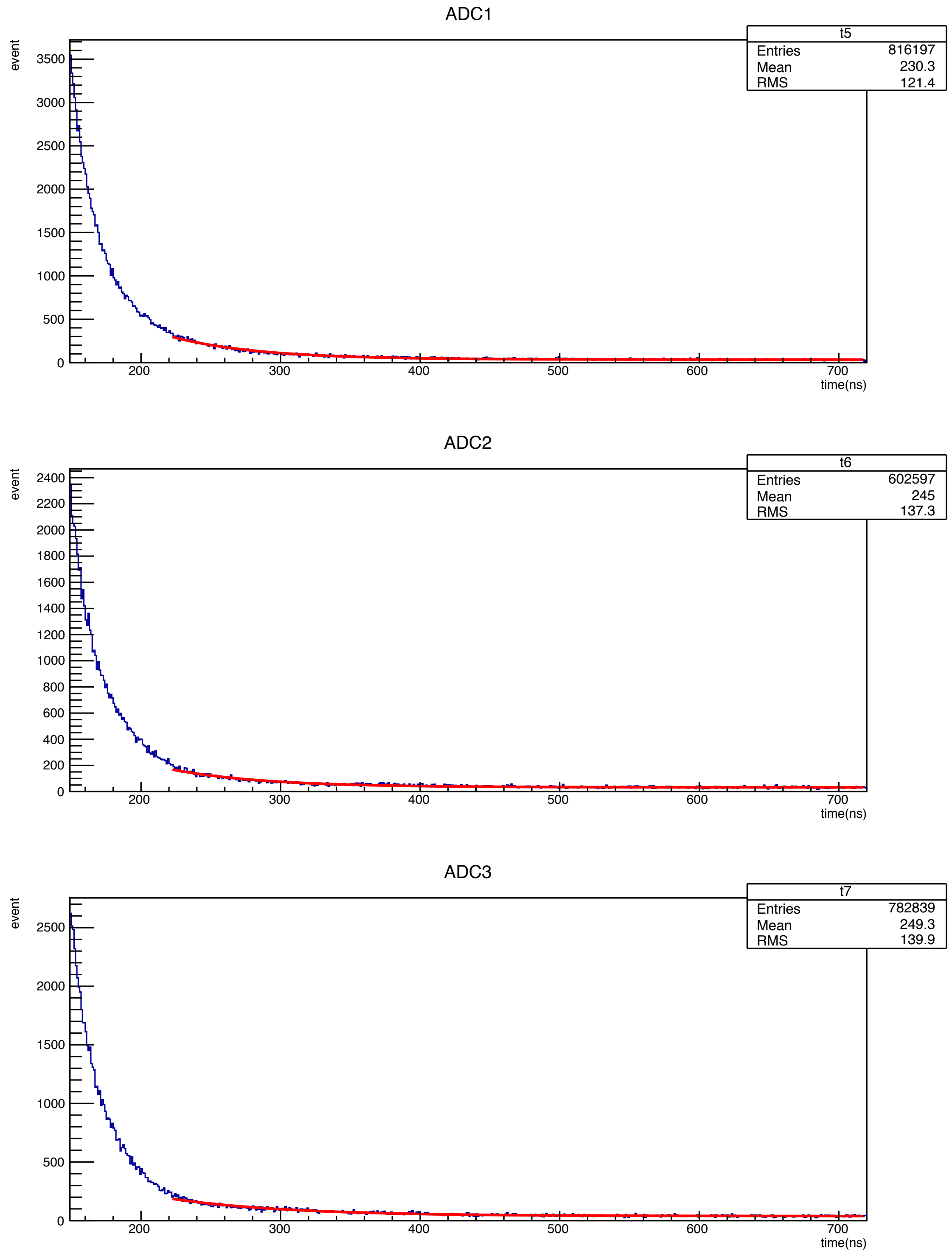
前項で得られたδΔTを導入した新たなTQ補正関数ΔT+δΔT、ΔT-δΔTでTQ補正し、TQ補正の誤差を考慮した寿命を求める。



ΔT-δΔT

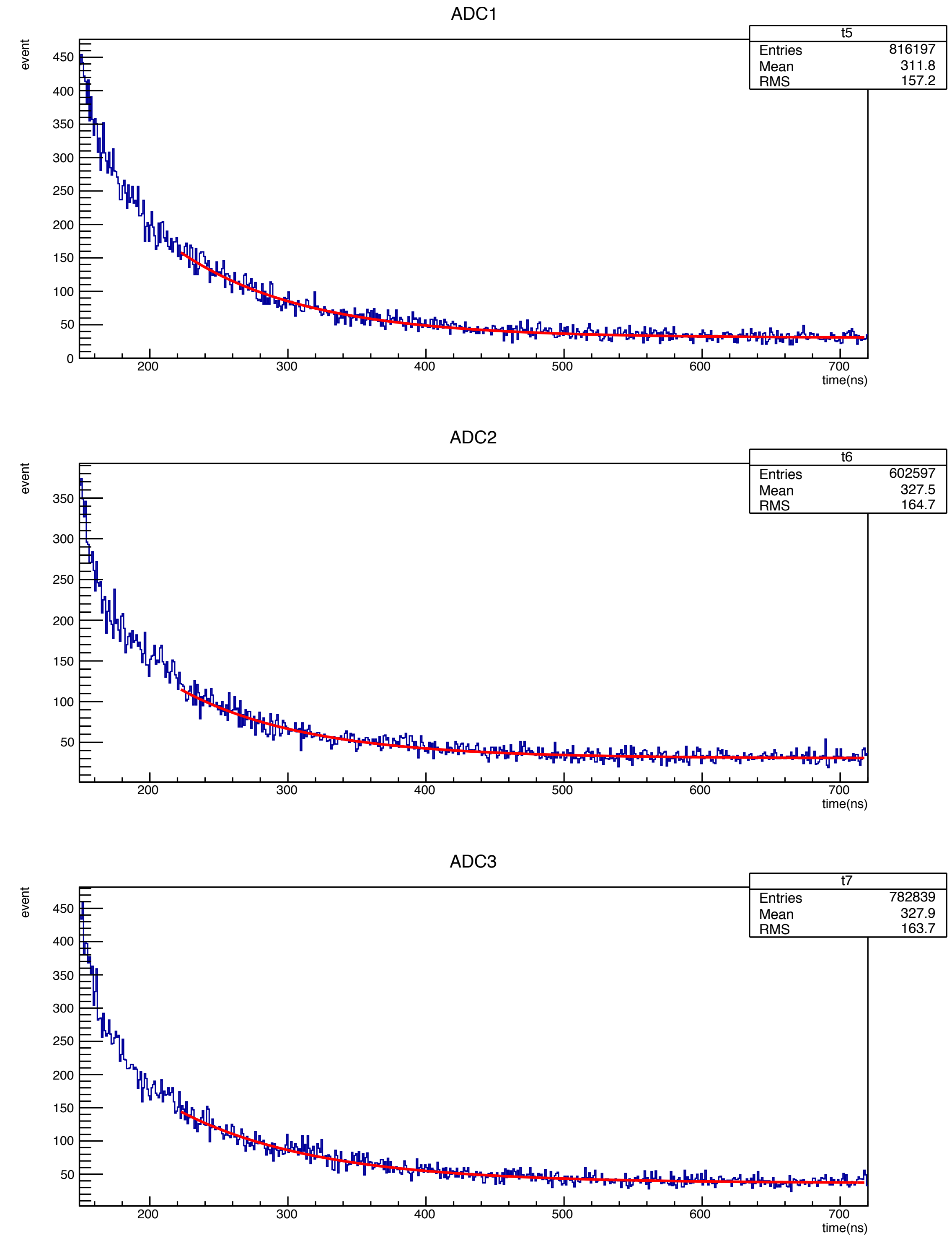


ΔT+δΔT



ΔT-δΔTによる補正

ADC1:62.5ns
ADC2:67.1ns
ADC3:85.2ns



ΔT+δΔTによる補正

ADC1:91.4ns
ADC2:91.5ns
ADC3:100ns

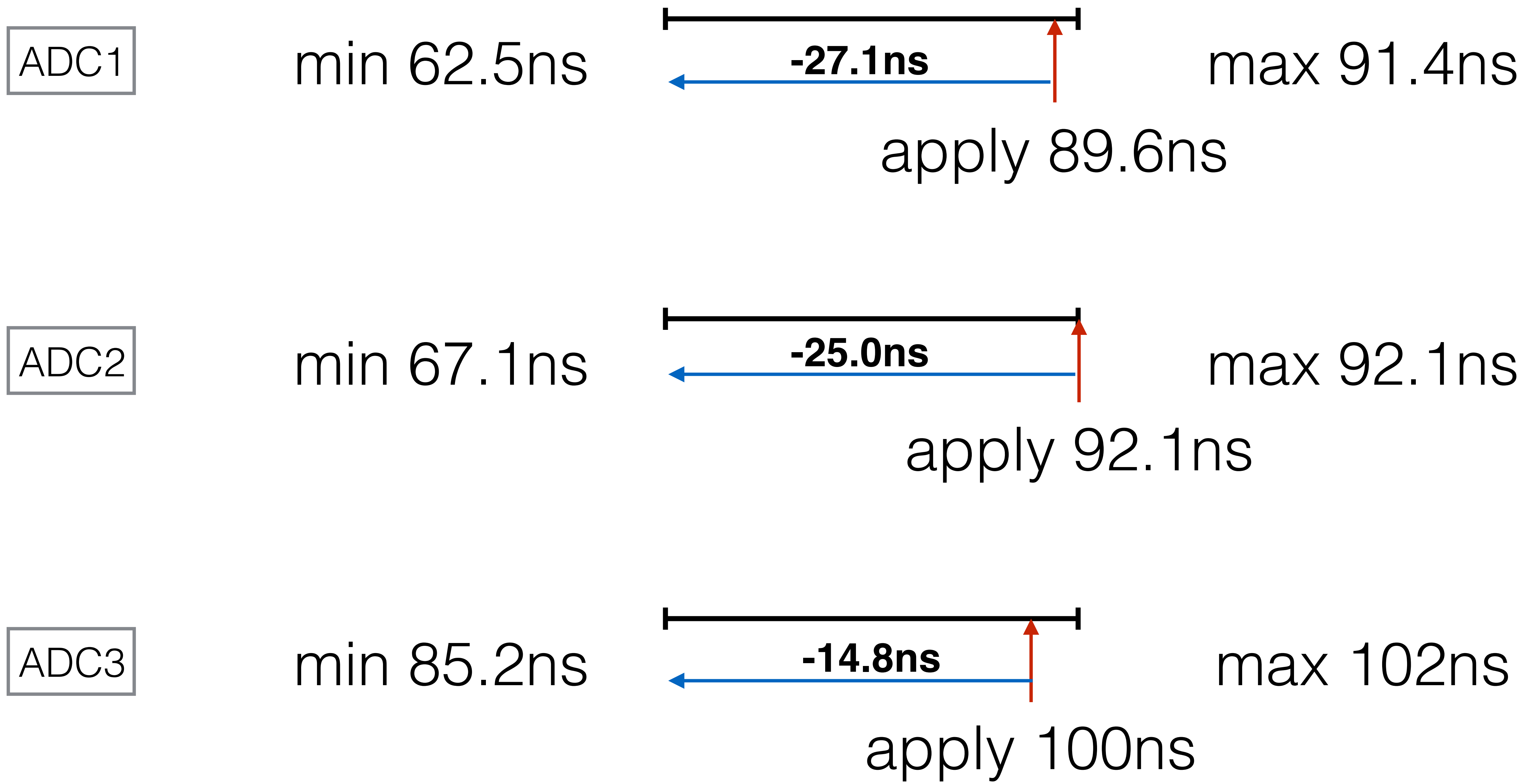
ADC2について誤差を正にとっても負にとっても誤差を考慮しない場合の寿命92.1nsよりも短い値が出ている。
確かに誤差に対する寿命の応答は単調なものではないはずなのでもう少し細かく

$\Delta T-\delta\Delta T$、$\Delta T-(3/4)\delta\Delta T$、$\Delta T-(1/2)\delta\Delta T$、…、$\Delta T+\delta\Delta T$

とTQ補正関数の誤差を1/4刻みで変えながら寿命に対する影響を見た。

	-δ	-(3/4)δ	-(1/2)δ	-(1/4)δ	誤差補正なし	(1/4)δ	(1/2)δ	(3/4)δ	δ
ADC1	62.5	74.0	84.9	89.5	89.6	90.6	90.0	90.5	91.4
ADC2	67.1	78.1	84.6	87.9	92.1	89.3	91.6	90.5	91.5
ADC3	85.2	94.9	98.1	99.6	100	100	102	101	100

誤差による寿命の補正の幅はADC1で-27.1nsから+1.8ns、ADC2で-25.0nsから+0ns、ADC3で-14.8nsから+2nsとなった表を見ても分かるように誤差を動かしても長寿命側にはほとんど振れないのに対して短寿命側には大きく振れることが分かる。



このように今回採用したTQ補正関数は誤差の幅の中では長寿命を得やすいものになっていることが分かる。

TQ補正の誤差と同様にpick-off補正関数f(t)の誤差を考慮したフィッティング関数g+δg,g+(3/4)δg,g+(1/2)δg,…,g-δgによって寿命を求めた。ここでTQ補正式としては誤差を考慮したものでなく前章と同じものを使っている。

$$g = p_0(1+f(t))\exp\left(-\frac{1}{p_1}\int dt\,(1+f(t))\right)+p_2$$

$$f(t) = q_0\exp\left(-\frac{t}{q_1}\right)+q_2$$

$$\begin{aligned}
\delta g =& p_0\exp\left\{-\frac{1}{p_1}\left(t(1+q_2)-q_0q_1\exp\left(-\frac{t}{q_1}\right)\right)\right\} \\
&\times\left[\left\{\exp\left(-\frac{t}{q_1}\right)\left(1+\frac{q_1}{p_1}\left(1+q_0\exp\left(-\frac{t}{q_1}\right)+q_2\right)\right)\delta q_0\right\}^2\right. \\
&\quad+\left\{q_0\exp\left(-\frac{t}{q_1}\right)\left(\frac{t}{q_1^2}+\frac{1}{p_1}\left(1+\frac{t}{q_1}\right)\left(1+q_0\exp\left(-\frac{t}{q_1}\right)+q_2\right)\right)\delta q_1\right\}^2 \\
&\quad\left.+\left\{\left(1-\frac{t}{p_1}\left(1+q_0\exp\left(-\frac{t}{q_1}\right)+q_2\right)\right)\delta q_2\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

	-δ	-(3/4)δ	-(1/2)δ	-(1/4)δ	誤差補正なし	(1/4)δ	(1/2)δ	(3/4)δ	δ
ADC1	226	206	182	151	170	196	205	210	213
ADC2	212	193	170	142	177	207	219	226	231
ADC3	233	209	183	151	180	210	221	228	232

pick-off補正関数の誤差による寿命の幅はADC1で-19nsから+56ns、ADC2で-35nsから+54ns、ADC3で-29nsから+53nsとなった。

以上で求めたTQ補正に由来する誤差、pick-off補正関数に由来する誤差に加えて最終的なフィッティングによる誤差を正負に分けて以下の式で統合する。

$$\sigma_1^+ = \sqrt{\left(\sigma_{TQ1}^+\right)^2 + \left(\sigma_{po1}^+\right)^2 + \left(\sigma_{fitting1}\right)^2}$$

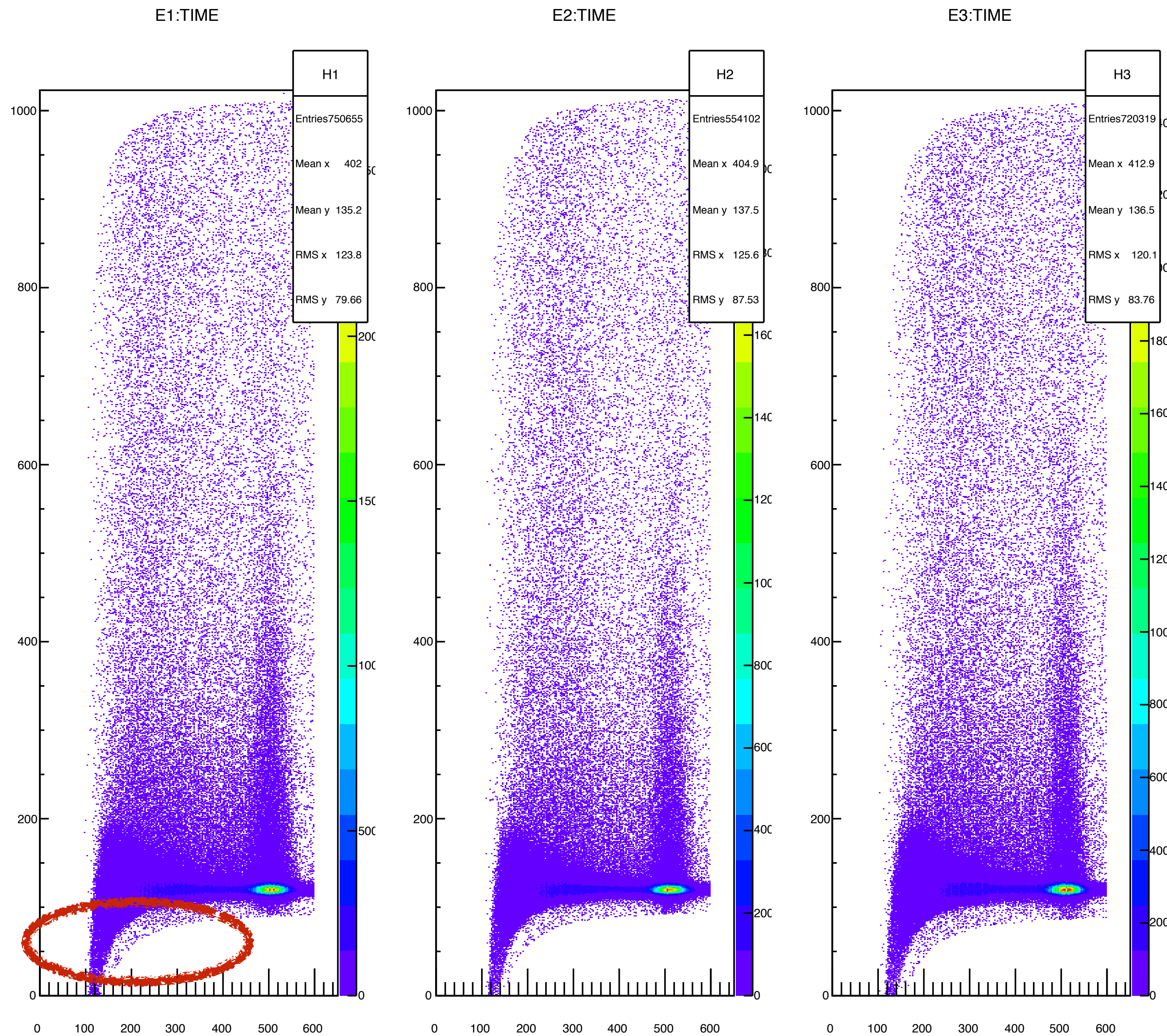
計算結果は以下のようになる。

$$\begin{array}{ll} \sigma_1^+ = 56.2 & \sigma_1^- = 33.3 \\ \sigma_2^+ = 54.3 & \sigma_2^- = 43.3 \\ \sigma_3^+ = 53.2 & \sigma_3^- = 32.9 \end{array}$$

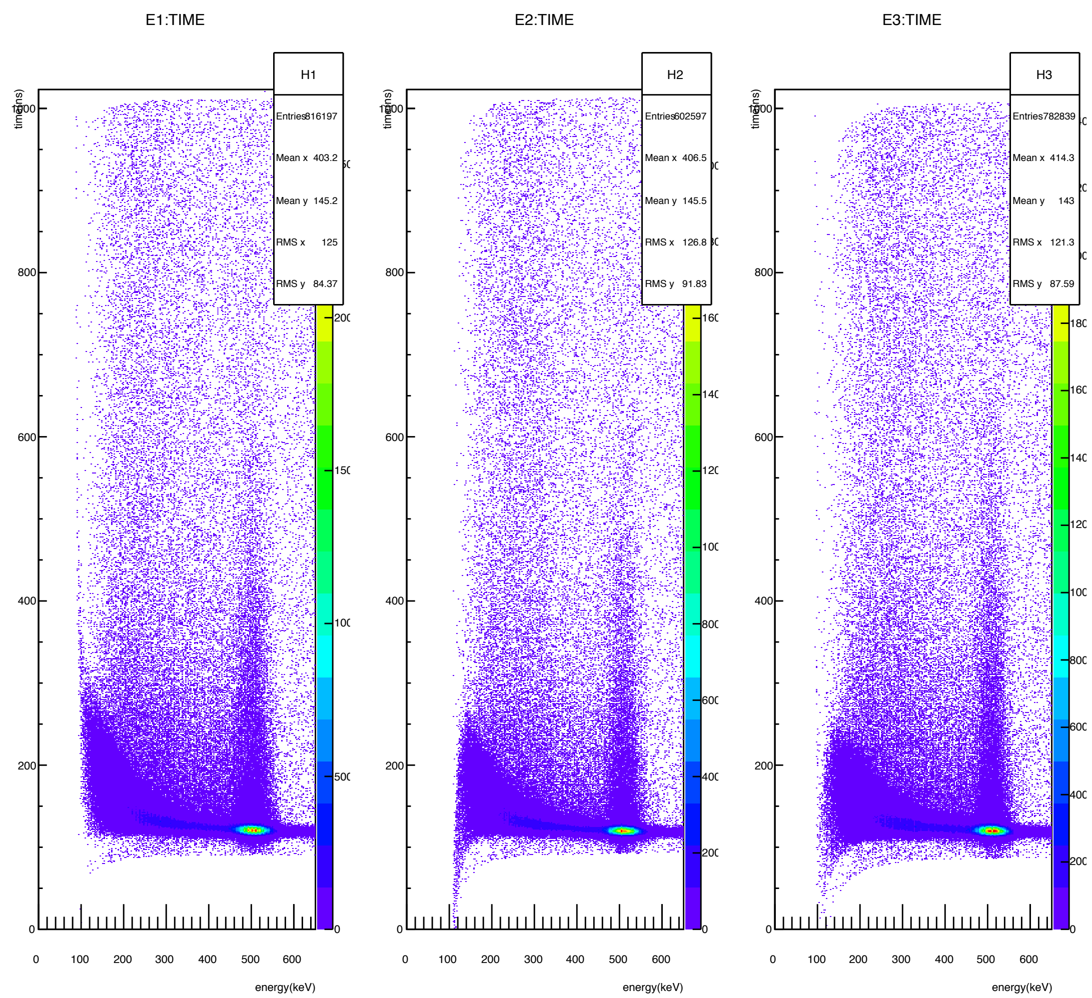
誤差伝搬を考慮した寿命

NaI1	$169.9^{+56.2}_{-33.3}$ (ns)
NaI2	$176.5^{+54.3}_{-43.3}$ (ns)
NaI3	$179.5^{+53.2}_{-32.9}$ (ns)

前章のNaI3の解析によって得られた寿命の値は179.5nsであり、理論値はこの統計誤差の中に入らない。また、他の2つについても測定値が理論値より長い傾向にある。



TQ補正後のエネルギー対時間の二次元分布図をもう一度見てみると120nsよりも短い時間範囲に分布がある。
寿命算出のためのフィッティングにはこの範囲を含まないため実質的にここのデータは捨てている事になる。



ΔT-δΔT

先に確認したとおりこの関数でTQ補正を行うとδΔTを考慮しなかった場合に比べて短い寿命が出る。

→スレッショルドを下げれば測定される時間が真の値に近づきTQ補正関数の重みが減るためこの問題を修正できると期待される。

ご静聴ありがとうございました

2.2　ポジトロニウムの崩壊

荷電共役変換（C 変換）の下での演算子の関係は、

$$b^{(s)\dagger} \leftrightarrows d^{(s)\dagger} \tag{2.1}$$

となる。但し、$b^{(s)\dagger}$ は電子の生成演算子、$d^{(s)\dagger}$ は陽電子の生成演算子である。
相対運動量がゼロの系を考えると、3 重項状態は次のように変換する。

$$\begin{aligned}(\uparrow)_{\mathrm{e}^-}(\uparrow)_{\mathrm{e}^+} &= b^{(1)\dagger}(\mathbf{0})d^{(1)\dagger}(\mathbf{0})\,|0\rangle \\ &\xrightarrow{\text{charge conj}} d^{(1)\dagger}(\mathbf{0})b^{(1)\mathbf{0}}(\mathbf{0})\,|0\rangle = -b^{(1)\dagger}(\mathbf{0})d^{(1)\dagger}(\mathbf{0})\,|0\rangle\end{aligned} \tag{2.2}$$

したがって 3 重項状態の C-パリティは奇である。同様にして 1 重項状態の C-パリティが偶であることも確認できる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}[(\uparrow)_{\mathrm{e}^-}(\downarrow)_{\mathrm{e}^+} - (\downarrow)_{\mathrm{e}^+}(\uparrow)_{\mathrm{e}^+}] &= \frac{1}{\sqrt{2}}[b^{(1)\dagger}(\mathbf{0})d^{(2)\dagger}(\mathbf{0}) - b^{(2)\dagger}(\mathbf{0})d^{(1)\dagger}(\mathbf{0})]\,|0\rangle \\ &\xrightarrow{\text{charge conj}} \frac{1}{\sqrt{2}}[b^{(1)\dagger}(\mathbf{0})d^{(2)\dagger}(\mathbf{0}) - b^{(2)\dagger}(\mathbf{0})d^{(1)\dagger}(\mathbf{0})]\,|0\rangle\end{aligned} \tag{2.3}$$

一方 j_μ は C 変換によって符号が変わるので電磁場 A_μ は荷電共役変換に関して奇であるが、相互作用密度 $-j_\mu A_\mu$ は不変でなければならない。$\mathbf{A}$ は $a^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}$ と $a_{\mathbf{k},\alpha}$ を 1 次の形で含むので、これは横波電磁場の生成演算子と消滅演算子が荷電共役変換の元で符号を変えることを含意する。

$$a^\dagger_{\mathbf{k},\alpha} \xrightarrow{\text{charge conj}} -a^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}, \qquad a_{\mathbf{k},\alpha} \xrightarrow{\text{charge conj}} -a_{\mathbf{k},\alpha} \tag{2.4}$$

上の演算子の変換則からの直接の帰結として、偶数（奇数）の光子を含む系は、荷電共役変換に関して偶（奇）だということになる。

$$a^\dagger_{\mathbf{k}_1,\alpha_1}a^\dagger_{\mathbf{k}_2,\alpha_2}\cdots a^\dagger_{\mathbf{k}_n,\alpha_n}\,|0\rangle \xrightarrow{\text{charge conj}} (-1)^n a^\dagger_{\mathbf{k}_1,\alpha_1}a^\dagger_{\mathbf{k}_2,\alpha_2}\cdots a^\dagger_{\mathbf{k}_n,\alpha_n}\,|0\rangle \tag{2.5}$$

上の多光子系の変換則は、各光子の運動量や偏極方向にはよらずに成立する。Ps の崩壊に戻ると、相互作用が荷電共役変換の下で不変であれば、次の規則が成立する。

$$\begin{aligned} &3\,\text{重項}\ (^3S) \longrightarrow \text{奇数光子系} \\ &1\,\text{重項}\ (^1S) \longrightarrow \text{偶数光子系} \end{aligned} \tag{2.6}$$

ここで、具体的な証明は省くが、

- 運動学的に光子を 1 個だけ放出して対消滅する過程は許されない。
- QED によると相互作用の結合定数は微細構造定数であるために高次の寄与が小さくなる。

という事情により、o-Ps は 3 個の光子に、p-Ps は 2 個の光子に崩壊する。

$$^3S \to 3\gamma, \qquad ^1S \to 2\gamma \tag{2.7}$$

これを計算していくと、2 光子放射型 e^-e^+ 対消滅の断面積は

$$d\sigma = (2\pi)^4 \frac{1}{v_{\rm rel}} \frac{1}{2E_+} \frac{1}{2E_-} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2m)^2 \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - k_1 - k_2) \tag{2.28}$$

となる。したがって、スピンを平均した全断面積は

$$\begin{aligned} \sigma^{\rm tot} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega \\ &= \frac{r_0^2}{4\beta_+} 2 \times 2\pi = \frac{\pi r_0^2}{\beta_+}, \qquad (\beta_+ \ll 1) \end{aligned} \tag{2.29}$$

となる。

2.3.4 Ps の寿命

式（2.29）から Ps の寿命を計算する。まず $\sigma^{\rm tot} v_+ \rho$ という量が単位体積に電子が一つある場合の陽電子の平均寿命の逆数であるので、

$$R = \sigma^{\rm tot} v_+ \rho \tag{2.30}$$

は電子密度 ρ の下での陽電子の平均寿命の逆数にあたる。Ps の Bohr 半径が水素原子の 2 倍であるので、基底状態において、

$$\rho = |\psi_{1s}(\mathbf{x} = \mathbf{0})|^2 = \frac{1}{\pi (2a_0)^3} \tag{2.31}$$

となる。この束縛系における電子（陽電子）の速度は光速の 1/137 倍のオーダーなので、Ps の寿命を評価するために、式（2.31）において $\lim_{\beta_+ \to 0}$ を適用してよい。基底状態に関して次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} \Gamma(n = 1, {}^1S \to 2\gamma) &= \lim_{v_+ \to 0} 4\sigma^{\rm tot}_{\rm (unpol)} v_+ |\psi_{1s}(\mathbf{x} = \mathbf{0})|^2 \\ &= 4\pi (\frac{\alpha}{m})^2 \frac{1}{\pi (2/\alpha m)^3} = \frac{1}{2} \alpha^5 m \end{aligned} \tag{2.32}$$

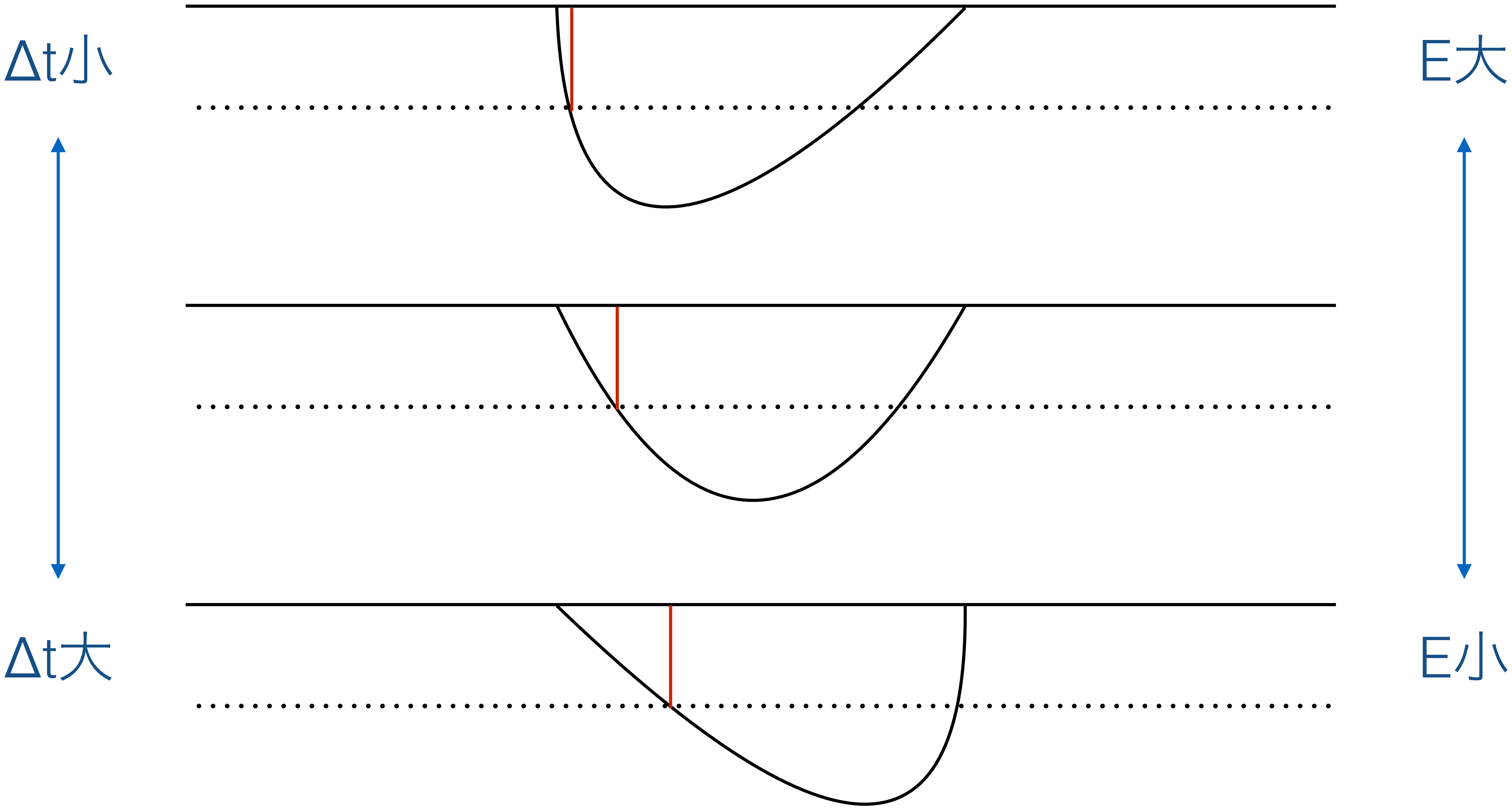
よって $n = 1$ の ${}^1S$ 状態の平均寿命は、

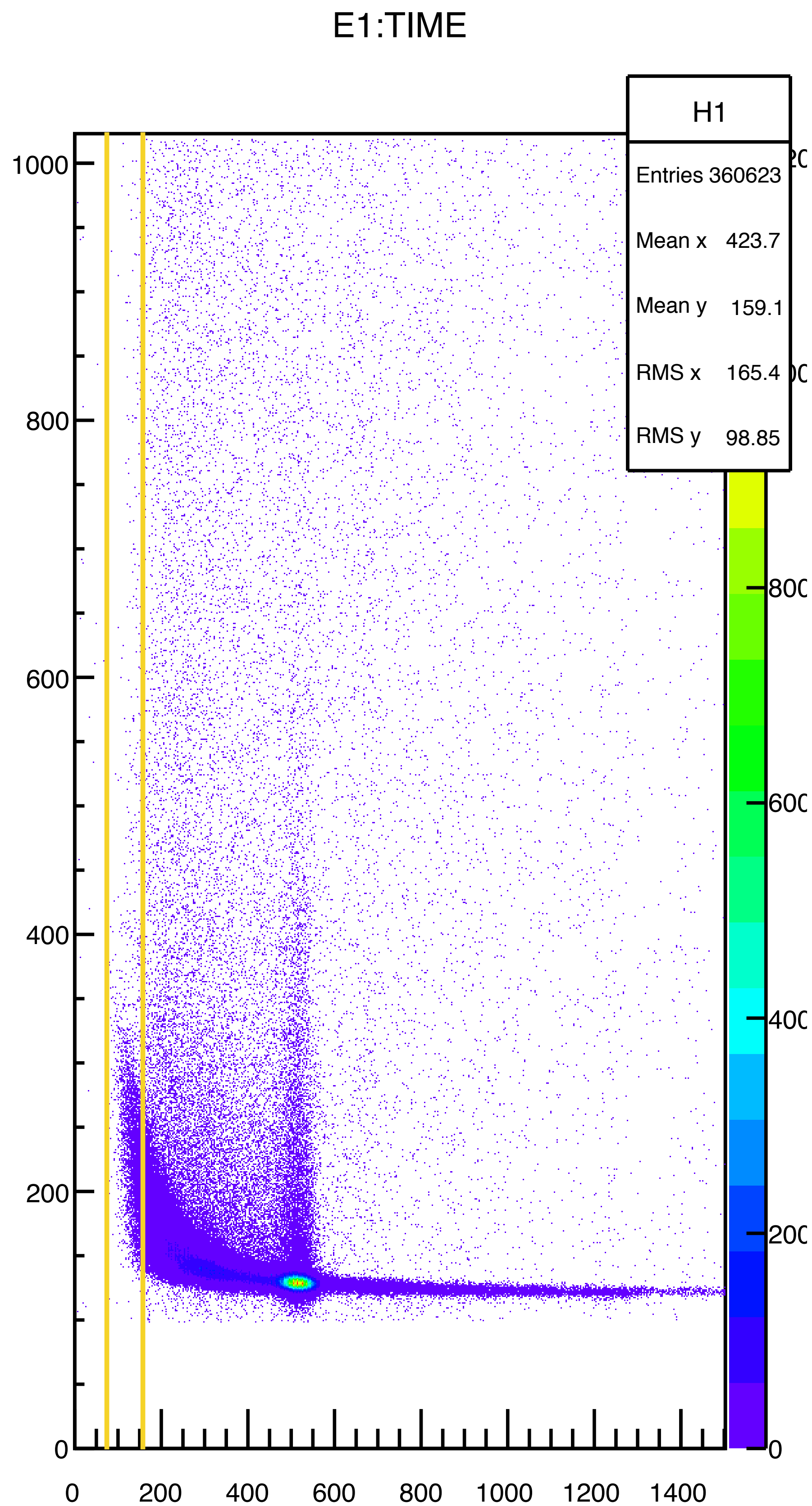
$$\tau_{\rm singlet} = \frac{2}{\alpha^5 m} \simeq 0.125 \text{ ns} \tag{2.33}$$

となる。一方 ${}^3S$ 状態は光子 3 個に崩壊するので、もうひとつ e の次数が増え、寿命が（$1/\alpha$）倍ほど長くなると予想される。実際の結果は $n = 1$ の s 波束縛状態において、次のようになる。

$$\frac{\tau_{\rm triplet}}{\tau_{\rm singlet}} = \frac{9\pi}{4(\pi^2 - 9)\alpha} \simeq 1115, \qquad \tau_{\rm triplet} \simeq 139 \text{ ns} \tag{2.34}$$

波形が時間とエネルギーの測定値に及ぼす影響





比較的tが大きい範囲にエネルギーの低いイベントがある。

→低エネルギー帯の時間分布の広がりは確かに波形に依っている？

→濃い部分が120nsに集中するならΔT-δΔTの補正で単純に上げるよりも更に寿命は短くなるはず