

はじめに

この講義(ノート)は、(円形)加速器の原理的なこと
がらについて解説することを試みたものであり、加速
器に関する詳しい理論を複雑な式で展開しようという
ものではありません。またそのような理論をのべるこ
とは筆者の任とするところではありませんので、こ
こでは加速器の原理を解説するということが、いわゆる
加速器家と呼ばれている人たちの間で使われている、
シンクロトロンやストレージリングに関する日常語を
説明することであると考えると、講義をしてみたいと思
います。

しかしながら、日常語とはいっても、若輩かつ不勉
強の筆者には、まだ知らない言葉が数多くあると思
います。また筆者の知っていることといえば、放射光実
験施設(PF)の光源リングについてだけであり、陽子
シンクロトロンやトリスタンリングに関してはほとん
ど知りません。そこで以下の解説は非常に片寄ったも
のになるのではないかと思います。みなさんの御寛
容をお願いいたします。

この講義ノートの構成は次のようです。(1).序論で
は高エネルギー物理学研究所の加速器や、外国の主な

加速器について簡単に説明し、またよく使われる言葉
や数値について説明します。次に、(2).軌道理論で、
加速器の中を回わる荷電粒子の運動についてのべます。
(3).電子ストレージリングで、電子ストレージリング
に固有のことがらについて、そして最後に(4).衝突型
リングで、リング内でビームとビームを衝突させる、高
エネルギー実験のためのストレージリングについて説
明します。

最後にこの講義で特にことわらない限り、加速器と
いえば、円形加速器、またはストレージリングを意味
し、また加速器のタイプはいわゆるセパレート(sepa-
rate)型(荷電粒子を曲げる機能と収束する機能をわけ
たタイプ)を主に意識して、話をします。

また衝突型リングについては、電子・陽電子衝突型
のリングに限って考えます。

またところどころに問題を入れましたが、ほとんどの
問題は「暗算」かちょっと手を動かすと解ける問題
です。これを解くことによって加速器の原理をより理
解することができると思います(または筆者の理解の
程度を理解できる)。

第一章 序論 (Introduction)

1-1. 高エネルギー物理学研究所の(円形)加速器 の配置(KEK Accelerator Complex)

(図1-1)にKEKの加速器の配置を示す。また(表1-
1)に各円形加速器の特性を示す(この中には国内の
他のシンクロトロンとストレージリングものっている)。
(図1-1)のまる印でかこった番号と(表1-1)との対
応は次のようである。

10番 — ブースターシンクロトロン(Booster Synchro-
tron) 通称 ブースター

かつては陽子を加速して、主リングに陽子を
わたす役割をになっていたが、現在ではそれに
加えて、ありあまる能力をブースター利用(中
性子の発生等)に使っている。

11番 — 主リング(Proton Synchrotron Main Ring)
通称 主リング, PS Main Ring 等

通称PSと呼ばれる加速器の最終段のリング
であり、12GeVまで陽子を加速する。(将来計
画も含めて)この陽子シンクロトロンを建設する

ためにKEKという研究所が作られた。

16番 — 放射光実験施設電子貯蔵リング(PF Storage
ring) 通称 PFリング

これは、電子が磁場によって曲げられるとき
出るシンクロトロン放射光の利用に供するため
の電子ストレージリングであり、世界第二の大
きさを誇る電子線形加速器(PF Linac)から2.5
GeV 電子の供給を受けている。

18番 — トリスタン蓄積リング(Accumulation Ring)
通称 AR

PF Linacからの電子、陽電子を蓄積・加速
して、トリスタン主リングに電子、陽電子を渡
す役割をになっている。また放射光の利用も計
画されている。

19番 — トリスタン主リング(Tristan Main Ring)
通称 MR, トリスタンMR 等

現在建設中の電子・陽電子衝突型の巨大リ
ングであり、高エネルギー実験に供される世界有

数のリングであり、予定どおり建設されれば、その時点で電子・陽電子リングとして世界最高のエネルギーを誇ることになるだろう。

ここで、KEKの(円形)加速器のおおよその大きさをおぼえる方法を示そう。(筆者はすぐ忘れるので、おぼえるのに苦労した。もっとよい方法があったら教えて下さい。)

まずPS主リングの直径は108 mであるが、これは百八何とかとおぼえると絶対に忘れない。ブースターは、主リングの直径を9で割ると12mとなるが、これをさらに2で割るとブースターの半径6mがでる(これを絶対、6でなしとおぼえてはいけない。)。トリスタンMRの大きさは、ちょっと精度がわるいが今度は主リングを9倍すればよい。リングの周長でいえば約3km(正確には、3018m)であるので周長が3kmとおぼえてもよい。ARの周長は、自由空間の特性インピーダンスの数値(オーム単位で)とほぼ同じ数値377(m)である。またはよく使われる 120π とおぼえるとよい。そしてARを2で割ると、ほぼPFリング(周長187m)の大きさになる。(できの悪い模範解答を2つ。みななかよくAR。いちやでならずPFリング。)

さてブースターはKEKの他の加速器とちがった特徴をもっている。一つは、粒子を曲げる機能と収束する機能をもともにもつ電磁石(これをcombined型のmagnetという)によって作られているということである。

他の加速器では、曲げる機能をもつ電磁石と収束する機能をもつ電磁石とがあり、それぞれに電源が必要であるが、ブースターのような両方の機能を一つにした電磁石をもつ加速器(combined functionの加速器)では、そのための電源が一つですむという利点がある。ただし、曲げる機能と収束する機能が分離されていないので、大幅に収束の強さを変更することはできない。

これらの機能を分離した加速器をseparate function型の加速器といい、ブースター以外のKEKの加速器(およびストレージリング)はこの型のものであり、国外でも最近建設された、または建設中の大型リングはすべてこの型である。

もう一つのブースターの特徴は他の加速器よりくり返しの時間(加速を始めて、次に加速が行われるまでの時間)が短いことである((表1-1)をみよ)。このような速いくり返しのことをrapid cyclingといい、短いくり返し時間を得るために、電磁石電源はLC共振型の電源が使われ、電磁石の磁場の強さが時間とともにsine関数的に変化する。他の加速器のくり返しの時間は1秒以上であり、特に貯蔵リング(storage ring)では、数時間におよぶ。たとえばPS Main Ringの場合、カウンター実験のために、12GeVまで加速された

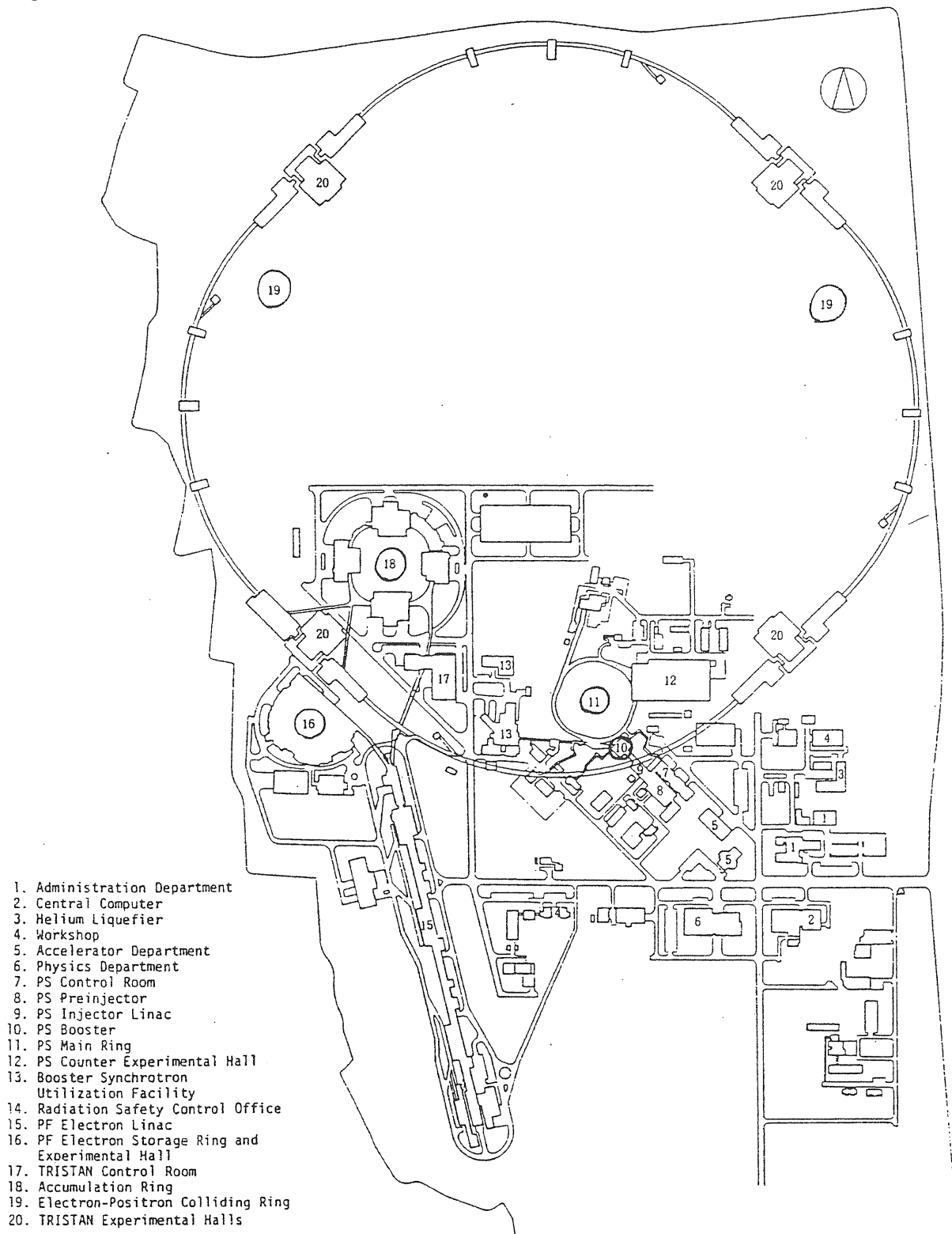
陽子ビームをゆっくりととりだす必要がある。このため約1秒程度電磁石の磁場の強さを12GeVに相当する強さに保持している必要がある。この間磁場の強さが一定で最高である。これをflat topという。そしてこのようにゆっくりしたくり返しをslow cyclingといい、電源としてはサイリスタ電源がよく使われる。PFリングでは、サイリスタのだすノイズをきらって、すべての電磁石電源にトランジスタ電源が使われている。そしてこのことはPFリングが世界の中で最も安定したシンクロトロン光を供給するリングの一つに上げられる一要因であると考えられている。

また、rapid cyclingの加速器では、磁場の急変にともなう渦電流(eddy current)をさまたげるために、真空チェンバーを波形状にすることや、また電磁石を積層した鉄板で作ること等が必要である。ちなみにPFリングではブロックの鉄で電磁石が作られている。

KEKの(円形)加速器は陽子を加速したり、電子を加速したり蓄積したり、またcombined型だったり、seperate型だったり、その上利用目的も多種多様であるが、そこにはいくつかの共通点がある。たとえばすべて、荷電粒子が回っているというあたり前の共通点である。しかし、あたり前の共通点を除けば、たぶん唯一の共通点は、すべての加速器は強収れん(strong focusing)、の加速器ということである(今ではあたり前であるが)。

強収れんの加速器とは次章で詳しく説明するが、強い収束力と発散力をリング内に適当に配置することによって、弱い収束力のみときより強い収束力を得ている加速器のことである。そして強収れんの加速器に対して、弱い収束力しかもたない加速器を弱収れん(weak focusing)の加速という。この強収れんの原理の発見(Courant, Snyder, Livingston)によって、ビームを強くしぼることが可能になり、そのため電磁石がたいへん小さくてすむようになった。今日の(円形)加速器の発展はこの強収れんの原理によってもたらされたといっても過言ではない。もちろん技術の集積および技術革新なくして今日の加速器は存在しないが、現在のどんな巨大な円形加速器もこの原理に基づいて設計されたもので、それ以上のものではない。これはちょうど今日の電子計算機の場合と同様であり、最先端の技術が使われている大型コンピュータのアーキテクチャーは、いろいろな新しい考え方の導入にもかかわらず、Von Neumanの「原理」を越えていないといえる。非Neuman計算機に対する、非Courant加速器というものが将来できるかもしれない。

Buildings



1. Administration Department
2. Central Computer
3. Helium Liquefier
4. Workshop
5. Accelerator Department
6. Physics Department
7. PS Control Room
8. PS Preinjector
9. PS Injector Linac
10. PS Booster
11. PS Main Ring
12. PS Counter Experimental Hall
13. Booster Synchrotron Utilization Facility
14. Radiation Safety Control Office
15. PF Electron Linac
16. PF Electron Storage Ring and Experimental Hall
17. TRISTAN Control Room
18. Accumulation Ring
19. Electron-Positron Colliding Ring
20. TRISTAN Experimental Halls

☒ 1 - 1. KEK Annual Report 1982より転載 p.7.

表1-1. 日本のシンクロトロンおよび貯蔵リング

研究機関	完成年・月	加速器の種類	入射エネルギー	最高エネルギー	ビーム強度 またはルミネシ タンス	くり返しま たはビーム 貯蔵時間	リングの 周長	偏向磁石 中の曲率 半径	長い直線 部の数と 長さ	加速高周波 の周波数	主な実験用ビームライン
東大核研・電子シンクロトロン	1961・12	電子シンクロトロン	15 MeV	1.3 GeV	1×10^{11} 個 /パルス	20パルス/s	34.7m	4.0m	8×1.2m	138 MHz	・制動放射α線2本 ・エネルギー指標付α線1本
KEK・ブースターシンクロトロン	1974・12	陽子シンクロトロン	20 MeV	500 MeV	6×10^{11} 個 /パルス	20パルス/s	37.7m	3.3m	8×2.0m	16~6.0MHz	・ブースター利用施設 ・冷〜熱外中性子線(0.5 MeV~20eV) ・ μ^\pm ビーム(静止)・陽子線(150~300 MeV)
KEK・主リング	1976・3	陽子シンクロトロン	500 MeV	12 GeV	4×10^{12} 個 /パルス	2.5s/パルス	339m	24.4m	8×5.46m	60~7.9MHz	・p, \bar{p} , K^\pm , π^\pm (1~2 GeV/c) 1本 ・ \bar{p} , \bar{p} , K^\pm , π^\pm (0.5~1 GeV/c) 1本 ・ π^\pm (4~8 GeV/c) 1本 ・ π^\pm , μ^\pm (0.15~0.3 GeV/c) 1本
KEK・トリスタ ン入射蓄積リング	*1983・11	電子・陽電子 ビーム衝突リ ング	2.5 GeV	*8 GeV	* 2.5×10^{11} 個/パルス	*30~60s /パルス	377m	23.2m	4×19m	508 MHz	・電子—陽電子ビーム衝突実験(2.5~6.5 GeV) 2セクション
KEK・トリスタ ン主リング	*1986・10	電子・陽電子 ビーム衝突リ ング	8 GeV	*30 GeV	* 8×10^{31} cm ⁻² s ⁻¹	*3~6時 間	3018m	246m	4×194m	508 MHz	・電子—陽電子ビーム衝突実験(15~30 GeV) 4セクション
物性研・SORリ ング	1974・12	電子貯蔵リ ング	308 MeV	380 MeV	300 mA	3時間 (300 mA)	17.4m	2.77m	4×1.31m	120.8 MHz	・リング偏向磁石* 6本
KEK・フォトン ファクトリー	1982・3	電子貯蔵リ ング	2.5 GeV	3.0 GeV	250 mA	8時間 (100 mA)	187m	8.66m	2×5.0m 8×3.6m	500 MHz	・リング偏向磁石* 7本 ・ウィグラー* 1本 ・アンジュレーター* 1本
電総研・TERAS	1981・10	電子貯蔵リ ング	300 MeV	600 MeV	160 mA	4.5時間 (70 mA)	31.45m	2.0m	4×1.9m 4×2.8m	162.1 MHz	・リング偏向磁石* 10本
分子科学研・入射 シンクロトロン	1983・8	電子シンクロ トロン	15 MeV	600 MeV	2.8×10^{10} 個/パルス	1~3パ ルス/s	26.6m	1.8m	6×1.4m	90.1 MHz	
分子科学研・UV- SORリング	*1983・10	電子貯蔵リ ング	600 MeV	750 MeV	*500 mA	*3時間 (500 mA)	53.2m	2.2m	8×0.9m 4×3.5m	90.1 MHz	・リング偏向磁石* 16本 ・ウィグラー* 1本 ・アンジュレーター* 1本

木村嘉孝：シンクロトロンと貯蔵リング，日本物理学会誌 第39巻 第4号，p. 254より転載

1-2. 外国の主なシンクロトロンとストレージリング

ここでは外国の主なシンクロトロンとストレージリングについて名称をあげるくらいの簡単な説明をする。これは筆者の思いつくままに名前をあげるのであって、完ぺきを期すつもりは全然ない。そして筆者が全く知識をもっていないソ連の加速器、IHEP等についてはのべない。また主に大きなリングのみ説明する。

(図1-2)はいくらか古いが、高エネルギー加速器の建設された年と、その加速器のエネルギーを図示したものである。

(注、図で黒まるは既に完成した加速器であるが、ここでSPS-PPは既に完成し、 Z^0 、 W^\pm の発見を成しとげた。またDOUBLERも完成し、約800GeVの陽子ビームを得ている。また、ISABELLEの計画はつぶれた。)

(a) CERN (ジュネーブの近くにあるスイスとフランスにまたがるヨーロッパの合同研究所)

(1) CPS

これはエネルギー28GeVをもつ陽子シンクロトロンであり、1960年にまさにならうとする時に完成した、強収束のcombined型の加速器であるが、現在でもCERNの中核を成しており、他の大型加速器に陽子ビームを供給している、最年長の加速器の一つである。直径200mである。

(2) ISR

これはIntersecting Storage Ringの略称であるが、その名の示す通り、2つのリングが交差する陽子・陽子衝突型のストレージリングであり、28GeVをもつ陽子ビーム同士がリングの8ヶ所でぶつかるようになっている。また、エネルギーは最高約30GeVまでいっている。直径はCPSの1.5倍である。そしてISRは1970年代始めから現在にいたるまで世界で唯一の陽子・陽子衝突型リングである。これもまたcombined型の加速器であるが、つい最近運転を停止した。

(3) SPS

1970年代前半に完成したSuper Proton Synchrotronの略称で、直径2.2kmの巨大シンクロトロンで最高エネルギーは約450GeVである。

リングの大きさでは現在世界最大である。これはseparate型である(以下ことわらない限りseparate型である)。

(4) SP \bar{P} S

SPSを改造して、このリングで陽子・反陽子衝突を行うようにしたリングのことである。これは270GeVの陽子と270GeVの反陽子が衝突する、現在では世

界最大の衝突エネルギー(重心系のエネルギー)を誇る、唯一の陽子・反陽子リングである。

(5) LEP

これは現在建設中の超巨大リングで、周長27kmにおよぶ、電子、陽電子衝突リングである。エネルギーは、第一段階として50GeVを、そしてそのあとには100GeV以上をねらおうという大計画である。そして50GeVのビームを1988年のうちにリングの中で回らすことを目標にしている。

またこのリングのトンネルの中に超伝導の電磁石を並べて、約8TeVの陽子・反陽子衝突を行おうという計画もある。

(b) DESY (西ドイツのハンブルグにある研究所)

(1) DESY

1960年代の前半に完成した5GeVのcombined型の電子シンクロトロンである。現在は最高エネルギー約7GeVの電子・陽電子を他のストレージリングに供給している。くり返し50Hzのrapid cyclingを行うために、電磁石のある所の真空チャンバーはセラミックでできている。直径はKEK-PSの主リングと同程度の約100mである。このDESYはここ一、二年の間に改造される予定である。現在のDESYはDESY-Iと呼ばれ、この同じトンネル内に約9GeVのseparate型の新しい電子シンクロトロンDESY-IIを建設する。そして、その後DESY-Iは、その電磁石を再利用した、陽子シンクロトロンDESY-IIIに改造され、陽子ビームをHERAに供給する予定である。

(2) DORIS

1970年代前半に完成した周長約300m弱の電子・陽電子衝突型ストレージリングであるが、初めは電子リングと陽電子リングの2つのリングに多数の電子と陽電子のかたまり(バンチ)を回していた。しかし1970年代後半に、それまで衝突に最適であった2.5GeV以下のビームのエネルギーを約5GeVに上げるため他の改造とともに1つのリング内で電子・陽電子衝突を行うようにした。そして1980年代始めに、さらにエネルギーを5.6GeVまで上げるために電磁石の改造を行い、また電子・陽電子の衝突する確率を上げるためにそれらが衝突するところでビームを強くしぼることを、その他の改良とともに行った。このリングのことをDORIS-IIという。これはまた放射光利用のためにも使われている。

(3) PETRA

1970年代後半に完成した周長2.3kmの電子・陽電子衝突型リングであり、設計エネルギーは19GeVであったが、現在のところこの種のリングでは世界最高の

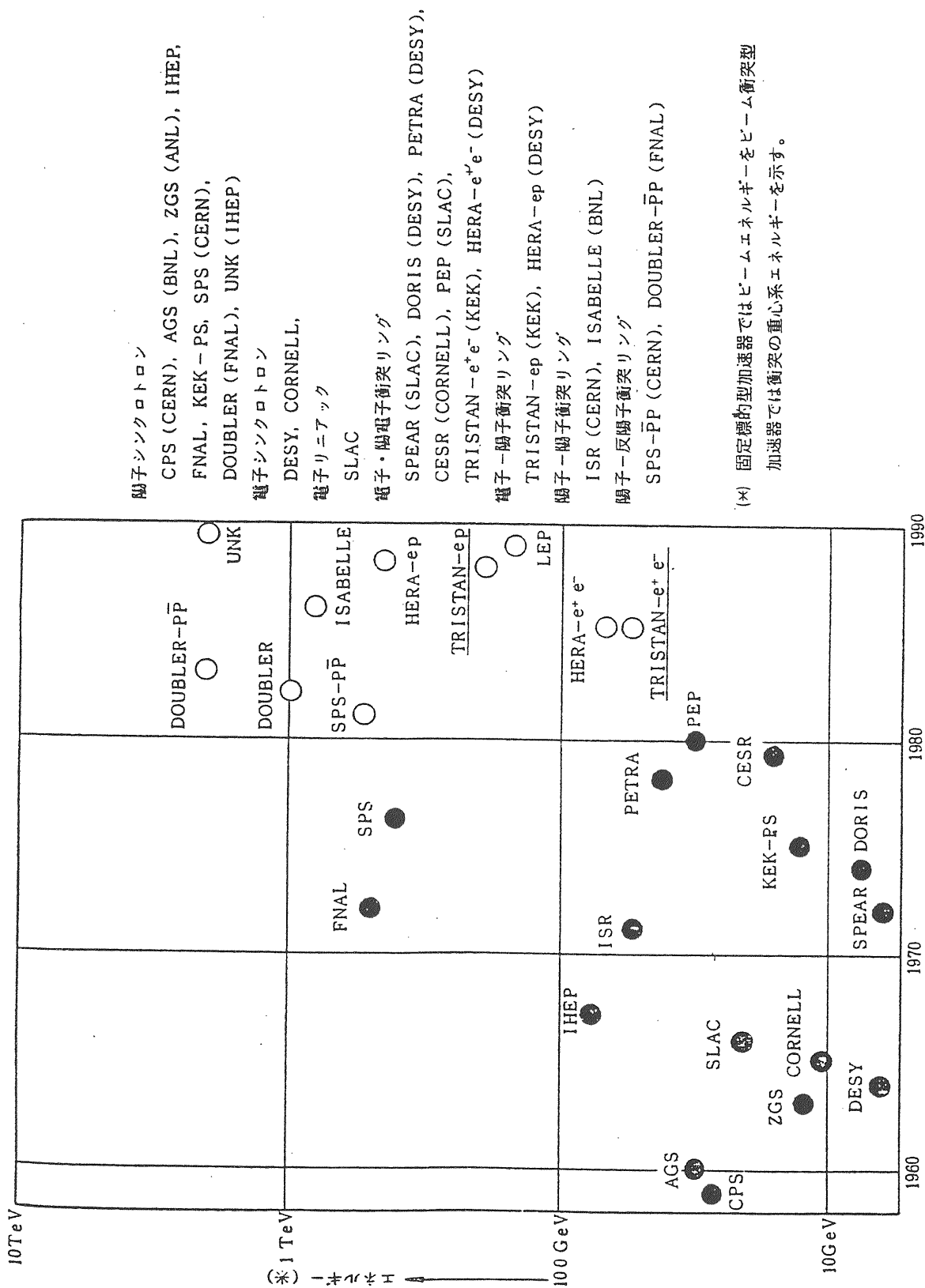


図 1 - 2. 高エネルギー物理学研究所加速器拡充計画

— トリスタン I の設計研究 —

昭和55年 6月より転載

エネルギー約23 GeVを誇る。これは完成後、ビームを加速するための高周波加速空洞を次々と付け加えることによって達成された。

(4) HERA

つい最近建設されることが決まった、30 GeVのエネルギーをもつ電子リングと、超伝導電磁石からなる820 GeVの陽子リングの二つのリングで構成される、電子・陽子衝突型のストレージリングであり、周長6.3 kmの巨大リングである。電子リングは1988年に、陽子リングは1989年に完成の予定である。

(c) BNL (合衆国、ニューヨークの近くにある研究所)

(1) AGS

Alternating Gradient Synchrotronの略称であるが、世界で最初に強収束の原理を使った大型の陽子シンクロトロンとして建設が始まった。しかしCERNのCPSよりわずかに遅れ、1960年に完成した。最高エネルギー33 GeVをもつ直径約250 mのcombined型のリングであるが、CPSと同様現在も稼動している。

(d) Fermilab (合衆国シカゴの近くにある研究所)

(1) Synchrotron (Main Ring)

直径2 kmでCERNのSPSよりわずかに小さいが、SPSより早く1970年代の始めに完成し、常伝導電磁石で作られたリングでは世界最高エネルギー500 GeVの記録をもつ陽子シンクロトロンである。そしてこれはまたDoublerへの入射器としても使われている。

(2) Energy Doubler (Energy Saver, Tevatron)

Synchrotronと同じトンネルの中に超伝導電磁石を並べて、エネルギーをSynchrotronの倍の1 TeVにしようとする陽子シンクロトロンであり、最近約800 GeVの世界最高エネルギーを達成し、Synchrotronのもつ記録をぬりかえた。また1986年ごろにこのリングで1 TeVの陽子と1 TeVの反陽子を衝突させる計画があるが、これをTevatron-IIの計画といい、これが実現されると、SPSの衝突エネルギーをはるかにぬき、これまた世界記録を達成することになる。

(e) SLAC (合衆国サンフランシスコの近くにある研究所)

(1) SPEAR

1970年代の始めにDESYのDORISより早く完成した周長約250 m弱の電子・陽電子ストレージリングで、世界最大の線形加速器から電子・陽電子の供給を受けている。最高エネルギーは約4 GeVであるが、現在は実験のために約2 GeVで運転している。このリン

グはまた放射光利用のためにも使われており、将来はこのための専用ストレージリングとなる予定である。

(2) PEP

DESYのPETRAにわずかに遅れて、1980年代初頭に完成した周長2.2 kmの電子・陽電子ストレージリングである。設計では18 GeVのエネルギーを出せることになっているが、現時点では、このリングで電子・陽電子が衝突する数が多いのは(正確にはルミノシティが最大なのは)エネルギーが15 GeVの場合であるので、現在はこのエネルギーで運転している。

PETRAと並んで、このPEPは現在のところ世界で最も大きな電子・陽電子衝突型リングの一つである。

さてSLACでは現在SLCという大計画が進行中であるが、これは(円形)加速器ではないので省略する。

また、合衆国には、以上のべたほかに、コーネル大学に大きな電子シンクロトロン(12 GeV, 直径約250 m)と、それとほぼ同じ大きさの電子・陽電子衝突型のストレージリング(現在約5.5 GeV)がある。

さらに合衆国では、周長100 kmにもおよぶ超巨大加速器、SSCの計画が立てられつつある。これは二つのリングをもつ陽子・陽子衝突型のストレージリングである。

1-3. 加速器、ストレージリングを構成する装置

以下に、加速器を構成する主な装置の名称を上げる。

(a) 電磁石 (マグネット, magnet)

(1)* 偏向電磁石 (ベンディングマグネット, bending magnet)

通称: BM

機能: 荷電粒子を曲げる。

(2)* 四極電磁石 (クアドロポールマグネット, quadrupole magnet)

通称: QM

機能: 荷電粒子を収束させる。

(3) 六極電磁石 (セクスタポールマグネット, sextupole magnet)

通称: SEX, SX, (SF, SD)等

機能: 収束の色収差を補正する。

(4) 補正電磁石 (ステアリングマグネット, steering magnet) (backleg windingを含める場合もある)

通称: VD, HD等

機能: 荷電粒子の位置を変更する(傾きをかえる)。

*注、(1-1)でのべたように(1)と(2)の機能を合せもつcombined functionの電磁石もある。ここではseparate型として、(1)と(2)にわけた。

- (b) 電磁石電源 (magnet power supply)
電磁石に電流を流すための電源
 - (c) 真空パイプ (真空チェンバー, vacuum chamber)
中を真空にしたパイプ状のもので荷電粒子の通り道
 - (d) 真空ポンプ (vacuum pump)
真空パイプを真空するためのポンプ
 - (e) モニター (monitor)
 - (1) 位置モニター (position monitor)
通称: PM等
機能: 荷電粒子の位置を測定する
 - (2) 電流モニター (current monitor)
通称: CT等
機能: ビーム電流を測定する
 - (3) プロファイルモニター (profile monitor)
機能: ビームの形, 位置を測定する
 - (f) 高周波加速空洞 (RFキャビティ, RF-cavity)
通称: キャビティ等
機能: 荷電粒子を加速, または放射光で失なわれるエネルギーを補給する
 - (g) 大電力発生装置 (high power generator)
たとえばクライストロン (klystron)
機能: 加速空洞に高周波電力を供給する
 - (h) 入射装置 (injection system)
 - (1) セプタムマグネット (septum magnet)
機能: 入射路*からリングへビームを曲げながら導びく
 - (2) キッカーマグネット (kicker magnet)
機能: 入射時にリング内のビーム軌道をずらす
- *注, 入射路とはビームトランスポートライン (beam transport line)ともいわれる。また通称BTとも呼ばれる。これはビームをリングに導びく, 荷電粒子の通路であり, 主に電磁石と真空パイプとからなっている。

以上, 加速器に使われる主な装置を上げたが, このほかにもいろいろな装置が使われており, また一つの装置をとってみても, その機能, 大きさ, 形等さまざまである。

1-4. よくでてくる言葉と数値

ここで, 今までにもでてきた言葉や数値も含めて, 加速器の分野でよく使われる言葉と数値を説明する。(これはPFに所属する筆者等がよく使っている言葉や数値であって, 他の加速器ではちがう言葉や数値がよく使われているのではないかと思う)

(a) 粒子のエネルギー E (energy)

粒子のエネルギーは通常Eという文字で表わされ, エネルギーの単位としてeV(電子ボルト, electron Volt)が使われる。

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ ジュール(joule)} \quad (1.1)$$

である。これは電荷 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ クーロンをもつ荷電粒子に1ボルトの電圧を加えたとき得られるエネルギーである。

また,

$$1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}, \quad 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$

$$1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}, \quad 1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV} \text{ である。}$$

アインシュタインの有名な関係式

$$E = mc^2 \quad (1.2)$$

を使うと, 電子の静止エネルギーは,

$$m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV} \approx 0.5 \text{ MeV} \quad (1.3)$$

また陽子の静止エネルギーは,

$$m_p c^2 \approx 0.94 \text{ GeV} \approx 1 \text{ GeV} \quad (1.4)$$

となる。ここでcは光速であり,

$$\begin{aligned} c &= 2.997925 \times 10^8 \text{ m/sec} \\ &\approx 3 \times 10^8 \text{ m/sec} \\ &= 3 \times 10^{10} \text{ cm/sec} \end{aligned} \quad (1.5)$$

である。

(問 $m_e = 0.9109 \times 10^{-27} \text{ g}$, $m_p = 1.6725 \times 10^{-24} \text{ g}$ を使って, 上の静止エネルギーを求めよ。)

(b) 速度v, 運動量pとエネルギーの関係

これもアインシュタインの有名な関係式で,

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 \gamma c^2 \quad (1.6)$$

である。ここで m_0 は(静止)質量である。また

$$\beta = v/c, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.7)$$

である。エネルギーの単位としてよく[GeV]が使われる。

運動量 p は

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 \beta \gamma c \quad (1.8)$$

であり、単位としてよく $[\text{GeV}/c]$ が使われる。

(1.6), (1.8) より

$$p = \frac{E}{c^2} v \quad (1.9)$$

であり、(7)の第二式より

$$\gamma^2 (1 - \beta^2) = 1$$

であるので、

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (1.10)$$

となる。

(問 (1.9), (1.10) を導け)

以上でてきた数値、および言葉、数式はすべて記憶に値するものである。

example

2.5 GeV のエネルギーをもつ電子を考えよう。すると、

$$E = m_0 c^2 \gamma \approx 0.5 \text{ MeV} \times \gamma$$

よって

$$\gamma \approx \frac{2.5 \times 10^3}{0.5} = 5 \times 10^3$$

となる。これから

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$

より、 $\gamma \gg 1$ であるので

$$\beta \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \quad (\gamma \gg 1) \quad (1.11)$$

となる (問 これを示せ)。よって、

$$\beta = v/c = 1 - 2 \times 10^{-8} \doteq 1$$

つまり 2.5 GeV のエネルギーをもつ電子は光速で走っていると考えてよい。

運動量 P は

$$P = \frac{E v}{c^2} = E \beta / c \approx E / c = 2.5 \text{ GeV} / c$$

つまり相対論的粒子 ($\gamma \gg 1$ である粒子) の運動量は上のような単位を使うと、数値としてはエネルギーの

値と同じになる。

さて、

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m c^2$$

つまり、

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.12)$$

とおき、この m を動いている時の質量という。

example

静止している電子の質量は陽子の静止質量の約 $1/2000$ であるが、2.5 GeV の電子は重水素(陽子 + 中性子)より大きな質量をもつ。

注、エネルギーとして静止エネルギーを引いた量、すなわち、

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 \quad (1.13)$$

が加速器によっては使われる。このエネルギー T は運動エネルギーともいわれ、PS では通常この T をもって陽子のエネルギーという。

(問 1 GeV/c の運動量をもつ陽子のエネルギー T を求めよ。また 12 GeV のエネルギー T をもつ陽子の運動量を求めよ)

(c) ビーム電流 (beam current)

単位としては通常アンペア [A]、ミリアンペア [mA] がよく使われる。電流とはよく知られているようにある所を 1 秒間に通り過ぎる電荷 (charge) 量であるので、(図 1-3) よりリング内を回わるビーム電流 I は

$$I = f q = f e N \quad (1.14)$$

と与えられる。ここで f は粒子が 1 秒間に何回リングを回ったかを表わす量であるが、これは粒子のリング

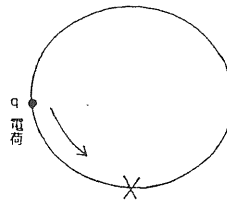


図 1-3.

を回わる回転周波数 (revolution frequency) にほかならない。また N は荷電粒子の数である。(ここでは荷電粒子は電荷 e をもつものとする)

さて f (f_r , f_{rev} の記号がよく使われる) は回転周波数であるので、

$$f = v/L = v/2\pi R = c\beta/2\pi R \quad (1.15)$$

となる。ここで

v : 粒子の速度

L : リング一周の長さ

$R : L = 2\pi R$ で平均半径といわれる。

(1.15)式を使うと(1.14)は次のようにもかける。

$$I[A] = (ec/2\pi)(N\beta/R) \\ = 7.6442 \times 10^{-12} N\beta/R[m]$$

ここで $I[A]$ は電流をアンペアで表わすことを意味し、 $R[m]$ は半径をメートルの単位で表わすことを意味する。

example

PF-ring では $f_r = 1.6 \text{ MHz}$ であるが、ビーム電流 $I = 100 \text{ mA}$ のときの電子の数 N は(1.14)式から

$$N = \frac{100 \times 10^{-3}}{1.6 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}} \approx 4 \times 10^{11}$$

と求まる。

(問 トリスタンMRリングの周長は約3018 m である。このリングの f_r を求めよ。また電子ビーム電流 $I = 10 \text{ mA}$ のときの電子の個数を求めよ。(エネルギーは30 GeV とせよ)

(問 図1-3で q と反対の符号をもつ電荷が q とは反対方向(時計方向)に回っているとす。たとえばトリスタンMRの電子と陽電子のように。では電流10mAの電子ビームと電流10mAの陽電子ビームが回っているとき、全体のビーム電流はいくらか。)

(d) その他の言葉、数値

(1) バンチ (bunch)

(加速器で使われる)バンチとは荷電粒子のかたまりをいう。マルチバンチ (multi-bunches) とはたくさんのバンチ (多バンチ) のことであり、リング内を回っているビームが多バンチのときこのリングはマルチバンチモードの運転をしているという。これに対してシングルバンチ (single bunch) とは一個のバンチ (単バンチ) を意味する。

example

PF-ring の場合、(最大312の)マルチバンチモードで通常運転している。トリスタンMRの場合、電子は2バンチ、陽電子は2バンチで運転することになるであろうが、電子1バンチ、陽電子1バンチの場合には、2ビーム、シングルバンチモードの運転となる。

またバンチされているビームのことを bunched beam (バンチドビーム) といい、一様なビーム (かたまっていないビーム) のことを coasting beam (コースティングビーム) という。

(2) CW とパルス (pulse)

CW とは連続波 (continuous wave) のことである。

example

PF-ring, AR, トリスタンMRのクライストロンは連続的に高周波電力を供給するので、これらはCWで動いているという。一方電子線形加速器のクライストロンは約 $2 \mu\text{s}$ の短い時間内に大電力の高周波を発生させるので、これはパルスで動いているという。また前項でのべたビーム電流も実はパルスのであり、その項の電流値はパルス電流を平均したときの値である。

(3) 周波数 (frequency)

粒子の回転周波数 (revolution frequency) の逆数つまり粒子がリングを一周する時間を revolution time (回転時間) という。PF-ring の場合 $f_{\text{rev}} = 1.6 \text{ MHz}$ であるので revolution time は約 $0.63 \mu\text{sec}$ である。

(問 トリスタンMRの revolution time を求めよ。)

またPF-ring, AR, トリスタンMRのクライストロンの発生するような高周波電磁場の周波数のことをRF周波数 (RF-frequency) といい、 f_{RF} とか表わされる。そして上の三つのリングとも、この周波数はほぼ同じで、

$$f_{\text{RF}} \approx 500 \text{ MHz}$$

である。そしてこの振動の周期は 2 nsec である。

example

PF-ring の場合、 $f_{\text{RF}} = 500 \text{ MHz}$ 、 $f_{\text{rev}} = 1.603 \text{ MHz}$ とすると、粒子がリングを1回転する間に、この高周波電磁場は約312回振動する。

(問 これを示せ。)

実は上の数値の精度がよくないのであって、正確には整数312になる。(実際のビームの中にはいろいろな f_{rev} をもった粒子があるが、上のような計算をしたときぴったり整数になるような粒子の f_{rev} をとって、それをビームの f_{rev} という。)

(4) ビームのライフタイム (lifetime)

これは1個の粒子が平均的にどのくらいの時間リングにとどまっているかを表わす量であり、ビーム電流 I が時間とともに、

$$I \propto e^{-t/\tau}$$

と変化する場合には、この τ をもってビームの lifetime という。シンクロトロンの場合、たとえばPSの主リングでは、2秒より十分大きな lifetime であればよいというように、比較的短い lifetime でよいが、ストレージリングの場合数時間から数日の lifetime が要求される。

さて、ビームが失なわれる原因としては、リングを

回っている粒子と真空チャンバー内の残留ガスとの衝突、ビーム内の粒子同士の衝突、磁場によって引き起こされる粒子の運動の不安定性、RF ノイズ、ビームの集団的不安定性等いろいろある。

電子リングの場合にはこのほかに radiation excitation による原因があり、また衝突型リングでは衝突する相手のビームによって粒子の運動が不安定になることによる原因もある。

example

PF-ring で $\tau = 10$ 時間とすると、 $f_{\text{rev}} = 1.6 \text{ MHz}$ であるので、この時間内に電子は $10 \times 60 \times 60 \times 1.6 \times 10^6 \approx 3 \times 10^{10}$ 回リングを回ることになる。

問 次の文章を解説せよ。

ばんちどびーむのときのびーむかれんとはばるすてきであり、こーすてィんぐびーむのときはでィしーてきである。

このすとーれじりんぐのあーるえふはしーだぶりゅであり、ばんちはばはになのである。

いれくとろんりんぐのばあいあくせられいとしてもつうじょうはえふあーるえふはへんかしないがろーえなじーのぶろとんのばあいはりぼるーしょんたいむがへんかするのでそれについじゅうできるようにあーるえふのふりーくえんしーをばりあぶるにするひつようがあるが、とうぜんりょうほうのばあいともべんでィんぐくあどるぼーるやせくすたなどのじばをかえなければならぬ。

またいっばんにすとーれじりんぐのばきゅーむがよいとらいふがながい。いんじゅくしょんるときにはせぶたむやきっかーがしようされる。いれくとろんのぼじしょんをもにたーするのにびーえむがつかわれる。このすてありんぐのばわーさぶらいがしんだのでびーむがおちた。ではびーてィーをたちあげて……。

【 筆者が KEK に来たばかりの時では、この文章は全然理解できなかったであろう。でも今ではこんなやさしい文章はないと思う。それくらい加速器の「方言」に毒されている。】

第二章 軌道理論 (orbit theory)

2.1 序

荷電粒子、特に電子がリングの中を回るとき、いわゆるシンクロトロン放射という形でエネルギーを放出するが、これの影響は回っている粒子が電子の場合かなり大きい、陽子の場合、超高エネルギーでない限り無視できる。

この章ではシンクロトロン放射がないとして話をす。シンクロトロン放射の影響は第3章で考える。

まず前半で強収れんの原理について述べ、次に後半で位相安定性の原理について述べる。

これらは、一粒子についての理論 (single particle theory) と呼ばれるものである。つまりゼロ電流の理論といってもよいものである。実際の加速器では、多数の粒子がリングの中を回っており、そのため集団的な効果が重要になってくることがある。それはこの効果のために、ビームがふらふらしたり、失なわれてしまうというような現象がおこるからである (ビームの不安定性, beam instability)。しかし、ここでは集団的な効果については一切省略する。

それは加速器にとって一粒子の理論の方がはるかに重要かつ本質的であるという筆者の偏見と、また集団的な効果を理解するには、一粒子の理論を知っている必要があるということからである。

一様な磁場で荷電粒子を曲げ、リングを回るようにしただけでは、粒子は逃げてしまう。粒子が逃げないようにすることを、粒子を収れんさせる、または収束させるという。そして強収れん (の原理) というからは、それに対応するものがあるはずで、これを弱収れんという。光学との類似でいうと、

強収れんの加速器 ⇔ 凸、凹レンズを使った複合レンズ系 (カメラ、顕微鏡等々)
弱収れんの加速器 ⇔ 弱い凸レンズ
(安い虫めがね)

ということになる。

以下では、まず最初に荷電粒子を曲げることについて述べ、次に弱収れんの話をし、そして強収れん、およびそれに関するいろいろな言葉について説明する。

2.2 荷電粒子を曲げる ($p = e B \rho$)

荷電粒子を曲げるのに、電磁石が普通使われる。

磁場によって荷電粒子に働く力 (Lorentz force) は $F(\text{力}) = q(\text{電荷}) \cdot v(\text{速度}) \times B(\text{磁場})$ (2.1)

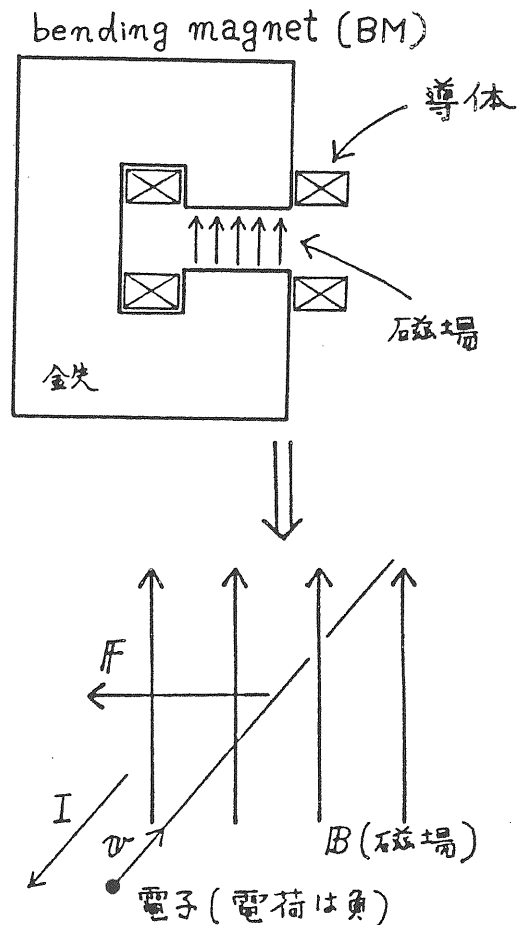


図 2 - 1.

で与えられる (MKSA 単位系)。

またこれは、電流 I が $I = qv$ であり、そして速度と磁場が垂直の場合を考えると、

$$F = I B \quad (\text{popular な関係式})$$

と書ける。

粒子の運動方程式は

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (p: \text{運動量}) \quad (2.2)$$

である。

(注. (特殊) 相対論でも、ニュートン力学でも方程式は同じ形をしている。ただし座標変換が相対論とニュートン力学ではちがう)

さて、磁場では粒子のエネルギーは変化しない (問 これを示せ)。

よって、 $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2$ であるので、 m

(運動しているときの質量)は変化しない。運動量は $p = mv$ と書けるので、

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt}$$

となる。したがって運動方程式は、

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (2.3)$$

となり、ニュートン力学(質量が変化しない普通の場合)の方程式と全く同じになる。(このことから以下では相対論の知識を(ほとんど完全に)必要としない)。

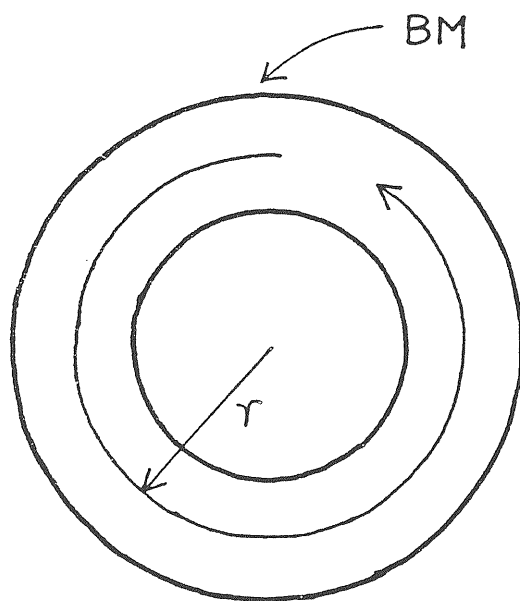


図 2 - 2.

図 2.1 の BM (bending magnet) で図 2.2 のようなリングを作り、電子を回わしたとしよう。この場合の半径方向の運動方程式は、

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m \frac{v^2}{r} - evB \quad (2.4)$$

(電子の電荷を $-e$ とする)

となる(問 これを示せ)。右辺の第一項は遠心力である。今、半径方向につき合いの状態にある、つまり $r = \rho = \text{const.}$ の場合を考えると、

$$m \frac{v^2}{\rho} - evB = 0$$

となり、

$$mv (= p) = eB\rho$$

であることがわかる。つまり、きれいに円を描いて回

る電子の運動量 p は

$$p = eB\rho \quad (\text{重要な関係式}) \quad (2.5)$$

で与えられる(問、他の荷電粒子(たとえば陽子)に対しては、この関係式はどうなるか)。このときの半径 ρ を曲率半径という。

この関係式は MKS A 単位で求めたので B の単位は、 $[B] = \text{Wb (ウェーバー)} / \text{m}^2 = \text{T (Tesla, テスラ)}$ で、 $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G (ガウス)} = 10 \text{ kG}$ である。また ρ の単位は m (メートル) である。

p の単位は $[\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}]$ であるが、これを $[\text{GeV}/c]$ で表わすと、

$$p [\text{GeV}/c] = \frac{c^*}{10^9 \cdot e^*} p [\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}]$$

ここで c^* 、 e^* は MKS A 単位での光速、素電荷の数値で、

$$c^* = 2.997925 \times 10^8 \doteq 3 \times 10^8$$

$$e^* = 1.602 \times 10^{-19}$$

である。(e^* の数値は直接必要でない)

よって、

$$p [\text{GeV}/c] = 0.3 B [\text{T}] \rho [\text{m}] \quad (2.6)$$

とかける。

example

電子のエネルギーを $E = 2.5 \text{ GeV}$ とすると、 $p = 2.5 \text{ GeV}/c$ であるので、 $B\rho = 83.33 \text{ kG} \cdot \text{m}$ となる。(問、 $\rho = 1 \text{ m}$ とすると、磁場の強さはいくらになるか、また $\rho = 10 \text{ m}$ のときは?)

example

通常、加速器では、BM (bending magnet) は図 2.3(a) のように配置されているが、この場合でも ρ (曲率半径) が与えられれば、必要な磁場の強さが求まる。また、図 2.3(b) のように、BM だけをくっつけて考えると、

$$L (\text{周の長さ}) = 2\pi\rho$$

であり、

$$L = n_B (\text{BMの数}) \times \ell_B (\text{1コのBMの長さ})$$

となる(ただし、BM は全部同じものでできているとする。また ℓ_B は細かいことをいえば、いわゆる磁場の実効的な長さをとる必要がある)。

(問、上のように考えてもよいことを示せ)

PFのリング(2.5 GeV)の場合,

$$\ell_B \sim 1.9 \text{ m}, \quad n_B = 28 \text{ 本}$$

であるので, $B \approx 9.8 \text{ kG} \approx 10 \text{ kG}$ の磁場が 2.5 GeV の電子を回らすのに必要になる。

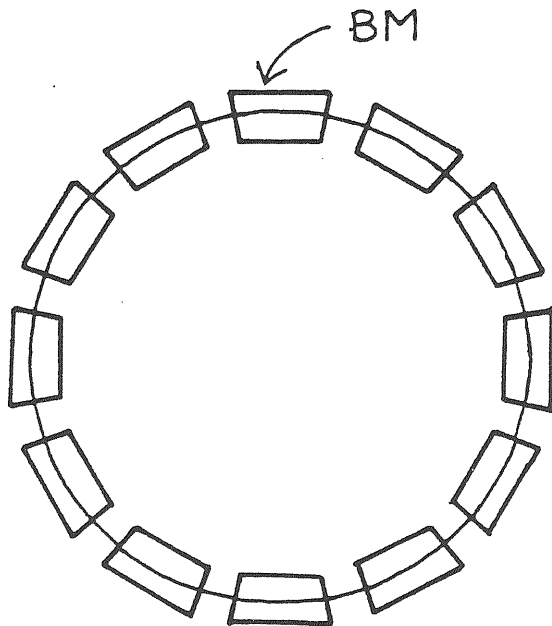


図 2-3. (a)

$$L = 2\pi\rho$$

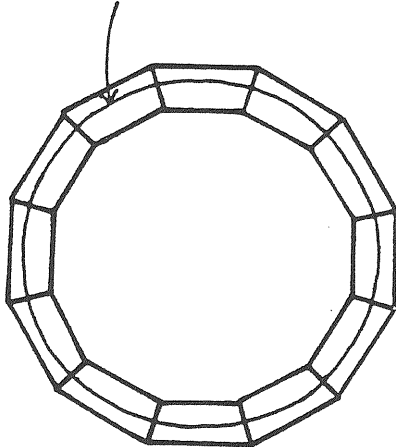


図 2-3. (b)

2.3 図 2.2 のようなリングの中のビームは安定か?

図 2.2 のようなリングのなかを回わる粒子はたて方向(垂直方向, vertical direction)には不安定で(問, 示せ), 横方向(水平方向, horizontal direction)には安定である。それを以下に示そう。

$$s = vt \quad (v \text{ は粒子の速度})$$

なる変数で(2.4)式の方程式を書きかえると,

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{1}{r} - \frac{B}{B\rho} \quad (2.7)$$

となる(問 これを示せ)。

今, 半径方向のずれが小さいとすると,

$$r = \rho + x \quad (x \ll \rho)$$

とにおいて, x の 1 次までを考えると,

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{x}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} - \frac{B}{B\rho}$$

となる(問 これを示せ)。

したがって次の方程式を得る。

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{x}{\rho^2} \quad (2.8)$$

(2.8) は調和振動子の方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

と全く同じ形をしている。調和振動子の解が, $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ となるのに相当して(2.8)の解は,

$$x = A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho} \quad (2.9)$$

と書ける。これは $2\pi\rho$, つまり一周の長さを周期とする周期関数である。 $2\pi\rho$ が周期となるのは, 図 2.4 をみれば明らかであろう。(一様磁場中の円運動をずらしただけであるので)

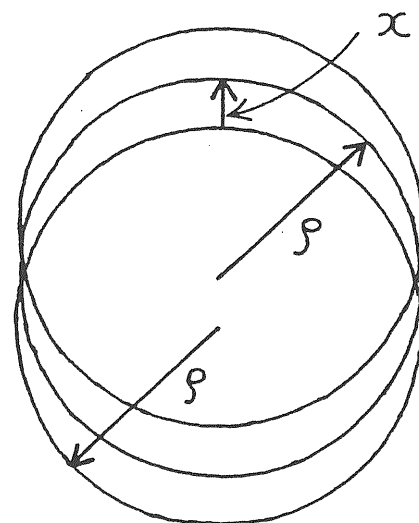


図 2-4.

2.4 弱収れん

前項でわかったように図2.2のようなリングの中のビームは横方向には安定であるが、たて方向には不安定である。ではどうしたらたて方向が安定になるであろうか。磁場が一様でなく、図2.5のようになっているとすると、半径方向(x方向)の磁場は、図2.6のようになる。

今、電子が図2.6のように下の方を通ったとすると、力は上向きになり、また上の方を通ったとすると、力は下向きになる。つまり、たて方向のずれを直すように力が働き、たて方向の安定性が得られる。このような磁場を作るためには電磁石の磁極は図2.7のようになっていればよい。このような電磁石が序論で述べた combined 型の電磁石である。

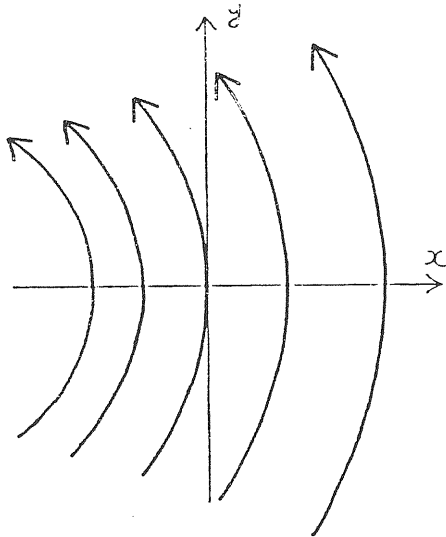


図 2 - 5.

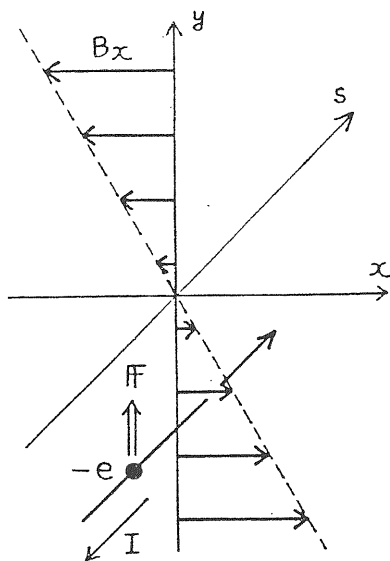


図 2 - 6.

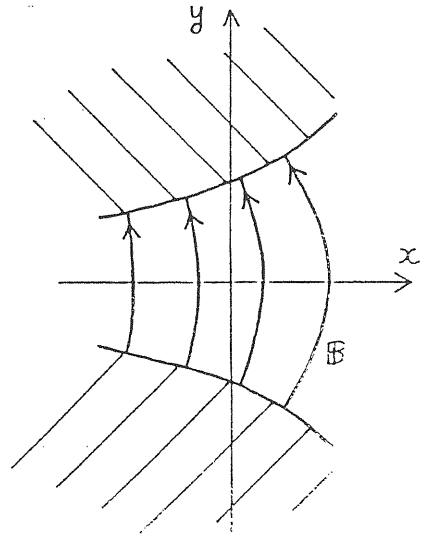


図 2 - 7.

このような combined 型の電磁石のたて方向の磁場 B_y は

$$B_y = B_0 \left(\frac{r}{\rho} \right)^{-n} \quad (n > 0)$$

というようになっている。すると、

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0$$

であるので、(これは磁場の方程式 $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ から明らか)

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} \Big|_{r=\rho} = - \frac{n B_0}{\rho}$$

となる(問 これを示せ)。

横方向の磁場 B_x は

$$B_x \approx B_x \Big|_{r=\rho} + \frac{\partial B_x}{\partial x} \Big|_{r=\rho} x + \frac{\partial B_x}{\partial y} \Big|_{r=\rho} y + \dots$$

と展開できるが、中心では横方向の磁場がないので(ないようにするので)、(図2.6をみよ)

$$B_x \Big|_{r=\rho} = 0$$

であり、また、

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} \Big|_{r=\rho} = 0$$

である(図2.6で $y=0$ では $B_x=0$ であるので

これがいえる (問 これを示せ)。または $\text{div } \mathbf{B} = 0$ をつかっても、これがいえる (問 これを示せ)。

よって B_x は、

$$B_x = -\frac{nB_0}{\rho} y \quad (2.10)$$

と近似できる。

(2.10)式をつかうとたて方向の運動方程式は遠心力の項がないので、

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = -\frac{n}{\rho^2} y \quad (2.11)$$

となる (問 これを導びけ)。

また横方向の運動方程式は、 $P = eB_0\rho$ つかうと

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{x}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho+x}{\rho}\right)^{-n}$$

となり (問 これを示せ), x の一次までをとると、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{(1-n)}{\rho^2} x \quad (2.12)$$

となる (問 これを示せ)。

(2.11), (2.12) より, たて方向が安定であるためには、

$$n > 0$$

である必要があり, よこ方向が安定であるためには、

$$n < 1$$

であることが必要であることがわかる。(問 これを示せ) つまり, ビームが安定であるためには

$$0 < n < 1$$

であることが必要である。

このような磁場をもつ電磁石で作られた加速器を弱収れん (weak focusing) の加速器という。

(2.12) より明らかなように, 弱収れんの場合, 横方向の収束を犠牲にして, たて方向の収束を得ている。これを図示すると, 図 2.8 のようになる。

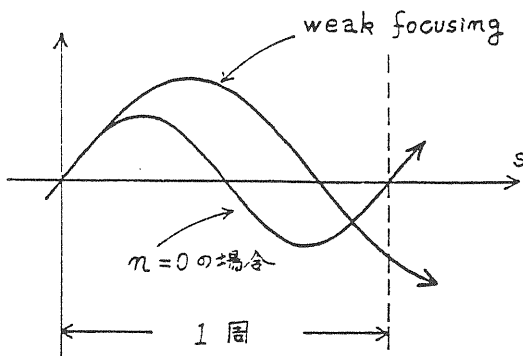


図 2 - 8.

2.5 強収れん (strong focusing)

前項の弱収れんよりもっと強い収束を得るためにはどうしたらよいであろうか。今 n の値を $n \gg 1$ とするとたて方向には強い収束が得られるが, 横方向はひどく不安定になり, また n の値を $-n \gg 1$ と大きな負の値にすると今度は横方向が非常に安定するが, たて方向は不安定である。このように n の絶対値を大きくすると, ある方向は不安定であるがもう一つの方向は弱収れんの場合より強い収束が得られる。そこで $n \gg 1$ の場合と $-n \gg 1$ の場合を適当にまぜてやったらどうであろうかということになる。実際, まぜ具合をうまくやると, たて, よこの両方向とも強い収束が得られることがわかる (図 2.9)。このようにして弱収れんの加速器より強くビームをしぼり, ビームを回らすために必要な空間を小さくすることによってそのために必要な電磁石, および真空パイプを小さくした加速器を強収れんの加速器という。これはまた $n \gg 1$ と $-n \gg 1$ とがリングの中で交互に並んでいることから, A G S (Alternating Gradient Synchrotron) のマシン (machine) とも呼ばれる。

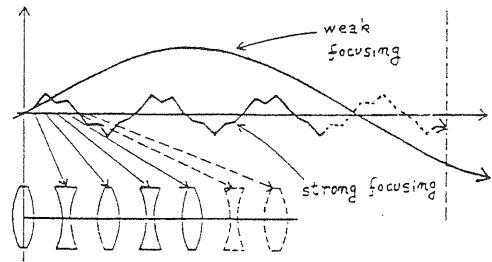


図 2 - 9.

この強収れんは光学系 (optics) で凹レンズと凸レンズをつかって弱い凸レンズの場合より強い収束を得ているのと全く同じである。ただ光学系のレンズと荷電粒子の光学系でよく使われるレンズとは以下のような点が異なっている。

光 学 系	荷電粒子の光学系
たて, よこ両方向とも収束,	よこ方向が収束なら
または両方向とも発散	たて方向は発散,
	たて方向が収束なら
	よこ方向が発散

加速器では荷電粒子を収束 (または発散) させるレンズとして四極電磁石 (図 2.10) が通常よく使われるが, これには荷電粒子を曲げる機能はない (中心を通る粒子は磁場を感じない)。

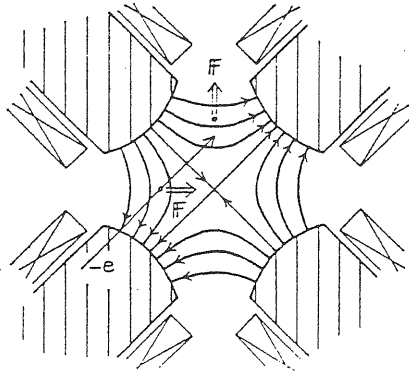


図 2 - 10.

曲げるのは図 2.1 のような電磁石 (bending magnet) で行ない、収束させるのは図 2.10 のような四極電磁石で行なうというように機能をわけた加速器が序論で述べた separate 型 (separate function) の加速器である。四極電磁石の磁場は

$$B_x = ay, \quad B_y = ax \quad \left(a = \left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_0 \right)$$

となっており、この電磁石の中では運動方程式は

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -Kx \quad (2.13)$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = Ky$$

となる。(問 これを示して、K を求めよ)

2.6 軌道の方程式

軌道の方程式は前項から、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \left(\frac{1}{\rho(s)^2} + \tilde{K}(s) \right) x = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} - \tilde{K}(s) y = 0$$

と書ける。リング一周にわたって電磁石があったり、なかったりするので、 ρ や \tilde{K} は s の関数となる。 ρ は BM の曲率半径であり、BM がいない場合には $1/\rho$ は 0 である。

(2.14) の式はまとめて、

$$\boxed{\frac{d^2 x}{ds^2} + K(s)x = 0} \quad (2.15)$$

と書ける。ここで x は (2.14) の x と y の両方を表わ

すものとする。

さて、実際のビームの中の粒子の運動量は全部同じではなく、中心の運動量 p_0 ($p_0 = eB\rho$ を満足する運動量) から、はずれている粒子もある。このような粒子に対する、BM 中のよこ方向の運動方程式は (BM は combined 型ではないとする)、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} - \frac{eB}{p}$$

となり、 $p = p_0 + \Delta p$ として、 Δp の一次までをとると、 $p_0 = eB\rho$ より、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{x}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p} \quad (2.16)$$

となる。

また、電磁石のリング内へのすえ付けの error や、磁場の error のために、中心軌道 (central orbit) (これがビームの通る中心だと思った設計上の軌道, design orbit) 上に余分な磁場がある場合には、運動方程式は、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + Kx = -\frac{e\Delta B}{p_0} = -\frac{\Delta B}{B\rho} \quad (2.17)$$

となる。

(2.16)、(2.17) より、軌道の方程式は、

$$\boxed{\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{K(s)}{1 + \Delta p/p} x = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta B}{B\rho}} \quad (2.18)$$

となる。左辺の $1 + \Delta p/p$ の因子は四極電磁石 (QM) 中で、粒子の運動量がずれている場合にでてくるものである。(問 これを示せ) (2.18) 式は軌道理論で基礎となる式であるが、実際には、リングに多極電磁石を入れた場合や磁場の error ΔB が x^n ($n > 2$) の関数である場合には (2.18) の方程式が非線形 (nonlinear) になるが、以下では線形の場合のみを考えて、非線形の場合についてはのべない。

ここで (2.18) 式は $K(s) = \text{const.}$ の場合、調和振動子の方程式と同じになり、右辺はこの振動子に対する強制力とみなすことができることに注意しよう。

2.7 軌道方程式の簡単な場合

この項では次の方程式を考えることにしよう。

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \left(\frac{\nu}{R} \right)^2 x = 0 \quad (2.19)$$

ただし、 $2\pi R=L$ で、 L はリングの周長とする。また ν/R は一定とする。 $\nu=1$, $R=\rho$ とすると2.3の(2.8)式と同じになり、 $\nu=n$, または $1-n$ とすると、弱収れんときの方程式となる。(2.19)式は $\nu/R \rightarrow \omega$, $s \rightarrow t$ と変換すると、調和振動子の方程式となる。調和振動子については Appendix Aをみよ。

さて(2.19)式の解は、 $x' = \frac{dx}{ds}$ とおくと、

$$x = x_0 \cos \frac{\nu}{R} s + \frac{x_0'}{\nu/R} \sin \frac{\nu}{R} s \quad (2.20)$$

$$x' = -\frac{\nu}{R} x_0 \sin \frac{\nu}{R} s + x_0' \cos \frac{\nu}{R} s$$

となる。ここで x_0 , x_0' は $s=0$ のときの初期値である。これをマトリックスを使って書くと、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos ks & \frac{1}{k} \sin ks \\ -k \sin ks & \cos ks \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

となる。ここで $k = \nu/R$ とおいた。

これはまた

$$\begin{pmatrix} x \\ x'/k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos ks & \sin ks \\ -\sin ks & \cos ks \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0'/k \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

ともかける。

(2.22)式から粒子が1周回るとき、 ν 回振動するということがわかる(問 これを示せ)。

このように、1周回ったときの粒子の振動の回数を

$$\nu = \text{ベータトロン振動数 (betatron number)}$$

(2.23)

という(ただし ν は整数とはかぎらない)。

さて、空間的に考えると k は波動の波数ベクトルともみなせるので、

$$k = 2\pi/\lambda$$

となる。ここで λ は波長である。この逆数 $\lambda/2\pi$ を

ベータトロン振幅 β (betatron function)

といい、

$$\beta = \lambda/2\pi = R/\nu \quad (2.24)$$

である。

さて、この場合には全く自明だが、重要な関係の一つ導びよう。それは次の関係式である。

$$2\pi\nu = \oint \frac{ds}{\beta} \quad (2.25)$$

ここで積分はリング一周にわたるものとする。これは、

$$\oint \frac{ds}{\beta} = \oint \frac{\nu}{R} ds = \frac{\nu}{R} \cdot 2\pi R$$

より、ただちにでる。

また(22)式より、

$$x^2 + \left(\frac{x'}{k}\right)^2 = \text{定数}, \quad (2.26)$$

つまり、不変であるということが導びかれる(問 これを示せ)。この定数はこの場合、単に振動の振幅の平方である。(2.22), (2.21)を図示するとそれぞれ図2.11, 図2.12のようになる。このように図示したものを位相空間(phase space)という(この場合には、位相平面(phase plane)ともいう)。

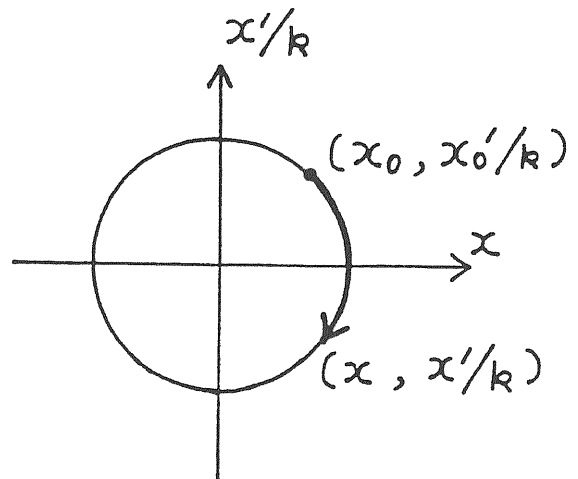


図 2 - 11.

次に図2.12の楕円の面積を求めてみよう。

楕円の面積を $\pi \epsilon$ とし、 x の振幅を A とすると、

$$\pi \epsilon = \int dx dx' = \pi A^2 k \quad (2.27)$$

となる。(問 図2.11の面積を使って、上の面積をだ

せ) これより,

$$\epsilon = A^2 k = A^2 / \beta \quad (2.28)$$

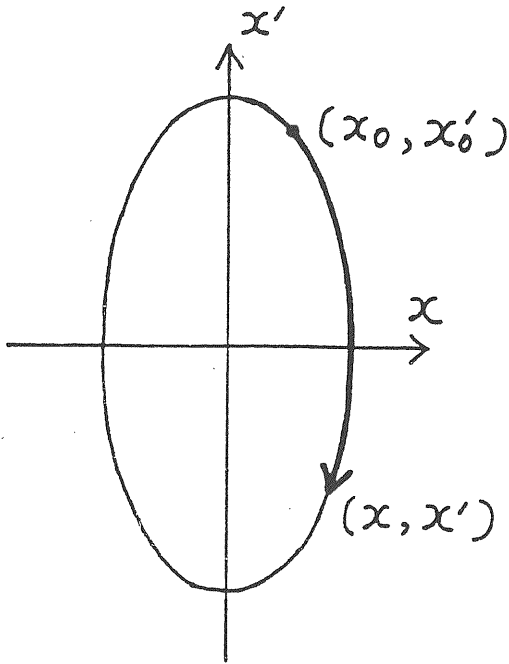


図 2 - 12.

となるが, この ϵ なる量を **エミッタンス (emittance)** という。これは明らかに不変量である。また (2.21) 式のマトリックスの行列式 (determinant) は 1 である (問 これを示せ) がこれもまた面積が不変であることをいっている (次頁をみよ)。

(2.20) 式はまた

$$\begin{aligned} x &= A \cos\left(\frac{\nu}{R} s + \phi_0\right) \\ &= \sqrt{\epsilon \beta} \cos\left[\int_0^s \frac{ds}{\beta} + \phi_0\right] \\ x' &= -\frac{\nu A}{R} \sin\left(\frac{\nu}{R} s + \phi_0\right) \\ &= -\sqrt{\epsilon/\beta} \sin\left[\int_0^s \frac{ds}{\beta} + \phi_0\right] \end{aligned}$$

ともかける。(ϕ_0 は適当な位相)

ここまでのべてきたことは, 調和振動子の運動をわざとむつかしくいったようにもみえるが, 一般の場合つまり (2.15) 式で K が s の関数である場合を考えるときに必要となるものである。

そしてまた, 一般の場合におおよその値 (たとえばベータatron振巾の値) を評価したり, リングの中の粒子の運動の概略をつかむのに, 運動を調和振動子に考えると簡単になる場合が多い。

2.8 一般の場合

まず最初に位相面積が不変 (s とともに変化しないこと) であることを示そう。

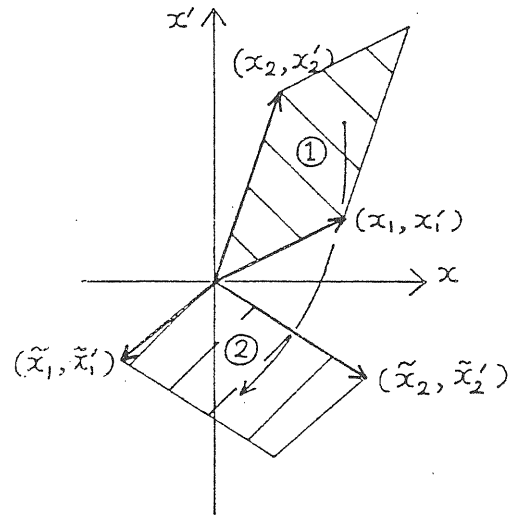


図 2 - 13.

図 2.13 で ① の状態にあった 2 つの粒子 1, 2 が s だけ進んだとき ② の状態になったとする。

このとき, 運動方程式 (2.15) に従う粒子は, あるマトリックスを使って,

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

とかける。(問 $x=1, x'=0$ のときの解と, $x=0, x'=1$ のときの解が何らかの形に求まったとして, 上の形にかけることを示せ。また a, b, c, d の意味をのべよ)

さて, ① の面積 W は,

$$W = x_1 x'_2 - x'_1 x_2$$

とかける (問 これを示せ) ので, この面積 W が不変であることをいうには,

$$\frac{dW}{ds} = 0 \quad (2.30)$$

を示せばよい。左辺は,

$$\frac{dW}{ds} = x'_1 x'_2 - x'_1 x'_2 + x_1 x'_2 - x'_1 x_2$$

となり, (2.15) の運動方程式をつかうと, (2.30) がでる (問 これを示せ)。 (2.30) が成立することがわかったので, これから②の面積 W_2 は①の面積 W_1 に等しいことがわかる。

$$W_2 = \widetilde{x}_1 \widetilde{x}'_2 - \widetilde{x}'_1 \widetilde{x}_2 = W_1$$

また (2.29) を使うと,

$$W_2 = \det M \cdot W_1$$

となる (問 これを示せ)。

よって前項と同じく一般の場合でも,

$$\boxed{\det M = 1} \quad (2.31)$$

ということが方程式を解かなくてもわかる。このような結果になるのは方程式が (2.15) の形をしているということが本質的である。

次に最初 (x_0, x'_0) の値をもっていた粒子が 1 回リングを回った後 (x_1, x'_1) の値をとったとしよう。これは (2.29) と同じように,

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_1 = M \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_0 \quad (2.32)$$

とかける。ただしこの M は 1 周あたりのマトリックスである。

いま,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$$

とおくと, N 回リングを回った後の (x, x') は,

$$\mathbf{x}_N = M^N \mathbf{x}_0 \quad (2.33)$$

とかける (問 これを示せ)。

さて, 運動が安定であるためには, M の固有値を λ とすると,

$$|\lambda| \leq 1$$

である必要がある (非常に特殊な場合を除いて)。なぜならば, M の固有ベクトルを $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ とすると, \mathbf{x}_0 は一般に

$$\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$$

という形にかけ,

$$\mathbf{x}_N = c_1 \lambda_1^N \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2^N \mathbf{v}_2$$

となるので (問 これを示せ), λ の絶対値が 1 より大きいと, 何回も回わるうちに x がどんどん大きくなり, そのうちリングの外にとびだしてしまうからである (問 これを示せ)。

(注. $|\lambda| > 1$ である固有値をもつ固有ベクトルを \mathbf{x}_0 が全然含まない場合は除外する)

以上より運動の安定性を調べるには一周あたりのマトリックス M の固有値を求めればよいことがわかる。

((2.15) 式をリングを何回も回わるほど積分する必要はない)

$$\det (M - \lambda I) = 0$$

より,

$$\lambda^2 - \lambda (a + d) + ad - bc = 0 \quad (2.34)$$

となる (問 これを示せ)。

ところが (2.31) があるので, これは,

$$\lambda^2 - \lambda (a + d) + 1 = 0 \quad (2.35)$$

となる。今二つの固有値を λ_1, λ_2 とすると (2.35) 式より

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 \quad (2.36)$$

であるので (問 これを示せ),

$$\lambda_1, \lambda_2 = e^{\pm i\mu} \quad (2.37)$$

とおくことができる (μ は複素数になることもある)。

(問 (2.37) のようにかけることを示せ)

よって (2.35) より,

$$\boxed{\cos \mu = \frac{1}{2} (a + d)} \quad (2.38)$$

となり (問 これを示せ), また (2.37) より安定であるためには ($|\lambda| \leq 1$ であるためには), μ が実数であることが必要であることがわかる (問 これを示せ)。

$$a + d = \text{Tr } M \leq 2 \quad (2.39)$$

でなければならないということがわかる (問 これを示せ)。ここで $\text{Tr } M$ は M の対角和のことである。

さて、Mには4つの量 a, b, c, d があるが、いま求めた μ をつかうとあと3つ適当な量をもってれば、 a, b, c, d を一般に表わすことができる。

そこで、

$$\begin{aligned} a - d &= 2\alpha \sin \mu, & b &= \beta \sin \mu, \\ c &= -\gamma \sin \mu \end{aligned}$$

(2.40)

とおいてみると、

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix}$$

(2.41)

と書ける (問 これを示せ)。

ところが $\det M = 1$ という条件があったので、(2.41) から

$$\beta \gamma - \alpha^2 = 1$$

(2.42)

または

$$\gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta}$$

(2.43)

という関係がでてくる。

さて (2.41) のMは

$$M = I \cos \mu + J \sin \mu$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

ともかける (問 これを示せ)。

そして、N回リングを回ったときのマトリックスは

$$M^N = I \cos N\mu + J \sin N\mu$$

となる (問 これを示せ)。

つまり何回、リングを回っても α, β, γ は変化せず、 μ が増加するだけである。このことから μ は一回転したときの位相の進み (phase advance) であることを暗示するが、実際にそうであることが以下のようにしてすぐにわかる。いまある位置での (x, x') を (x_0, x_0') とすると、リングを一回転したのちの値 (x_1, x_1') は、

$$x_1 = x_0 \cos \mu + (\alpha x_0 + \beta x_0') \sin \mu$$

$$x_1' = x_0' \cos \mu - (\gamma x_0 + \alpha x_0') \sin \mu$$

となり、 x_1 の式から

$$x_1 = A \cos(\mu + \mu_0)$$

$$x_0 = A \cos \mu_0$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + (\alpha x_0 + \beta x_0')^2}$$

となることがわかる (問 これを示せ)。これから、リングを一回転すると位相が μ だけ進むことがわかる (x_1' についても同様である)。

さて、2.7の(2.21)式を一周についての式と考えると、(2.38)は

$$\cos \mu = \cos 2\pi\nu \quad (2.44)$$

となり、また(2.40)は

$$\beta \sin \mu = \frac{1}{k} \sin 2\pi\nu \quad (2.45)$$

となる。(2.44)、(2.45)から (β を正とすると)、

$$\mu = 2\pi\nu (+ 2\pi n, n \text{ はある整数})$$

$$\beta = 1/k = \beta \text{ (2.7項の } \beta \text{)}$$

となり、また

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 1/\beta$$

となることがわかる。また当然、2.7の場合には運動が安定であるが、このことはまた(2.44)からもいえる。

この例からもわかるように、あるマトリックスが与えられたとき、 μ には (この段階では) ある不定性があり、また β の正負もわからないが、以下でわかるようにこの不定性を除くことができ (できるようにする)、 μ はリング一周あたりの振動数 (ベータatron振動数) を使って、

$$\mu = 2\pi\nu \quad (2.46)$$

と書け、また β は正であるとすることができる。

example

トリスタン main ring の場合、たとえば

$$\text{よこ方向の } \nu \text{ は } \nu_x = 32.75$$

$$\text{たて方向の } \nu \text{ は } \nu_y = 38.60$$

であり、たて方向に、約38回半振動することになる。

また, P F-ring の場合はたとえば

$$\nu_x = 5.38, \quad \nu_y = 4.12$$

であり, たて方向に, 4 回ぐらいしか振動しない。

次に μ は (2.46) が成り立てば明らかに場所にはよらないが, これを直接確かめてみよう。

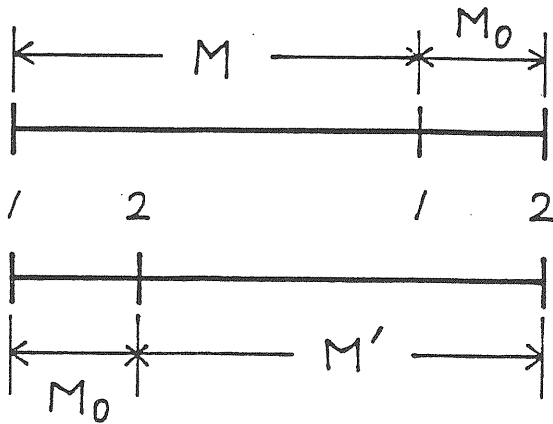


図 2 - 14.

いま, 図 2.14 である位置の一周あたりのマトリックス (いままで単にマトリックスといってきたが, これはよくトランスファー・マトリックス (transfer matrix) と呼ばれる) を M とし, ちがう場所での一周あたりのマトリックスを M' とすると, 図 2.14 より

$$M' = M_0 M M_0^{-1} \quad (2.47)$$

となる (問 これを示せ)。

これから

$$\begin{aligned} \det (M' - \lambda I) &= \det | M_0 M M_0^{-1} - \lambda I | \\ &= \det | M - \lambda I | = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

となる (問 これを示せ)。

よって M' の固有値と M の固有値は同じものであることがわかる。そして先ほどのべたように μ は一意にきめることができるので, μ は場所によらないことがわかる ($\lambda = e^{\pm i\mu}$)。

次に, β は場所の (つまり s の) 関数であることを示そう。2.7 項の場合は $\beta = \text{const.}$ であったがこれは特別な場合である。

今, 図 2.14 の M_0 を

$$M_0 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

とおくと, μ は場所によらないので,

$$\begin{aligned} M' &= I \cos \mu + J_2 \sin \mu = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \\ &\times \left[I \cos \mu + J_1 \sin \mu \right] \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とかける (問 これを示せ)。

これから

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\tau_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\tau_1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.50)$$

となる (問 これを示せ)。

式 (50) はまた次のようにもかける。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_{11}^2 & -2 m_{11} m_{12} \\ -m_{21} m_{11} & 1 + 2 m_{12} m_{21} \\ m_{21}^2 & -2 m_{22} m_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.51)$$

(問 これを示せ)。

example

いま, 図 2.14 で 1 と 2 の間にマグネット (電磁石) がないとしよう。つまり式 (2.15) で $K(s) = 0$ であるとする。この場合の M_0 は

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり, ℓ は 1 と 2 の間の長さ (距離) である (問 これを示せ)。このような場合の 1 と 2 の間をドリフトスペース (drift space) ということがある。この場

合には (2.51) は

$$\begin{cases} \beta_2 = \beta_1 - 2\alpha_1 \ell + r_1 \ell^2 \\ \alpha_2 = \alpha_1 - r_1 \ell \\ r_2 = r_1 \end{cases} \quad (2.52)$$

となる (問 これを示せ)。今、2 の位置を変数とすると (つまり、 ℓ を s とし、1 からの距離を s とすると)、(2.52) より

$$\beta'(s) = -2\alpha(s) \quad \left(\beta' = \frac{d\beta}{ds} \right) \quad (2.53)$$

となることがわかる。

さて、(2.52) の β は s の 2 次関数であり、また r は常に正である。(問 これを示せ)。つまり β は上に開いた 2 次関数であり、そしてある場合には、1 と 2 の間で極小になることがある。この極小での位置の β を β_0 とすると、(2.52)、(2.53) より

$$\beta(s) = \beta_0 + \frac{s^2}{\beta_0} \quad (2.54)$$

とかけることがわかる。ここで s は極小の位置からの距離である (問 これを示せ)。

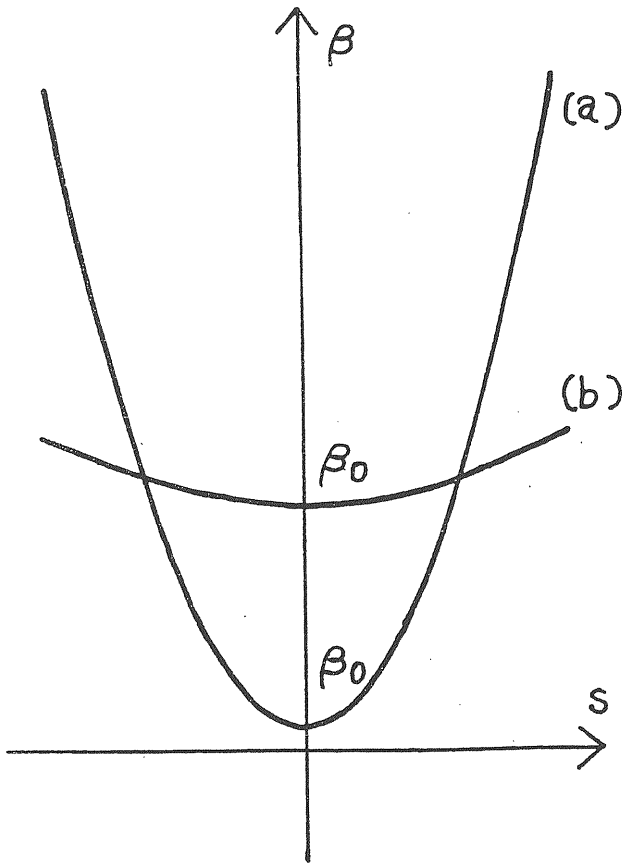


図 2 - 15.

これを図示すると図 2.15 のようになる。これから、 β_0 が非常に小さい場合には、 s とともに、 β が急激に大きくなるのがわかる。

ここでついでに 1 と 2 の間に 1 コの QM (四極電磁石) のみがある場合の M_0 を与えておく。

(通常 x 方向を考えたとき) $K > 0$ ならば、この QM を focusing quadrupole magnet といい、そのマトリックスは、

$$M_0 = M_F = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{K}s & \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}s \\ -\sqrt{K}\sin\sqrt{K}s & \cos\sqrt{K}s \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

となる。ただし、ここで s として、QM の長さ ℓ_0 をとる (問 これを示せ)。

また $K < 0$ の場合、つまり defocusing quadrupole の場合には

$$M_0 = M_D = \begin{pmatrix} \cosh\sqrt{K}s & \frac{1}{\sqrt{K}}\sinh\sqrt{K}s \\ \sqrt{K}\sinh\sqrt{K}s & \cosh\sqrt{K}s \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

となる (問 これを示せ)。

(問 おひまな人はこれについても (2.53) を確かめよ)

さて、 β 、 α 、 r のパラメータ (Twiss parameter ともいわれる) をつかうと、粒子の位置 x と傾き x' ($x' = \frac{dx}{ds}$ であるのでこれは x 方向に粒子がもつ傾きである) は、以下で示すように、

$$\begin{aligned} x(s) &= \sqrt{\epsilon\beta(s)} \cos[\psi(s) + \psi_0] \\ x'(s) &= -\sqrt{\epsilon/\beta(s)} \{ \alpha(s)\cos[\psi(s) + \psi_0] \\ &\quad + \sin[\psi(s) + \psi_0] \} \\ &= -\sqrt{\epsilon r(s)} \sin[\psi(s) + \psi_0'] \end{aligned}$$

(2.57)

となり、ここで ϵ は定数である。

また、

$$\beta'(s) = -2\alpha(s) \quad (2.58)$$

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)}$$

となることが示される。(2.58)の第一式は(2.53)式と同じだが、これは一般的に成り立つ関係である。 $\psi(s)$ は位相であり、一周にわたって追いかけていけば、 x が何回振動したかということがわかる。($\beta(s)$ は1周したのちもとの値にもどるので、はっきり何回振動したか決めることができる。)

よって、その振動数を ν とすると

$$2\pi\nu = \int_0^L \frac{ds}{\beta(s)} \quad (L \text{ は一周の長さ}) \quad (2.59)$$

となり、これは1周のちの位相の進みであるので、 μ を

$$\mu = 2\pi\nu = \int_0^L \frac{ds}{\beta(s)} \quad (2.60)$$

とすると、 μ の不定性は消え、はっきりと決まる。

また(2.59)式より、

$$2\pi\nu = 2\pi R \left\langle \frac{1}{\beta} \right\rangle = \frac{2\pi R}{\bar{\beta}}$$

となる。ここで $L = 2\pi R$ であり、カギかっちは平均を意味する。 β の逆数の平均であるがこれを $1/\bar{\beta}$ と β の平均かのように考えると、

$$\bar{\beta} = R/\nu \quad (2.61)$$

となる。

example

PF-ring の場合 $R \approx 30\text{m}$, $\nu_x \sim 5$ であるので $\bar{\beta} \sim 6\text{m}$ となる (β は長さの次元をもつ)。

(2.61)式はこのようにいろいろなリングの β のだいたいの大きさを求めるのに便利である。

次に図2.14での1と2の間の位相差を(2.57)を使って M_0 のマトリックスの要素で表わしてみよう。

1の位置での (x, x') を、

$$x_1 = \sqrt{\epsilon\beta_1} \cos\theta$$

$$x_1' = -\sqrt{\epsilon/\beta_1} (\alpha_1 \cos\theta + \sin\theta)$$

とおくと、

$$x_2 = \sqrt{\epsilon\beta_2} \cos(\Delta\psi + \theta)$$

$$= m_{11} \sqrt{\epsilon\beta_1} \cos\theta$$

$$- m_{12} \sqrt{\epsilon/\beta_1} (\alpha_1 \cos\theta + \sin\theta)$$

となる。ここで θ を0とすると、

$$\sqrt{\beta_1\beta_2} \cos\Delta\psi = \beta_1 m_{11} - m_{12} \alpha_1$$

また $\theta = 90^\circ$ とすると、

$$\sqrt{\beta_1\beta_2} \sin\Delta\psi = m_{12}$$

となり、

$$\tan\Delta\psi = m_{12} / [m_{11}\beta_1 - m_{12}\alpha_1] \quad (2.62)$$

となる。

さて、以下に(2.57)、(2.58)が成り立つことを示そう。(2.15)について、いわゆる Floquet's theorem (フロケの定理)といわれるものをまず証明しよう。

(a) $y(s)$ が(2.15)の解なら、 $y(s+L)$ も解である。これは $K(s+L) = K(s)$ であることからただちにわかる(問 これを示せ)。

(b) 独立な二つの解を $y_1(s)$, $y_2(s)$ とすると、他の解はこれの線形結合でかかれる。これは他の解を $y_3(s)$ とすると、 $y_3(s)$ の初期条件は、

$$y_3(0) = a y_1(0) + b y_2(0)$$

$$y_3'(0) = a y_1'(0) + b y_2'(0)$$

とかけ(問 これを示せ)、

$$y(s) = a y_1(s) + b y_2(s)$$

$$y'(s) = a y_1'(s) + b y_2'(s)$$

とすると、 $y(s)$ も解であり(問 これを示せ)、初期条件が、 $y_3(s)$ と一致するからこの $y(s)$ は $y_3(s)$ そのものであることがわかる。これと(a)から、 $y_1(s+L)$, $y_2(s+L)$ はあるマトリックスを使って、

$$\begin{bmatrix} y_1(s+L) \\ y_2(s+L) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

とかける。Aの固有値を e^{a_1} , e^{a_2} とし、そのときの固有ベクトルを v_1 , v_2 とし、それを横に並べて、

$$v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

なるマトリックスをつくと、(2.63)は

$$v^{-1} \begin{bmatrix} y_1(s+L) \\ y_2(s+L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 \\ 0 & e^{a_2} \end{bmatrix} v^{-1} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

となる(問 これを示せ)。

これから、 a を a_1 または a_2 として

$$y(s+L) = e^a y(s) \quad (2.65)$$

なる解があることがわかる(問 これを示せ)。

(注. $a_1 \neq a_2$ とする)

(c) (2.15)は

$$y(s) = e^{ks} F(s)$$

のような形の二つの解をもつ。

ここで $F(s)$ は $F(s+L) = F(s)$ なる L の周期関数である。これを示すために、(2.65)の $y(s)$ をつかって、

$$Z(s) = e^{-\frac{as}{L}} y(s)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} Z(s+L) &= e^{-\frac{a(s+L)}{L}} y(s+L) \\ &= e^{-\frac{as}{L}} y(s) = Z(s) \end{aligned}$$

となり、 Z は L の周期関数となる。ここで Z を F とし、 $a/L = k$ とすれば上のことが示される。(a は a_1 または a_2)。

この(c)でのべたことをフロケーの定理という。

ここまで長々とこの定理についてのべたが、次のようにすればもっと簡明である。一周についてのマトリックス M をつかうと、

$$y(s) = \begin{bmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{bmatrix}$$

とおいて、

$$y(s+L) = M y(s)$$

となる。そして M の固有値、固有ベクトルをつかうと、

$$y_{1,2}(s+L) = e^{\pm i\mu} y_{1,2}(s)$$

となる。ここで y_1 , y_2 は固有ベクトルの第一要素である。そこで(c)と同じことをすれば、

$$y_{1,2}(s) = e^{\pm i\mu s/L} Z_{1,2}(s) \quad (2.66)$$

$$Z_{1,2}(s+L) = Z_{1,2}(s)$$

となる。さて、 Z_1 を Z とし、

$$Z(s) = |Z(s)| e^{i\phi(s)} = \omega(s) e^{i\phi(s)}$$

とおくと、

$$y_1 = \omega(s) e^{+i\psi(s)} \quad (\omega(s) > 0) \quad (2.67)$$

$$\psi(s) = \mu \frac{s}{L} + \phi(s)$$

とかける。ここで $\omega(s+L) = \omega(s)$ である。また $\phi(s+L) = \phi(s) + \mu + 2\pi n$ であり、 i 周あたりの位相の進みを $\Delta\psi$ とすると $\Delta\psi = \mu + 2\pi k$ となる(ここで n, k はある整数)。(注. $\Delta\psi = -\mu + 2\pi l$ とすることも $\psi(s)$ のとり方によってはなる)

(67)の複素共役も解であるから(問 これを示せ)、二つの解として

$$y_{1,2} = \omega(s) e^{\pm i\psi(s)} \quad (2.68)$$

が求まる。(注. 非常に特殊な場合には、この二つの解は独立にならない)

さて、(2.68)を(2.15)に代入すると、

$$\begin{aligned} \omega'' + K\omega - \psi'^2 \omega &= 0 \\ \psi'' \omega + 2\psi' \omega' &= 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

となる(問 これを示せ)。

(2.69)の第二式は $(\psi' \omega^2)' = 0$ とかけ、これから

$$\psi' \omega^2 = \text{const.} \quad (2.70)$$

となる。ところが(2.68)で ω にある数をかけたものを新たに ω としてもよいので、(2.70)の定数は任意にとれる。そこで

$$\psi' \omega^2 = 1 \quad (2.71)$$

とおく。(そうとらなくてもよいが、このようにしておくとあとで $\omega^2 = \beta$ であることがわかる)

今ある位置で (x, x') が、

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

であり、一周あとでは、これが x_1 になったとしよう。すると、これらは、 y_1, y_2 の線形結合でかけるので

$$x_0 = X_0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad x_1 = X_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

となる。ここで

$$X = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

であり、 X_0 は一周する前の X であり、 X_1 は一周あとでのそれである (問 これを示せ)。

これより、

$$x_1 = X_1 X_0^{-1} x_0 \quad (2.73)$$

となる (問 これを示せ)。

(2.68) をつかうと、

$$X_1 X_0^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi - \omega \omega' \sin \Delta\psi & \\ -\frac{1 + (\omega \omega')^2}{\omega^2} \sin \Delta\psi & \\ \omega^2 \sin \Delta\psi & \\ \cos \Delta\psi + \omega \omega' \sin \Delta\psi & \end{pmatrix}$$

となるが、これは (2.41) の M そのものであるので、 $\Delta\psi$ が $\Delta\psi = \pm\mu + 2\pi\ell$ であることをつかうと、

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \beta > 0 \\ \omega \omega' &= -\alpha \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\Delta\psi = \mu + 2\pi\ell$$

となる (問 これを示せ)。

そして (2.71) を使うと、

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\beta}, \quad \beta' = -2\alpha, \\ \psi &= \int_0^s \frac{ds}{\beta} + \psi_0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

となる (ψ_0 はある定数)。

これより、(2.57)、(2.58) が導びかれる (問 これを示せ)。

ここまで、いろいろな式を出し、ちょっと複雑に見えたかもしれないが、最後に (いままでのことから明らかであるが) ある重要な事を指摘してこの項を終ることにしよう。それはリングのある場所で粒子の振動 (実際にはビームの振動) を見ていると、(2.57) から (またはその前の議論から) わかるように、粒子の位置は、 k をリングを回る回数として

$$\cos(2\pi\nu k + \phi_0)$$

のように変化するということである。これはふり子の振動をある一定の時間間隔でちらちらっと見たときのふり子の位置の変化と全く同じである。または調和振動のデジタルサンプリングのデータと全く同じであると言ってもよい。つまりある場所での粒子の振動は完全に調和振動であり、その高調波も分数波もない (ただし運動が (2.15) 式に従うとしたら話)。

この位置の変化のデータ (デジタルデータ) (問 データはどのようなものか図示せよ) をフーリエ分解すれば (もっと簡単には振動が調和振動であるので山の数を数えれば)、粒子 (ビーム) の振動数がわかる。しかしベータロン振動数そのものはわからない。わかるのはその小数部のみである (問 それはなぜか)。これは今まで何度も μ の値に不定性があるといったのと関係がある。さてでは小数部は完全にわかるであろうか、というところも完全にはわからない。わかるのは実際のベータロン振動数の小数部を $\Delta\nu$ として、 $\Delta\nu$ か $1 - \Delta\nu$ かどちらかであるということのみである (問 それはなぜか)。たとえば、 $\nu = 6.2$ としたとき $\Delta\nu$ が 0.2 か 0.8 かどちらかということがわかるだけである。これらのことはデータがデジタルデータであるというためにそうなのであって、ちらちらっとしか見えないものは、想像をたくましくするか、別的手段を講じないと全ぼうがはっきりと見えてこないのは日ごろよく経験することである。

2.9 不変量 (Courant—Snyder Invariant)

(2.57) より、ただちに

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\beta} \left[y^2 + (\alpha y + \beta y')^2 \right] \\ &= r y^2 + 2\alpha y y' + \beta y'^2 = \epsilon (= \text{const.}) \end{aligned} \quad (2.76)$$

が導びかれる。ここで (y, y') は (2.57) の $(x,$

x' である (問 (2.76) を示せ)。これはある場所での y の振動 (リングを一周するごとの y の値) に対して不変であるばかりでなく, リングにそっても不変であるということを行っている。また x 方向と y 方向の粒子の振動という, 2つの振動があるということをおこしばらくあからさまに表に出さないできたが, ベータトロン振巾 β には β_x, β_y という二つのものがあり, そして (2.76) の不変量 ϵ にも ϵ_x, ϵ_y という二つの不変量があるということに注意しよう。さてリングのある場所で考えると, (2.76) は楕円の方程式で, これを図示すると, 図 2.16 のようになる (問 (2.76) を図示するとだいたいこのようになるということを示せ。また $\alpha > 0$ の場合にはどのようなになるか)。

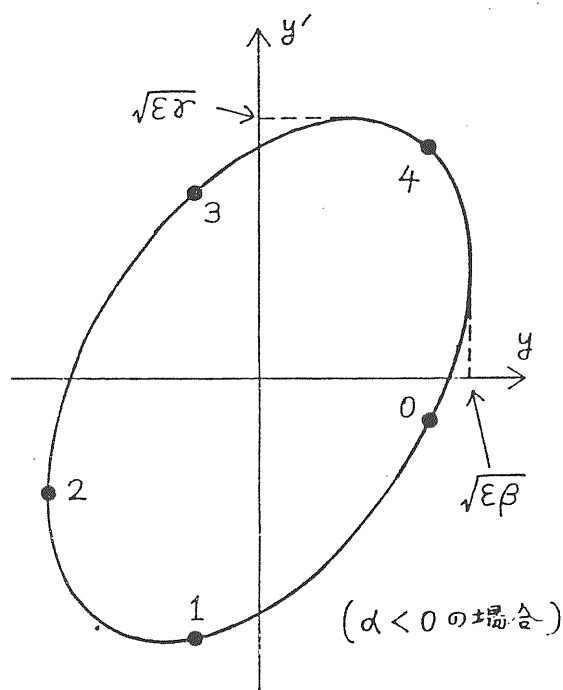


図 2 - 16.

楕円の y, y' 軸の最大値は,

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \sqrt{\epsilon \beta} \\ y'_{\max} &= \sqrt{\epsilon \gamma} \end{aligned} \quad (2.77)$$

となるということ (2.57) よりすぐにする。また, (2.57) より, ベータトロン振動数 (これを tune ともいう) ν が, $n < \nu < n + \frac{1}{2}$ (n は整数) の範囲にあるときは y の振動は図 2.16 のように 0, 1, 2, 3, …… と時計回りであり, 上の範囲にないときは反時計回りになることがわかる (問 これを示せ)。

さて次にこの楕円 (ellipse ともいう) の面積を求めよう。面積は

$$\iint dy dy' = \int_{\Omega} y' dy$$

である (問 これを示せ)。そしてこの面積は, (2.57) をつかうとただちに

$$\text{面積} = \epsilon \pi \quad (2.78)$$

となる (問 これを示せ)。

そして 2.7 項と同じくこの ϵ をエミッタンス (emittance) という。(注. π をつけて, 面積そのものをエミッタンスということもある) また, ビーム中の粒子がこの楕円の面積をしめていたとすると, このビームのエミッタンスは ϵ であるという。しかし, 実際のビームはすそのが広がっており, 陽子 (proton) ビームの場合にはたとえば 90% の粒子がしめる ϵ をもってビームのエミッタンスとする。またストレージリングの電子ビームの場合には, ビームがガウス分布をしていることから, 通常 1σ (σ : standard deviation) のビームの中に相当するエミッタンスをもって電子ビームのエミッタンスといい, それ以外のときにはたとえば, 10σ のときのエミッタンスというようにいい方をする。

さて, (2.77) からビーム巾 (beam size) は $\sqrt{\epsilon \beta}$ であるが ϵ は定数であるから, ビーム巾を小さくする, つまりビームをしぼるためには, β を小さくすればよいことがわかる。 $\beta \approx R/\nu$ で与えられるから, ν を大きくすれば一般的にいって (β は場所々で変化するので常にそうとはいえないが), ビーム巾を小さくすることができる。

example

トリスタン main ring くらい大型のリングで陽子ビームを回したとしてみよう (トリスタン main ring の中を回るのは実際は電子と陽電子であるが, この場合には陽子を回したと仮定してみよう。というのは電子の場合のエミッタンスはリングの光学系 (optics) に依存するからである (第 3 章を見よ)。)。さて, トリスタンのパラメータ,

$$R \sim 480 \text{ m}, \quad \nu_x \sim 33$$

を使うと, $\bar{\beta}_x \sim 15 \text{ m}$ となる。

次にこのリングを弱収れんの加速器であるとしてみよう。すると $\nu_x \approx (1 - n)^{1/2}$ (実際は magnet のない場所もあるのでこれは近似式であるが, リング一周にわたって magnet でつまっているときは正確な値である (問 これを示せ))。今 $\nu_x \sim 0.7$ とすると, $\beta_x \sim 686 \text{ m}$ となり, この場合のビームサイズはトリスタンの場合 (強収れんの machine) にくらべて, 約

7倍大きいことになる。すると同じエミッタンスのビームを回すのに、電磁石の磁極の横巾が7倍大きい必要があることになり、巨大な電磁石が必要となる。そしてもっと悪いことに電磁石の磁極間の距離 (gap height) も同じくらい大きい必要があり (問 トリスタンの場合 $\nu_y \sim 39$ とし、弱収れんの場合を $\nu_y \sim 0.7$ としてどのくらい大きい必要があるか求めよ)、さらに電磁石が巨大になるばかりでなく、可能な磁場の強さ、電磁石電源等に多大の影響が出てくる。

(問 これほどでなくても、KEK-PSを弱収れんの magnet で作ったらどのくらい大きな電磁石が必要であるか、KEK-PSのパラメータ、 $R \sim 54\text{ m}$ 、 $\nu_x \sim 7$ 、 $\nu_y \sim 6$ を使って、弱収れんの場合と比較せよ)

以上、ベータatron振動のエミッタンスのみから弱収れんと強収れんの場合を比較したが、実際のビームはある運動量の拡がりをもっている。そしてたとえエミッタンスが0であるとしても、この運動量の拡がりのためにビームはある巾 (普通は横巾) をもつことになり、運動量の拡がりがある程度以上あると、これによるビーム巾の方がエミッタンスによる巾より大きくなる。そして、以下の項で示すように、弱収れんの場合、強収れんより、運動量の拡がりの方がより大きくビーム巾にきいてくることわかる。

さて、電子ストレージリングの場合、エミッタンスが optics (リングの光学系) によるとのべたが、これは一般に ν_x が大きいほど小さい。つまり β_x が小さいほど小さい (第3章をみよ)。ところがこのリングから放射されるシンクロtron光のたて方向の傾きの拡がり (divergence) は (2.77) から $\sqrt{\epsilon_y r_y}$ によって決まると (光は粒子の進行方向に出ると考えてよい (第3章をみよ)) 考えてよいので、光の divergence が小さいためには r_y が小さいことが必要である。そして r_y を小さくするためには β_y を大きくする必要があり (α_y が小さいことも必要)。

(注. 光がBMからでてくる場合には上の議論は水平方向の divergence にはあてはまらない (問 それはなぜか)。また電子ストレージリングの場合、たて方向のエミッタンスは ν_y を小さくしても通常は大きくならない (ν_y はエミッタンスを決める主な要因ではない)。

2.10 閉軌道 (closed orbit) と閉軌道のずれ (closed orbit distortion)

加速器を設計したり、加速器を実際に作るとき、これがビームの中心が通るところであるというものがあ

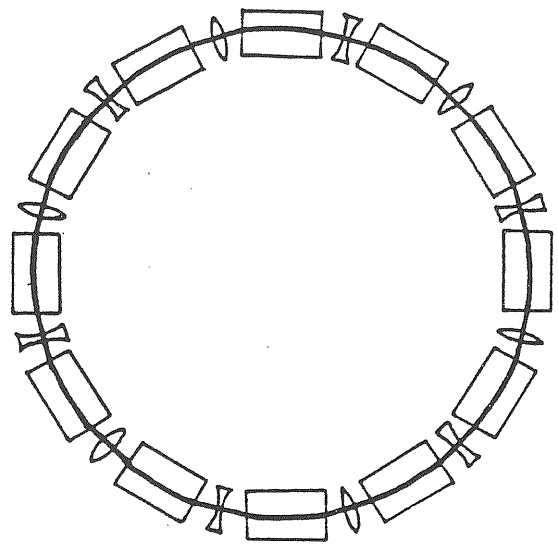


図 2-17.

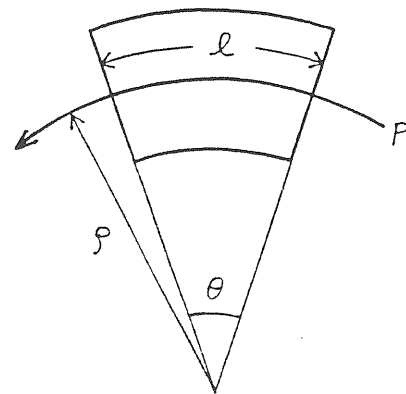


図 2-18.

るはずであり、これを (設計上の) 中心軌道 (central orbit) といったり、design orbit といったりする (図 2.17参照)。そしてこの閉じた軌道を閉軌道 (closed orbit) という (実際、加速器を設計するときにはビームの中心が1周で閉じるように bending magnet を配置する)。閉じるようにするためには、1コの bending magnet (BM) による曲げ角 θ が、 $p = e B \rho$ の関係と図 2.18より、

$$\theta = \frac{e B \ell}{p} \quad (2.79)$$

で与えられることを使って、BMを配置すればよい (問 (2.79)をだせ)。

また (2.79) は、

$$\begin{aligned} \theta \text{ [rad]} &= 0.2997925 B \ell / p \\ &\approx 0.3 B \ell \text{ [T} \cdot \text{m]} / p \text{ [GeV/c]} \end{aligned}$$

(2.80)

ともかける(問 これを示せ)。

そして他の電磁石、たとえば四極電磁石(QM)は、その電磁石の中心がこの中心軌道上にあるように配置し、この電磁石の磁場が中心でゼロであるようにする。さてこの閉軌道はふり子(またはばねにおもりをぶらさげたような調和振動子)でいえば、ふり子の平衡位置に相当するものである。ところで、ふり子にある一定の力を横に加えると、または、ばねにぶらさがったおもりを一定の力で引っばるとどうなるであろうか。

当然つりあいの位置が移動する。これと同様に、リングの中に余分な磁場があると、つりあいの位置であるはずの閉軌道が移動する。このずれを閉軌道のずれ、または closed orbit distortion (通称C.O.D.) という。非常に簡単なC.O.D.の例として、一様磁場中の荷電粒子の円運動を考えよう(この円運動は上の design orbit に相当する)。次に磁場をある量だけ変化させてみよう(この量が余分な磁場に相当する)。すると荷電粒子の運動の軌道が変化する。この場合には円の半径が変化する。この半径の変化量がすなわちC.O.D.と呼ばれるものである(問 この場合の磁場の変化量と、C.O.D.の関係を求めよ)。さて、実際のリングの中で、この(C.O.D.を引き起こす)余分な磁場を作る主な要因として次のものがあげられる。

- (i) BMの磁場の error (field error $\Delta B/B$)
これは水平方向のC.O.D.を生じる。
- (ii) BMの軌道中心の回りの回転(rotation error $\Delta\theta$)
これはたて方向のC.O.D.を生じる。
- (iii) 四極電磁石のすえ付け誤差(setting error $\Delta x, \Delta y$)
これは両方向のC.O.D.を生じる。

(問 なぜ(ii),(iii)の error がC.O.D.を生じるのか)

そして、実際のC.O.D.は上の例のように単に半径が変化するというのではなく、図2.19のようにゆがむ。これは、余分な磁場が上の例のようにリングの中に一様に分布していないのと、(QM(四極電磁石)による)収束力の強さもリングの中で一様ではないことによるものである。

さて、このC.O.D.を記述する方程式は、2.6の(2.17)式である。

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K(s)x = -\frac{\Delta B(s)}{B\rho}$$

そして、この方程式を満足する解の中で、リング一周で閉じた解がC.O.D.といわれるものになる。つまりリングの周長Lを周期とする解がC.O.D.である。これはふり子でいえば、ある周期をもつ外力(上の方程

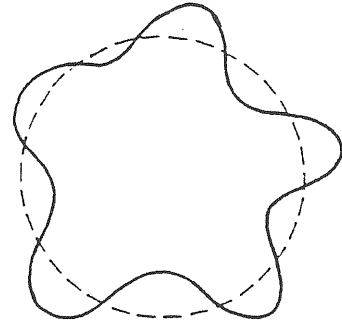


図 2 - 19.

式で ΔB は $\Delta B(s+L) = \Delta B(s)$ である) に対する解の中で、この周期をもつ周期解が、このC.O.D.に相当する(Appendix Aをみよ)。このアナロジーの方が先ほどのふり子のつりあいの位置のずれというアナロジーより、実際のC.O.D.に近い。近いというよりほとんどそのものであるといってもよい(あとの項でそのことを示す)。

さて、このC.O.D.の大きさが真空チャンバーの外に出たり、電磁石のよい磁場の所(たとえばBMの一樣な磁場の部分)をはずれたりすると、ビームがリングを回らないということになる。またそこまでいかなくとも、ビームのすそのがチャンバーをかすったり、よい磁場の所(good field region)をはずれたりするとビームの寿命が短くなる。そのため上の要因(i),(ii),(iii)が生じないようにすることが非常に重要である。またこのC.O.D.が時間とともに変化しないようにすることも同様に重要であり、これが時間的に変化すると、ビームのコントロールに支障をきたすのみならず、リング内で起こるいろいろな現象を把握することが困難になってくる。

さて要因の(i)については、いうまでもないことかもしれないが、個々のBMの磁場の強さのばらつきを少なくする、また各BMの磁場を一樣にする(問 これはなぜか)等が上げられる。さらにBM以外の電磁石についても、磁場中心がちゃんとでている必要がある。たとえばQMの中心の磁場がゼロでない要因(iii)と同じことになる。次に要因(ii),(iii)については電磁石のすえ付け(alignmentともいう)をきちんとやるということである。たとえば0.1mmの精度でやる必要がある。周長が数十mから数kmとなるようなリングに対して(もっとも巨大リングに対しては、リング全周にわたって0.1mmの精度というわけではない)。また時間変動については、電磁石電源の電流値のふらつきがないようにするというのである。まとめて言えば、C.O.D.を生じないようにするためには、

よい電磁石, よい電源, よい alignment

ということになる。あたり前ではあるが、加速器の死命を決するものといってもよい。

しかしながら、実際には、この C.O.D. が全くない加速器を作ることとは不可能であるので、次に重要になってくるのは、これを補正、つまりゼロになるようにすることである。これを C.O.D. correction という。これを行なうためのものを補正電磁石 (steering magnet, corrector 等) という。この他に、BM に補正用のコイルを巻くことによって行なうこともある (back-leg winding, pole face winding がある)。これらの補正電磁石は小さい偏向電磁石であり、これらを励磁することによって、余分な磁場 (この場合、有用な磁場であるが) を発生させて、新たな C.O.D. を作り、今まであった C.O.D. をちょうど打ち消すようにすることによって C.O.D. correction を行なう。たとえば PF-ring の場合、補正する前の C.O.D. は、よこ方向の最大値が $\sim 10\text{mm}$ 、たて方向の場合 $\sim 5\text{mm}$ ぐらいであり、これは予想値よりいくらか低い値であった。そして、補正後は、よこ方向の最大値 $\sim 1\text{mm}$ 、たて方向は $\sim 0.5\text{mm}$ となった。PF-ring の場合、C.O.D. がずれると放射光もずれるので、これが時間的に 0.1mm ずれても実験にさしつかえることがあり、C.O.D. correction は高エネルギー実験のための加速器より、直接実験にかかわってくるという意味で重要である。しかし高エネルギー加速器は巨大リングであるためわずかの余分な磁場でも全周にわたると、ちりもつもれば山となりで、C.O.D. を生じないようにすること、またそれを補正することが、重要になってくる。

2.11 分散関数 (dispersion function)

dispersion function とは、また η -function (eta-function) ともいい、(単に η ともいい)、ずれた運動量 (momentum) $p + \Delta p$ をもつ粒子の閉軌道の、中心の momentum p (または基準の momentum, nominal momentum) の粒子の閉軌道 (前項の closed orbit) に対するずれを表わすもので、この軌道のずれを x_ϵ とすると、

$$x_\epsilon = \eta \Delta p / p \quad (2.81)$$

と定義されるものである。そして、前項の C.O.D. が (2.17) 式に従うのと同様に、 x_ϵ は次の式に従う

((2.18) 式をみよ)。

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K(s) x = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p} \quad (2.82)$$

そして、前項と同様に、一周について周期的である解が Δp だけずれた momentum に対する閉軌道 x_ϵ であり、これを $\Delta p / p$ でわったものが η である。つまり、 η もリング全周について周期的で、

$$\eta(s + L) = \eta(s) \quad (2.83)$$

となり、 η はまた (2.82) を $\Delta p / p$ でわって、

$$\frac{d^2 \eta}{ds^2} + K(s) \eta = \frac{1}{\rho(s)} \quad (2.84)$$

の周期解であるといってもよい。(注。(2.18) では左辺にも $\Delta p / p$ がでているが、通常、無限小の $\Delta p / p$ に対して η を定義するので η の式は (2.84) となる。そして (2.84) から明らかのように η は $\Delta p / p$ によらないものとする。しかし実際には大きな $\Delta p / p$ に対しては (2.81) のように定義された η は $\Delta p / p$ の関数となる。)

さて前項の C.O.D. は余分の磁場があると生じたが、 η の場合は (2.84) からわかるように BM があると生じる。そしてもしたて方向に軌道を曲げるような BM (Vertical bending magnet) があると、たて方向にも η が生じる。このように η の場合は加速器の設計段階から存在するものであるので、これを考慮に入れて設計を行なう必要がある。そして実際の軌道のずれは (2.81) 式で表わされるように、 η に $\Delta p / p$ をかけたものであるので、 $\Delta p / p$ なる量の見積りも必要である。図 2.20 は、dispersion の生じる様子を表わしたものである。

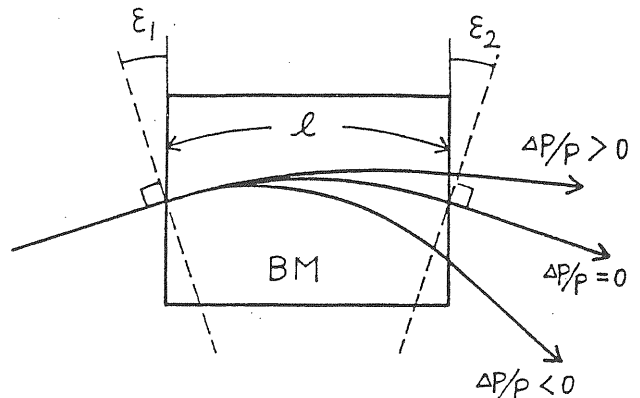


図 2 - 20.)

この図は、BMの入口では $\Delta p/p \approx 0$ の粒子も $\Delta p/p = 0$ の粒子も同じ軌道上にあるとした例である。次にではこのBMによる η の入口と出口の関係を調べてみよう。そしてこれを (2.55), (2.56) のようなマトリックスで表わしてみよう。BMの中では運動方程式は

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{1}{\rho^2} x = \frac{1}{\rho} \Delta p/p \quad (2.85)$$

となる。最初に $\Delta p/p = 0$ の場合を考えると、マトリックスは、

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \cos s/\rho & \rho \sin s/\rho \\ -\frac{\sin s/\rho}{\rho} & \cos s/\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_0$$

となる (問 これを示せ)。(ただし s としてBMの軌道にしめる長さ ℓ をとる)

次に $\Delta p/p \approx 0$ の場合であるが、まず (2.85) の特殊解はただちに、

$$x = \rho \Delta p/p$$

と求まる。よって (2.85) の一般解は、

$$x_1 = A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho} + \rho \Delta p/p$$

$$x'_1 = -\frac{A \sin s/\rho}{\rho} + \frac{B \cos s/\rho}{\rho} + 0$$

となる。ここで $s=0$ とおくと入口の x と x' となるので、

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \cos s/\rho & \rho \sin s/\rho \\ -\frac{1}{\rho} \sin s/\rho & \cos s/\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_0 + \begin{bmatrix} \rho (1 - \cos s/\rho) \\ \sin s/\rho \end{bmatrix} \Delta p/p \quad (2.86)$$

となることがすぐにわかる (問 これを示せ)。ただしここでも $s = \ell$ とおく。これは次のようにもかける。

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) \\ -\frac{\sin \theta}{\rho} & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p \end{bmatrix}_0 \quad (2.87)$$

ただし、 $\theta = \ell/\rho$ である (問 これを示せ)。

では次に η に対して (2.87) はどうなるであろうか。それは単に

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{bmatrix}$$

という置きかえをすればよく、マトリックスは変化しない (問 これを示せ)。ところがこれでBMについてのマトリックス (transfer matrix) が求まったかというそうではない。(2.87) のマトリックスは実はBMの端 (edge) が図 2.18 の点線のようにになっている場合、つまり、(中心) 軌道と edge が直角になっているようなBMのマトリックスである。このようなBMを sector magnet という。そして実線のようにになっている場合を rectangular magnet という。そしてこの rectangular 型のBMの場合、マトリックスは (2.87) のようにはならない。

いま、図 2.21 のようにBMの入口の所がなっていたとしよう。すると中心軌道から x だけ離れた (x は小さいものとする) ところを通る粒子は中心軌道を通る粒子よりおよそ、

$$\Delta s \approx x \tan \epsilon_1$$

の距離、BMの磁場を感じないことになる (x を小さいとしたので x' の寄与は無視できる) (問 これを示せ)。さて、BM中では粒子の進んだ距離 s と曲げられた角度 θ とは $s = \rho \theta$ の関係にあるので、 x の所を通る粒子は

$$\Delta \theta = \Delta s/\rho = \frac{x}{\rho} \tan \epsilon_1$$

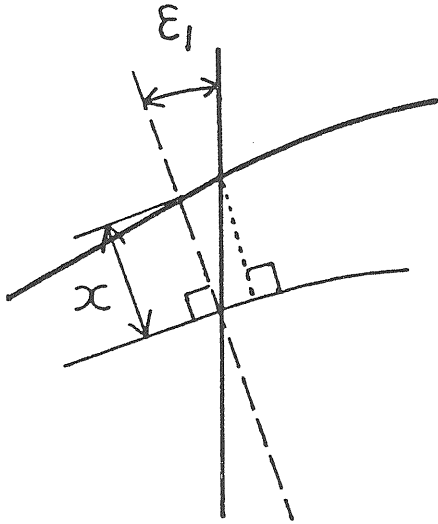


図 2 - 21.

だけ中心軌道上の粒子より曲げられないことになる。よって edge の所での transfer matrix (マトリックス) M_1^E を

$$M_1^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\tan \epsilon_1}{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

のように近似することができる (問 これを示せ)。

ところで、QMのマトリックス (2.55), (2.56) で s をどんどん小さくしていったらどうなるであろうか (ただし Ks は一定にして)。

たとえば(2.56)式のマトリックスは

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

となる。ただし $k = Ks$ (問 これを示せ)。このようにQMの収束力を1ヶ所に集中させて考えるやり方を thin lens 近似という (これについてはあとの項を参照)。QMや drift space (これは電磁石のない空間であった) 等については、運動方程式 (2.82) の右辺の項がゼロであるので、(2.87) のように3行3列のマトリックスでかいた場合3列目は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

という形になる。よってQMを thin lens 近似した場

合、(2.55) は

$$M_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

また (2.56) は

$$M_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

となる。

さて (2.88) にもどるとこれは (2.90) で $k = \tan \epsilon / \rho$ とおいたのと同じであることがわかる。つまり (2.88) は thin lens 近似での defocusing quadrupole magnet と同じである。defocusingのQMはたて方向には収束力をもつので、たて方向は (2.89) で表わされる。これから類推できるように、edgeの所のたて方向のマトリックスは

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\tan \epsilon}{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

となる。このようなedgeの収束(発散)力を edge effect という。実際はedgeの所では磁場が急にはゼロにならず、また磁場の分布も複雑でちゃんとした取り扱いが必要であるが、上の近似で十分な場合が多い (多いように bending magnet を作る) が、たて方向はもうすこし近似を上げる必要があるときもある。出口の所も同様であるので rectangular magnet 全体の transfer matrix は $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \theta/2$ として (問 これを示せ)、また (2.87) の matrix を M^S とすると、

$$M_H^R = M_2^E M^S M_1^E$$

とかけ (問 これを示せ)、

$$M_H^R = \begin{bmatrix} 1 & \rho \sin \theta & \rho (1 - \cos \theta) \\ 0 & 1 & 2 \tan \theta/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.92)

となる (問 これを示せ)。

Sector magnet の場合のたて方向は drift space と同じであるので、その matrix は

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

となる (問 これを示せ)。

またこれから rectangular magnet のたて方向の matrix M_V^R は、

$$M_V^R = \begin{pmatrix} 1 - \theta \tan \theta/2 & & & \\ -\frac{1}{\rho} \tan \theta/2 (2 - \theta \tan \theta/2) & & & \\ & & & \\ & & \rho\theta & 0 \\ & & 1 - \theta \tan \theta/2 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

となることがわかる (問 これを示せ)。

次に η の例として非常に簡単な例を 1 つ上げよう。それは一様磁場中で荷電粒子が回っている場合である。これは $p = e B \rho$ の関係を使うと、 Δp だけずれた粒子に対しては、

$$\Delta p/p = \Delta \rho/\rho$$

となるので (問 これを示せ)。

$$\eta = \rho \quad (2.95)$$

となる。これはいかにももっともらしい。 η は周期的な解であったので、これは (2.87) で $\theta = 2\pi$ とおき、左辺と右辺のベクトルを等しいとして、つまり左辺のそえ字 1 を 0 として計算できるはずである (問 これを試みよう)。しかしうまくいかない。それは実は一様磁場中では $\Delta p = 0$ の粒子に対して無数に閉軌道が存在していることに関係している (問 無数に閉軌道があることを示せ)。これと同様に η も無数にある。しかし加速器では (通常は) 閉軌道が一つしかない。それは収束力のためである。上の例は調和振動子

の収束力 (バネの力) をゼロにしたときのつりあいの位置を求める問題と同じである。この問題をマトリックスで解こうとするとうまくいかない (解が無数にある)。よってこの例は η の例としては悪い例であったが、収束力がないといかに粒子の運動がふらふらしたものであるかということを示すよい例であったとも言える。ただし運動が不安定というわけではない。ただ一様磁場の領域が、ものすごく広いことが必要ではあるが (問 これからどんな加速器を想像するか)。 η のちゃんとした例はあとの項を参照。さて、この η も前項のような余分な磁場があるとそれ自身もゆがむことを指摘しておこう (問 それはなぜか)。そしてそのような場合、設計の段階ではないはずであったたて方向の η (η_y) を生じることになる。特に高エネルギー加速器のような巨大リングの場合、この η_y は大きくなる。そして、ビームはいろいろな $\Delta p/p$ をもっているのだから、(2.81) からわかるように、このためにたて方向のビーム巾 (beam height) がひろがる。すると大きな $\Delta p/p$ をもった粒子は真空チェンバーにあたってしまふばかりでなく、衝突型リングの場合にはルミノシティ (第 4 章を参照) がさがって、実験に支障をきたすことになりかねない。このように衝突型リングの場合 C.O.D. はもちろんであるが、 η のゆがみ、特に η_y の補正が重要である。この η -correction は通常 C.O.D. correction と同様、補正電磁石で行なわれる。

さて、これまでのことから次のことがわかった。ある粒子の design orbit からのずれ x は

$$x = x_c + x_\epsilon + x_\beta \quad (2.96)$$

とかけるとのことである。ここで x_c は C.O.D. を、 x_ϵ は $x_\epsilon = \eta \Delta p/p$ を、そして x_β はベータatron 振動を表わす。そして粒子の集まりであるビームの中心のずれは、 x_c であり、beam size は運動量のひろがりからくる x_ϵ のひろがりやエミッタンスからくるひろがりによって決まる。しかし運動量のずれとエミッタンスとの間に相関がある場合や、ない場合があり、実際の beam size をはっきりと定義することはむづかしいが、普通、次の 2 つの式のどちらかが使われる。

$$\text{beam size} = \eta (\Delta p/p) + \sqrt{\epsilon \beta} \quad (2.97)$$

$$\text{beam size} = \sqrt{(\eta \Delta p/p)^2 + \epsilon \beta} \quad (2.98)$$

ここで $\Delta p/p$ 、 ϵ として、陽子の場合には、通常 90% の粒子がその中に入るような値をとる。電子ビームの場

合は $\Delta p/p$ の分布の 1σ をとり ($\Delta p/p$ もガウス分布している), ϵ については $\sqrt{\epsilon\beta}$ の 1σ をとって, (1σ の) beam size という (電子ビームの場合 (2.98) 式が使われる)。さて, リングの真空チェンバーの大きさは少なくともこの beam size (電子ビームの場合) はこれとして $8\sim 10\sigma$ の beam size を通常つかう, 第3章参照) より大きいことが必要である。しかし普通は, さらにこれに予想される x_c (または補正後の x_c) を加えて, 真空チェンバーの必要な大きさを決める (問 (2.97) と (2.98) のどちらを採用するのが安全サイドであるか)。この真空チェンバーの大きさを (または磁場の good field region 大きさを) アパーチャー (aperture) といい, 実際にリングに入射できるビームの $\Delta p/p$ のひろがり, ϵ をアクセプタンス (acceptance または admittance) という。そして $\Delta p/p$ については momentum のアクセプタンスといい, ベータatron振動の ϵ については通常, 単にアクセプタンスということが多いようである。

2.12 momentum compaction factor α

前項でのべたように, ずれた momentum Δp をもった粒子は, 中心の momentum をもった粒子の閉軌道とはちがった閉軌道をもつ (図 2.22 をみよ)。そして図 2.22 に示したように, 通常は $\eta \geq 0$ である。

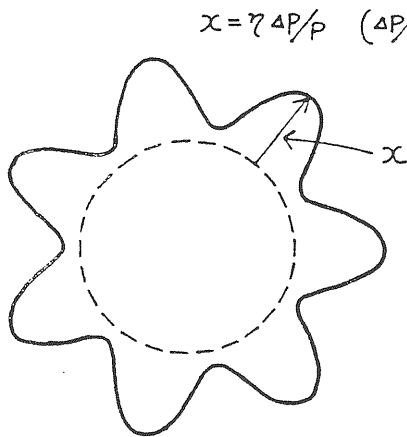


図 2 - 22.

これから容易にわかるように, $\Delta p > 0$ である粒子は, $\Delta p = 0$ の粒子より, 閉軌道の長さが長く, $\Delta p < 0$ の粒子は短い。momentum compaction factor (通常これを α と表わす) とは, 中心閉軌道の周長を C (いままで L としたものと同じで, よく L と C の文字が使われる) としたとき,

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha \frac{\Delta p}{p} \quad (2.99)$$

と定義されるものである。ここで ΔC は Δp の粒子の周長と $\Delta p = 0$ の粒子の周長との差である。ここで α の簡単な例として, 前項の (悪い) 例をとり上げてみよう。この例では, ある運動量をもった粒子の閉軌道は無数にあったが, 周長は一つに定まる。前項の議論より (また図 2.23 もみよ),

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \alpha \Delta p/p$$

となり, この例の場合 α が,

$$\alpha = 1 \quad (2.100)$$

と求まる (問 これを示せ)。

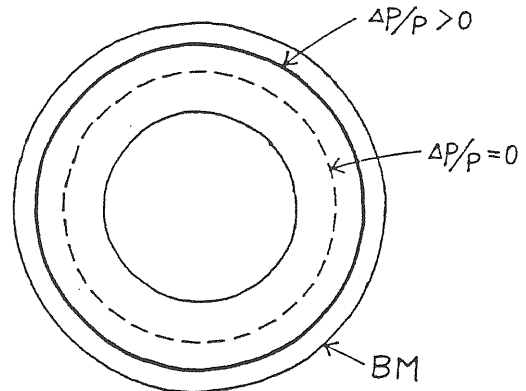


図 2 - 23.

図 2.22 からわかるように α は dispersion η に関係していると考えられるが, 実際, α は次のようにかける。

$$\alpha = \frac{1}{C} \oint \frac{\eta}{\rho(s)} ds \quad (2.101)$$

ここで積分は一周にわたるものとする。これは以下のように考えればわかる。まず一個の BM による, α への寄与を考えることにし, その一部分を図示すると, 図 2.24 のようになる。中心の閉軌道上の粒子が $d\theta$ だけ曲げられたとすると図からわかるように, その粒子は ds の距離進み, Δp だけずれた momentum をもった粒子は, この ds に対して $d\ell$ の距離進む。ここで $d\theta$ が微小であるとする, 以下の関係が導びかれる (問 これを示せ)。

$$d\ell = \sqrt{(d\ell')^2 + (x'ds)^2} \quad (2.102)$$

$$= \sqrt{(\rho+x)^2 + (x'\rho)^2} d\theta$$

$d\rho/\rho$ が小さいとすると、第一近似では、

$$d\ell \approx (\rho+x) d\theta = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) ds \quad (2.103)$$

となる (問 これを示せ)。周長の差は、 $d\ell - ds$ であるので、BMの ΔC への寄与は、

$$\Delta C_{BM} = \int_{BM} \frac{x}{\rho} ds \quad (x = \eta \Delta P/P) \quad (2.104)$$

となる (問 これを示せ)。リング内の全部のBMによる ΔC への寄与は各々のBMによる ΔC を単に加えればよい。

さて、では他の四極電磁石や、drift space による ΔC への寄与はどうなるであろうか。(2.104) を導びいた手順をみればわかるように、曲率 $1/\rho$ がないと第一近似では ΔC に寄与しないことがわかる。よってBMのみが (設計上は) ΔC に寄与することがわかる。これらのことから α は (2.101) によって計算できることがわかる (問 これを示せ)。

(問 図 2.23 の場合の α を (2.101) から計算せよ)

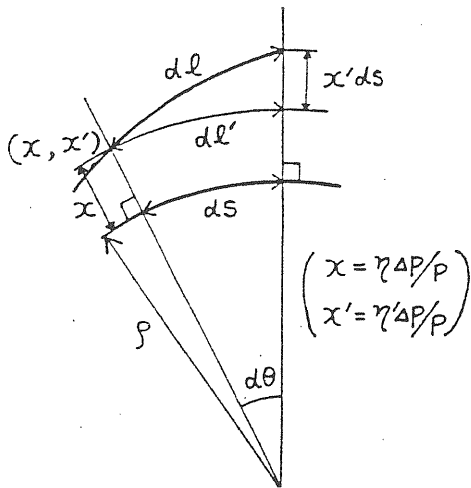


図 2 - 24.

2.13 β, η の簡単な例

この項では β, η のふるまいを、よく使われる電磁石の配列 (これをラティス, lattice という) を例にとって説明しよう。そして簡単のために thin lens 近

似を使うことにする。図 2.25 にこの例の lattice を示す。

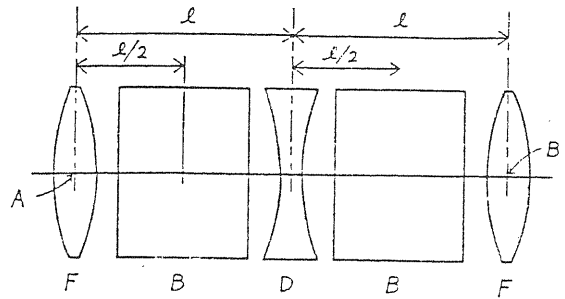


図 2 - 25.

図で F は focusing quadrupole magnet を、D は defocusing quadrupole magnet を、そして B は bending magnet を表わすものとする。このような magnet の配列を FODO の配列と、普通略称される (その際 B があるかないかということを意識しないで、O でその所には収束のための magnet が無いということを表わす)。今、このような FODO の配列をいくつか集めて、リングを作ったとしてみよう。すると (2.15) の $K(s)$ は、 $K(s+L) = K(s)$ (L は一周の長さ) であるばかりでなく、一個の FODO を周期とする周期関数となる。つまり $K(s+2\ell) = K(s)$ となる。ここで 2ℓ は図 2.25 の FODO の長さである。このような周期的構造の単位 (この場合、FODO) をピリオド (period) という。そして、この例のようにいくつもの FODO が並んでいるような場合、このような一つの FODO の単位を細胞にたとえて、セル (cell) という。しかしながら、加速器、特にストレージリングでは単に FODO のくり返しというようなセルのみでリングが作られていることは少ない。たとえばトリスタン MR の全体図は図 1.1 の ㊸ のようであるが、このリングの $1/8$ を図示すると図 2.26 のようになる。このリングでは、全周の 4 分の 1 がピリオドになっているが、図 2.24 をみると、図のかなりの部分が FODO のくり返しになっていることがわかる。通常このような FODO のくり返しの単位、つまりセルを ノーマル・セル (normal cell) という。そして大きな周期的単位、この場合の全周の 4 分の 1 をスーパー・ピリオド (super period) という。

さて、図 2.25 のような FODO を N 個集めてリングを作った場合、このリングの β や η はどうなるであろうかということを以下考えてみよう。まずはじめに β について考えることにする。

1 つのセル (1 つの FODO) についてのマトリックスを M_c とすると、(図 2.23) で A から B までのマトリックスを M_c とすると、リング全体のマトリックス

M_T は,

$$M_T = M_C^N$$

となる (問 これを示せ)。

この M_T は, 仮に M_C をリング全周に関するマトリックスと考えると, N 回リングを粒子が回ったときのマトリックスと同じ形をしている。そこで M_C が, (2.41) と同じように,

$$M_C = \begin{bmatrix} \cos \mu_c + \alpha \sin \mu_c & \beta \sin \mu_c \\ -\tau \sin \mu_c & \cos \mu_c - \alpha \sin \mu_c \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

とかけたとすると,

$$M_T = \begin{bmatrix} \cos N \mu_c + \alpha \sin N \mu_c & \beta \sin N \mu_c \\ -\tau \sin N \mu_c & \cos N \mu_c - \alpha \sin N \mu_c \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

となる (問 これを示せ)。

つまり M_C に関して, β , α , μ を求めれば全周について情報が得られ, 直接, 全周のマトリックスについて計算をする必要がない。このようにリングがいくつかの period からできていると計算が容易になるばかりでなく, 加速器を作ることや, 運転をすることが容易になり, またいろいろなことが考えやすいという利点がある。さて, F や D の収束力に比較して BM による収束力 (たとえば edge の収束力) は一般に弱いのでそれをゼロと近似すると, 収束に関しては BM は単なる drift space と考えることができる。また, BM の曲げ角を θ とし, $\rho\theta$ は一定で, θ をゼロにもっていくと (つまりリングにたくさんの BM があるとすると), どのタイプの BM に対しても収束力はなくなる (問 これを示せ)。さらに F と D の収束(発散)力の絶対値が等しいと仮定すると, 水平方向の M_C は, 向の M_C は,

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

とかける。ここで k は (2.89) のように, F の magnet を thin lens 近似したときの収束力の強さである (問 (2.107) を示せ)。よって M_C は,

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 - \frac{k^2 \ell^2}{2} & 2\ell \left(1 + \frac{k\ell}{2}\right) \\ -\frac{k^2 \ell}{2} \left(1 - \frac{k\ell}{2}\right) & 1 - \frac{k^2 \ell^2}{2} \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

となる (問 これを示せ)。

これより, (2.38) を使って

$$\cos \mu_c = 1 - \frac{k^2 \ell^2}{2}, \quad \frac{k\ell}{2} = \sin \frac{\mu_c}{2} \quad (2.109)$$

となる (問 これを示せ)。これから運動が安定であるためには,

$$k\ell \leq 2 \quad (2.110)$$

であることが必要であることがわかる。これはまた, $f = 1/k$ とおくと,

$$f \geq \ell/2$$

となる。ここで f は光学でいうところの焦点距離と同じものである (問 これを示せ)。上のことから, あまり収束力が強いと運動が不安定になることがわかる。このことは D の発散力が F の収束力と等しいとおいたために, 収束力が強いと不安定になるのではなく, 収束力が局在していることが本質的である。これは調和振動子の収束力がいくら強くても運動は安定であるが, これの運動を数値的に解くとき, ある条件のもとでは解が不安定になると, 全く同じ原因である (Appendix A をみよ)。

β , α は (2.40) より,

$$\alpha_F = 0 \quad (2.111)$$

$$\beta_F = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{1 + k\ell/2}{1 - k\ell/2}}$$

ここで今計算したのは, 図 2.23 で A から B までのマトリックスについてであったので, この β は F の中心での β である (問 (2.111) を示せ)。

また β_F は,

$$\beta_F = \frac{2\ell}{\sin \mu_c} \left(1 + \sin \frac{\mu_c}{2}\right) \quad (2.112)$$

ともかける (問 これを示せ)。

Dの中心の β は上と同様の手続によって、または β_F からただちに、

$$\beta_D = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{1-k\ell/2}{1+k\ell/2}} = \frac{2\ell}{\sin \mu_c} \left(1 - \sin \frac{\mu_c}{2}\right) \quad (2.113)$$

$$\alpha_D = 0$$

となることがわかる (問 これを示せ)。

また

$$0 < \mu_c < \pi \quad (2.114)$$

である (問 これを示せ、また μ_c の不定性はどうか。つまり、粒子は何回振動するか)。

(2.112)と(2.113)より μ_c によらず、

$$\beta_F > \beta_D \quad (2.115)$$

である (問 これを示せ)。これは重要なことである。focusing quadrupoleの所で β が大きいうことは、ここでbeam sizeが大きいうことを意味している。

(問 ではたて方向については β や μ はどうなっているであろうか)

(問 μ_c を横軸に、 $\beta_F/2\ell$ 、 $\beta_D/2\ell$ を縦軸にとってグラフを描け)

普通は、 μ_c として、 $60^\circ \sim 90^\circ$ 付近の値が使われる (問 0° や、 180° 付近が使われない理由を考えよ)。

さて、FとDの間では β はどのようになっているであろうか、これは(2.51)を使えば計算することができる。たとえば、Fの中心(A点)の後では、

$$\beta_1 = \beta_F$$

$$\alpha_1 = \frac{k}{2} \beta_F + \alpha_F = \frac{k}{2} \beta_F \quad (2.116)$$

$$r_1 = \frac{1 + \alpha_1^2}{\beta_1}$$

となる (問 これを示せ)。あとは(2.52)を使えば、FとD間の様子がわかる。ところで $\beta' = -2\alpha$ であるのでA点の後では β は減少する (問 これを示せ)。またDでは k の符号がFとはちがいが、かつDの中心では α はゼロであったので、Dのあとでは、 β は増加する。そしてB点ではまた β は β_F になる。これらのことから (直接計算によっても確かめられるが)、2次関数である β はFとDの間でその最少値をとらないこと

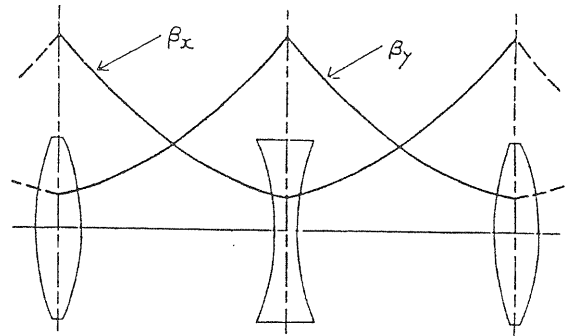


図 2 - 27.

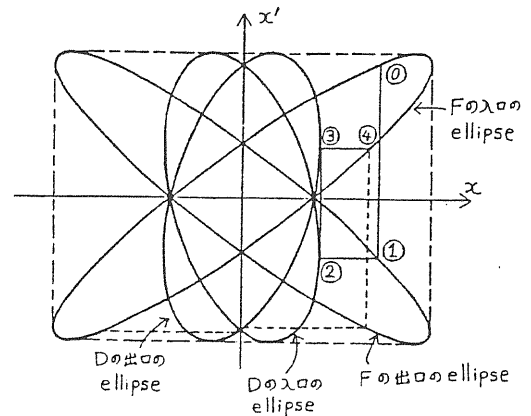


図 2 - 28.

がわかる (問 これを示せ)。よってこのセルの β の様子は図2.27のようになることがわかる。

以上のことから水平方向の β はFで最大となり、たて方向の β はDで最大となることがわかる。そしてエミッタンスからくるbeam sizeは水平方向はFの所でたて方向はDの所で一番大きくなる (問 これを示せ)。

ここでたいへん明白なことを指摘しておこう。それは一個の粒子はFとDの間で直線的に運動するということである。決して2次関数的ではない。では一個の粒子の運動と β との関係はどうなっているであろうか。

図2.28でFの入口で①の状態であった粒子は位置 x が正であるのでFの収束力によって、傾き x' が負の方向に kx だけ変化し、②の状態になる。次にFからDまで傾き一定のまま運動し③の状態になる。次に②のときの位置 x が正であるのでDの発散力によって x' が正の方向に変化し、④の状態となり、そしてDからFまで傾き一定で運動し①の状態になる。つまりFの入口で①の状態であった粒子は次のFの入口で④の状態になる。これを次々くり返して行くと、粒子は図でFの入口のellipseと示した楕円の上を動くことになる。そしてこの楕円は図2.15で示したものと同じものである。もしこの楕円の内側に多数の粒子が入っているとすると、これら粒子は上に示したような折れ線を

数多く描くが次のFの入口では、またこの楕円の内側に存在するというようになっている。しかしこれを数多くの折れ線を描いて示すのはなかなかたいへんなことである。このように1個の粒子のみを考えると、その運動は折れ線であるので、この折れ線を使って十分なときもあるが、多数の粒子（またはいろいろな状態）を考えると楕円の運動を考える方がすっきりしている。そしてこの楕円の運動を記述するのが β 関数なのである（問 実際に楕円が図2.28のようになることを示せ）。

次に η の計算をしてみよう。これも β と同様に一つのセルについてのみ考えればよい。そして2.11でのべたように η の従う方程式の周期解を求めればよい。またはそこにできた3行3列のマトリックスをMとすると、

$$\mathbf{x} = M\mathbf{x} \quad (2.117)$$

となるような解を求めればよい（問 これを示せ）。

ここで \mathbf{x} は、

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.118)$$

であるので、Mを

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

とおくと、(2.117)は、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

ともかける（問 これを示せ）。

一般に、

$$\mathbf{y} = A\mathbf{y} + \mathbf{b} \quad (2.121)$$

の解 \mathbf{y} は、

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - A)^{-1} \mathbf{b}$$

と与えられるので（問 これを示せ）、(2.120)の解

は、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1 - \cos \mu)} \begin{pmatrix} m_{13} + m_{12}m_{23} - m_{22}m_{13} \\ m_{23} + m_{21}m_{13} - m_{11}m_{23} \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

となる。ここで行列式の計算に(2.105)のようなTwiss parameterとマトリックス要素との関係をつかった（問 これを示せ）。以下でこの場合の η 、 η' を具体的に計算してみよう。

(2.120)、(2.122)からわかるように m_{13} 、 m_{23} 以外はすでにわかっているので m_{13} 、 m_{23} のみを求めればよいが、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \mathbf{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

は、また

$$\mathbf{z} = B(A\mathbf{y} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = BA\mathbf{y} + B\mathbf{b} + \mathbf{c}$$

とかけることを使うと（問 これを示せ）、 m_{13} 、 m_{23} はBをthin lens近似し、その曲げ角を θ とすると、以下のようにして計算できる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & \ell/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \\ & = \theta \left(1 + \frac{k\ell}{4} \right) \begin{pmatrix} \ell \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \theta \left(1 + \frac{k\ell}{4} \right) \begin{pmatrix} \ell \\ 2 \end{pmatrix} \\ & = 2\theta \left(1 + \frac{k\ell}{4} \right) \begin{pmatrix} \ell \\ 1 - k\ell/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.123)$$

となる（問 これを示せ）。そして(2.122)を使うと、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix}_F = \frac{\ell\theta \left(1 + \frac{1}{2} \sin \frac{\mu}{2}\right)}{\sin^2 \frac{\mu}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.124)$$

となる（問 これを示せ）。ここで求めた η はFの中心での η であるが、Dの中心の η は上で、 k の符号をかえることによって、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix}_D = \frac{\ell\theta \left(1 - \frac{1}{2} \sin \frac{\mu}{2}\right)}{\sin^2 \frac{\mu}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.125)$$

となる（問 これを示せ）。

η も β のときと同様、 μ が0の付近や 180° の付近では非常に大きくなるので μ としてこのような範囲の値をとることをさげなければならない。

さて、 η は β とちがひ、（ずれたmomentum についての）粒子の軌道であるのでdrift spaceの所では直線であり、これを図示すると、図2.29のようになる

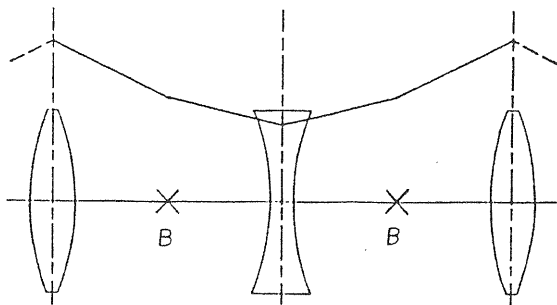


図 2 - 29

（問 $\eta/\ell\theta$ をたて軸に、 μ を横軸にグラフを描け）。ところで、今 μ を 90° としてみると、 β と η の大きさはおよそ

$$\begin{aligned} \beta &\sim 2\ell \\ \eta &\sim 2\ell\theta \left(\sim \frac{2\ell^2}{\rho}\right) \end{aligned} \quad (2.126)$$

となる。図2.24のノーマルセルの μ は 60° の場合であるが、 2ℓ としてノーマルセルの長さ16.12 mを、 θ として約0.024 mradを(2.126)に代入すると、

$$\sqrt{\beta} \sim 4 \text{ m}^{1/2}, \quad \eta \sim 0.38 \text{ m}$$

となる。図2.26と比較すると β はほぼ合っているが、 η は約半分である（問 では $\mu = 60^\circ$ として β 、 η を計算し、図と比較せよ）。

さて、図2.26でノーマルセルではない部分はノーマルセルにそう入した部分という意味で、インサージョン(insertion)といわれることがある。そして図で一番左のノーマルセルから左に向って η をゼロにしている所があるが、この部分のことをdispersion suppressorとかdispersion suppressing sectionとかいう。また図の左端の所はcolliding pointと呼ばれ、ここで電子と陽電子が衝突する。さてこの図のようなlatticeを設計したり、そのlatticeの β 、 η を計算することは、図2.25のような簡単な場合とちがって、計算機なくしては不可能である。そして計算機を使っても、このようなlatticeを求めることはかなりの作業である。実際に計算機でどのように計算するかということとは以下の項でのべるが、そこでだいじなことは、ある部分の β 、 η をとなりあう部分の β 、 η （または与えられた β 、 η ）に、なめらかに継ぐようにすることである。これをマッチング(matching)というが、 β のmatchingは（通常BMの収束力は弱いので）QMの収束力を変数として、それを適当に変化させて行なう。（latticeがまだ定まっていないときはQMの位置をかえたり、あらたにQMを加えたりして行なう）。また η のmatchingはlatticeがまだ定まっていない段階ではBMの位置や曲げ角をいろいろかえながら、かつQMの収束力や位置をかえながら行なう。

さて、もしある場所で η 、 η' ともゼロであり、かつそのとなりの部分にBMがないとすると、ここでも η 、 η' ともにゼロであるということをご指摘しておこう（問 これを示せ）。たとえば図2.26で左の部分で約100 mにわたってBMがない部分があるが（BMがないところでは中心軌道が直線であるので、このような部分を直線部(straight section)という）、ここにあるQMの収束力（QMの値という言い方をするときもある）をたとえいくら変えてもここに η は発生しないし、ノーマルセルのところの η に何も影響を与えない。

2.14 tune shift と chromaticity

C.O.D.は余分な磁場があると生じたが、ここでは収束力に誤差がある場合、または弱い収束力(発散力)をリングに加えた場合について考えてみよう。もしこの加えた収束・発散力がQMの収束・発散力の誤差によるものである場合には、これをgradient errorという。

さて、調和振動子のバネの力を変えると振動の周波数が変化しますが、それと同じように収束力を変えるとベータatron振動数 (betatron number) が変化します。そしてこの変化量のことを tune shift という (betatron number のことを tune ともいい、こちらの言い方がより多く使われている)。ではまず最初にこの弱い収束力が1ヶ所に局在している場合について tune shift を計算してみよう。この収束力の強さを k とし、その場所でのリング一周あたりのマトリックスを M_0 (この収束力を加える前のマトリックス) とすると、全体のマトリックス M は、

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \mu_0 + \alpha_0 \sin \mu_0 & \beta_0 \sin \mu_0 \\ -\gamma_0 \sin \mu_0 & \cos \mu_0 - \alpha_0 \sin \mu_0 \end{pmatrix}$$

となる。

そこで

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix}$$

とすると、

$$2 \cos \mu = 2 \cos \mu_0 - k \beta_0 \sin \mu_0 \quad (2.127)$$

となる (問 これを示せ)。

k が小さいとしているので $\mu = \mu_0 + \Delta \mu$ とおくと、

$$\begin{aligned} \cos \mu_0 \cos \Delta \mu - \sin \mu_0 \sin \Delta \mu \\ = \cos \mu_0 - \frac{k}{2} \beta_0 \sin \mu_0 \end{aligned}$$

となる (問 これを示せ)。これより、 $\Delta \mu = 2\pi \Delta \nu$ とすると

$$\Delta \nu = \frac{1}{4\pi} k \beta \quad (2.128)$$

となる (ここで、 β は β_0 の意味である)。これは k をリングに加えたときの tune の変化が k に対して線形であることを表わしているため、一般の場合には (2.128) は

$$\Delta \nu = \frac{1}{4\pi} \int \Delta K \beta(s) ds \quad (2.129)$$

となるのがわかる。ここで ΔK と k の関係

$$k = \Delta K \ell$$

であり、 ℓ は弱い収束が局在している場所の長さである。

(2.128) と (2.129) は簡単な式であるが重要な関係式であり、非常に有用である。たとえば、今、リングのある場所に強さのわかっている k を加え、tune shift $\Delta \nu$ を測定したとすると、(2.128) より

$$\beta = 4\pi \Delta \nu / k$$

であるので、その場所の β 関数の値がわかる。実際にはQMの磁極に補助コイルをまいて、それに電流を流し、 k をそのQMの所に加える方法や、QMの主コイルの電流をすこし変化させることによってそれを行なう方法などがとられる。一般にQMの主コイルに電流を流す電源は、いくつかのQMに対して共通であるので、後者の方法で得られた β の値はそのいくつかのQMの所の β の実際の値の平均値である。しかしながら設計上は β の値が同じでも実際にはばらついているのでより正確な値がほしい場合には前者の方法をとる必要がある。衝突型ストレージリングでは、colliding point でビームをしぼるためにその点での β の値を小さくしているが、(図 2.15 からわかるように) そのようにするとその点から離れるにしたがって β が急激に大きくなり、colliding point のそばにあるQMの所で β が最大になる (β_y が最大になる)。そのQMの所で前者の方法をもちいると、colliding point の両わきのQMの所の β が別々にわかり、それから本当に colliding point の所で β が最小になっているのかどうか、最小の β の値はいくらかということがわかる。また tune をすこし変えたい場合に、どのくらいの電流をQMのコイルに流したらよいかということを見積るのに、(2.128)、(2.129) は便利である。さらにこれらはQMの磁場の極性を確認するためにも使うことができる (問 どうしてか) が、極性に自信のある場合には、tune の小数部が $\Delta \nu$ と $1 - \Delta \nu$ のどちらであるのかということを決めることにも使うことができる (問 これを示せ)。

さて、ある粒子の運動量が中心の運動量から Δp だけずれたとすると、その粒子が感じる収束力は、

$$K/(1 + \Delta p/p) \approx K - K \Delta p/p \quad (2.130)$$

となり、中心の運動量をもつ粒子より収束力が $-K \cdot \Delta p/p$ だけ弱くなる。つまりこの粒子に対して tune が

$$\Delta \nu = -\frac{1}{4\pi} \int K \beta(s) ds \Delta p/p \quad (2.131)$$

だけ減ったことになる。そこで

$$\xi = \Delta \nu / \Delta p/p \quad (2.132)$$

なる量を定義してこれを chromaticity (色収差) という。そして上の場合の ξ ,

$$\xi = -\frac{1}{4\pi} \int K \beta(s) ds \quad (2.133)$$

を natural chromaticity という。これは設計段階からすでにある chromaticity という意味である。(2.133) からわかるように QM の所で β が大きいと ξ の絶対値が大きくなる可能性があり、(衝突型リングのときは colliding point の両わきで β が非常に大きい) たたとえばトリスタン MR の場合

$$\begin{aligned} \xi_x &\sim -60 \\ \xi_y &\sim -90 \end{aligned}$$

ぐらいになる。ここで、 $\Delta p/p = 1\%$ とすると ($\Delta p/p$ がこれぐらいの粒子がリングを安定に回わる必要がある)。

$$\begin{aligned} \Delta \nu_x &\sim -0.6 \\ \Delta \nu_y &\sim -0.9 \end{aligned}$$

となる。このように tune shift が大きいと後にのべるように運動が不安定になる tune を粒子がとることになり、ビームが不安定になるばかりか、 β 関数も $\Delta p/p$ とともに大きくゆがむ。またある種の集団的不安定性 (head-tail instability) を起こさないようにするために ξ をほぼゼロにすることが必要であるが、この chromaticity をゼロ、または望みの値にすることを chromaticity correction といい、通常、これは sextupole magnet (六極電磁石) をリングに配置することによって行なわれる。sextupole magnet の作る磁場は

$$\begin{aligned} B_y &= a (x^2 - y^2) \\ B_x &= 2 a x y \end{aligned} \quad (2.134)$$

である。ここで a は

$$a = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right|_{x=0}$$

で与えられる (問 $\text{rot } \mathbf{B} = 0$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$ を示せ)。このような磁場内の粒子の (粒子は電子として座標を 図 2.6 のようにとると) 運動方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} &= -\lambda (x^2 - y^2) \\ \frac{d^2 y}{ds^2} &= 2 \lambda x y \end{aligned} \quad (2.135)$$

となり、 λ は

$$\lambda = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right| / B \rho$$

で与えられる (問 これを示せ)。今この sextupole magnet が dispersion のある所におかれているとすると ($\eta_y = 0$ とする)。

$$x = x_\epsilon + x_\beta = \eta \Delta p/p + x_\beta, \quad y = y_\beta \quad (2.136)$$

であるが $x_\beta = y_\beta = 0$ の場合 (つまり $x = \eta \Delta p/p$ となり、これは $\Delta p/p$ をもつ粒子に対する閉軌道) には、

$$\frac{d^2 \eta}{ds^2} \Delta p/p = -\lambda \eta^2 (\Delta p/p)^2 \quad (2.137)$$

となる。(2.136) を (2.135) に代入し、(2.137) を使って、 x_β , y_β の一次までを考えると、

$$\frac{d^2 x_\beta}{ds^2} = -2 \lambda \eta \Delta p/p x_\beta \quad (2.138)$$

$$\frac{d^2 y_\beta}{ds^2} = 2 \lambda \eta \Delta p/p y_\beta$$

となる。これから dispersion のある所に sextupole magnet を置くと、 $\Delta p/p$ に依存する収束力が得られ、chromaticity は、

$$\xi_x = \frac{1}{4\pi} \int (2\lambda\eta - K) \beta_x(s) ds$$

$$\xi_y = \frac{1}{4\pi} \int (K - 2\lambda\eta) \beta_y(s) ds$$

(2.139)

となることがわかる。通常はノーマルセルの F (focusing quadrupole magnet の所) の近くに $\lambda > 0$ の sextupole magnet (通称 SF ともいわれる) をおき、D (defocusing quadrupole magnet の所) の近くに $\lambda < 0$ の sextupole magnet (通称 SD ともいわれる) を置く。そうすると、 β_x が F の所で大きく D の所で小さいので、また一方 β_y はその逆であるので、比較的 λ の絶対値が大きくならずに chromaticity を補正することができるが、このことは重要なことである。というのは (2.138) をもとめるのに x, y に関して一次の項のみをとったが実際には x^2, y^2, xy の項がベータatron振動の方程式に入っており、これらの項が大きい場合には振動が強い非線型振動となり、取り扱いがむづかしくなるだけでなく、線型振動にはなかったいろいろな resonance を誘起して、粒子の運動が不安定になりやすいからである。しかしながら衝突型巨大リングの場合には (natural) chromaticity がたいへん大きい上に、colliding point の付近の dispersion がゼロであるためその場所に sextupole magnet をおいて chromaticity を correction するということができないため、この correction は容易ではない。このような場合には $4p/p$ の一次まででは不十分で、 $4p/p$ の 2 次以上も考慮に入れる必要があり、また非線型のベータatron振動の効果も考えに入れる必要がある。そしてうまく correction の方法を見つけるためにさかんに計算機が使われる。たとえば、トラッキング (tracking) と呼ばれる方法があるが、これはある correction の方法がよいかわるいかを確めるためによく用いられる。この方法は粒子の運動方程式を直接数値積分する方法であるが、積分といっても方程式が線型の場所はマトリックスを使って解が求まるので、非線型の場所 (それもリングでは局在して存在する) のみを積分すればよい。通常はこの非線型の所を thin lens で近似するという方法がよくとられる。そのため計算機を使えば巨大リングでも一周ぐらいについて計算するのは容易なことである。しかしストレージリングでは粒子は 10 の何乗回も安定に回る必要があり、またビームの中の粒子はいろいろな (運動の) 初期条件をもっている。このようなことをまともに計算機シミュレーション (トラッキング) しようとする現存の超大型計算機をもってしても全く不可能であるので、通常は粒子がリングを回る回数をへらした

り、初期条件の数をへらしたりして行なっているが、これでもかなりのことがわかる。今、ある振幅をもった粒子が計算ではリングを何周もしなかったとすると、このような粒子は実際のリングでもたぶん何周もしないであろうし、これよりも何倍も大きな振幅をもった粒子は、絶対に実際のリングの中を安定に回わり得ないであろう (絶対的という意味は宝くじをあてるよりもっとあり得ないという意味である。ばく大な費用をかけてリングを作り、宝くじをあてるより困難なことをする人は高エネルギー実験家の中にもたぶんいないのではないでしょうか)。

2.15 調和振動子の方法

ベータatron振動を調和振動子の振動と同じように扱うことができたなら取り扱いが非常に簡単になる (2.7 と 2.8 の項を較べてみれば、ベータatron振動が調和振動子の場合にくらべてかなり複雑なことがわかる)。ところがそのように取り扱うことが可能であるということは (2.57) をみればすぐにわかる。(2.57) の第一式は位相について調和振動的であり (位相についての高次の振動はない)、また振幅は場所の関数であるが、両辺を $\sqrt{\beta}$ で割ってしまえば定数となる。この二つのことから (2.57) の第一式は、

$$\frac{d^2 \eta}{d\psi^2} + \eta = 0 \quad (2.140)$$

とかけることがわかる。ここで η は (dispersion の η ではない)、

$$\eta = x / \sqrt{\beta} \quad (= \sqrt{\epsilon} \cos[\psi(s) + \psi_0])$$

(2.141)

である。または

$$\phi = \psi / \nu = \frac{1}{\nu} \int_0^s \frac{ds}{\beta}$$

なる変数を使うと (リング一周で ϕ は 2π 増加する) (2.140) は

$$\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} + \nu^2 \eta = 0 \quad (2.142)$$

となる。このように (ϕ, η) でベータatron振動を記述すると調和振動子と全く同じになる。たとえば図 2.27 の折れ線も sine 関数的振動とみることができるということになる。

さて (2.57) の第一式からも明らかであるが、 η は

ψ が 2π 増加すると(または ϕ が $2\pi/\nu$ 増加すると)もとの値にもどる。この簡単な事実は、加速器では重要なことからである。今リングのある場所で粒子をけとばしたとしよう(ビームを磁場でまたは電場で曲げたとし、ビーム中心を粒子としよう)。するとあとは何もしないでも、 ψ が 2π だけ増加した場所では粒子の位置がもとにもどってゼロになる。そこでまた粒子を逆の方向にある量だけけとばしてやると、その後は位置をゼロのままにすることができる。つまりけとばした2ヶ所の間以外の場所ではビームは何もなかったように運動する。このようにリングのある部分のみ、ビームの軌道をずらすということは実際に加速器の運転によく使われる。そしてこのずれた軌道のことをlocal bumpという。さて上ではこの2ヶ所の位相差が 2π としたが、実際にはよく使われるのは位相差が π の場合である(問 この場合には、今度はどの方向にければよいか)。(図2.30をみよ。図には $x = \sqrt{\beta} \eta$ の例も示してある)

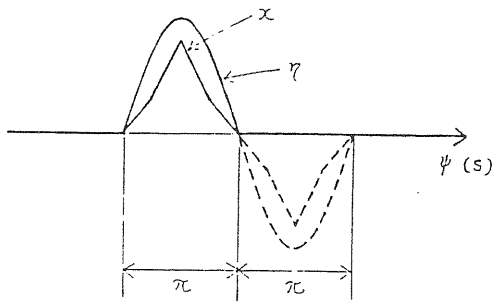


図 2 - 30.

さて、 η は(2.141)で与えられるように簡単な関係にあるが、 $d\eta/d\phi$ と dx/ds との関係はどのようになっているであろうか。それは(2.57)の第二式より

$$\frac{d\eta}{\nu d\phi} = \frac{d\eta}{d\psi} = x' \sqrt{\beta} + \alpha x / \sqrt{\beta} \quad (2.143)$$

と与えられることがわかる(問 これを示せ)。調和振動子の場合、振幅は不変であるが、この振幅の二乗は、

$$\eta^2 + \left(\frac{d\eta}{\nu d\phi} \right)^2 (= \epsilon) \quad (2.144)$$

とも表わされる。これを x 、 x' で表わすと、

$$\eta^2 + \left(\frac{d\eta}{\nu d\phi} \right)^2 = \frac{1}{\beta} [x^2 + (\alpha x + \beta x')^2]$$

となるが(問 これを示せ)、これはすなわち(2.76)

の Courant - Snyder の不変量にはかならない。

example

衝突型加速器では入射時(またその後あるエネルギーまで加速(これをrampingともいう)する場合にはその間)、互いに反対方向に回っているビームがcolliding pointで衝突しないように、電場をかけて2つのビームの軌道をずらしている(問一つのリングで電子・陽電子を衝突させる加速器では2つのビームの軌道を互いにずらすのに磁場ではなく電場を使う。それはなぜか)。さて衝突するのはcolliding pointのみであるので、そこにlocal bumpを作ればよい。colliding pointの付近では図2.15の(a)のように β が急激に両側で大きくなっているが、今、座標の原点をcolliding pointにとり、ビームをける2ヶ所の座標を s_1 、 s_2 とすると、その間の位相差 $\Delta\psi$ は

$$\Delta\psi = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\beta} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\beta_0 + s^2/\beta_0} \quad (2.145)$$

と与えられる。 β_0 は非常に小さく(トリスタンMRの場合 β_{0y} は0.05 m~0.1 mである)、colliding pointからちょっと離れる β は非常に大きくなるので、(2.145)の積分にきくのは原点の付近の β のみである。このことから、この積分を

$$\Delta\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\beta_0 + s^2/\beta_0} \quad (2.146)$$

と近似することができる。ここで $s = \beta_0 \tan \theta$ とおくことにより、

$$\Delta\psi = \pi \quad (2.147)$$

となる(問 これを示せ)。よってcolliding pointの付近のみで、かつ2つの場所でのみlocal bumpを作ることができる。しかしながら(2.146)、(2.147)は近似であるということに注意する必要がある。それはcolliding pointの両側にすこし離れば位相差が π に近くなるからといってcolliding pointを含むdrift spaceの中のみではlocal bumpを作ることができないということである。それは粒子はdrift space中では直線的に進むという事実から明らかである(問 上のことを示せ)。図2.31に実際にはどのようにlocal bumpを作るのかということを模式的に示す。

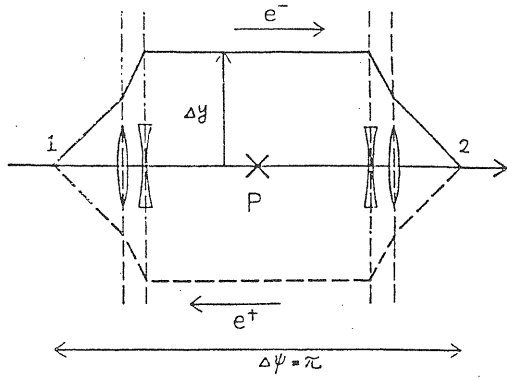


図 2 - 31.

通常 colliding point (P) で y 方向に 2 つのビームをはなすので、図 2.31 は y 方向について描いてある。ではどのくらい離れたら P 点でどのくらいずれるかをみてみよう。図の 1 の点でのけり角を θ とすると、

$$\eta_1 = 0$$

$$\frac{d\eta}{\nu d\phi} = \theta \sqrt{\beta_1}$$

となる (問 これを示せ)。ところが、1 と P 点での位相差は $\pi/2$ であるので、P 点では

$$\frac{d\eta}{d\phi} = 0$$

となる (問 これを示せ)。これと η は sine 関数的であることを使うと

$$\eta_p = \theta \sqrt{\beta_1}$$

となり、

$$x_p = \theta \sqrt{\beta_1 \beta_0} \quad (2.148)$$

と与えられる (問 これを示せ)。

ところでビームサイズ σ は $\sqrt{\epsilon \beta}$ ($\eta = 0$ とする) である。そして、いま y 方向について考えているので、P 点での軌道のずれ Δy とビームサイズ σ_y との比は

$$\Delta y / \sigma_y = \theta \sqrt{\beta_1 / \epsilon_y} \quad (2.149)$$

と与えられる。x 方向についての同様の式と、電子ストレージングでは、 $\epsilon_x \gg \epsilon_y$ である (次章を参照) という事実から y 方向にけた方が得であることがわかる (問 これを示せ)。

さて初めにもどって、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K(s) x = 0$$

は (2.142) になるということはわかったが、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K(s) x = F(s) \quad (2.150)$$

のような式はどのようになるであろうか。ただし (2.150) で $F(s)$ はたとえば、

$$F(s) = -\frac{\Delta B}{B\rho} \quad (2.151)$$

で与えられるものとする。(2.143) より

$$x' = \frac{1}{\sqrt{\beta} \nu} \frac{d\eta}{d\phi} - \alpha \eta / \sqrt{\beta} \quad (2.152)$$

であり、また

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{d}{ds} x' = \frac{1}{\nu \beta} \frac{d}{d\phi} x' \quad (2.153)$$

であるので、(2.150) の左辺を (ϕ, η) で表わしたとき、

$$\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} \text{ の係数は } \frac{1}{\nu^2 \beta \sqrt{\beta}} \quad (2.154)$$

であることがわかる。(2.150) の左辺は係数を除いて (2.142) に一致するはずであるので (2.150) は

$$\boxed{\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} + \nu^2 \eta = \nu^2 \beta^{3/2} F(s)} \quad (2.155)$$

となることがわかる。直接 (2.150) から (2.155) をだしたい人は (2.69) の第一式を使えばよい。これは

$$(\sqrt{\beta})'' + K \sqrt{\beta} - \beta^{-3/2} = 0, \quad (2.156)$$

$$\beta(s+C) = \beta(s)$$

ともかける。

さて、(2.150) の周期解を求めてみよう。 $F(s)$ が (2.151) の場合 この周期解はすなわち C.O.D. である。(2.150) の周期解を求めることは (2.155) の周期解を求めることであるが、この周期解は Appen-

dix A より,

$$\eta(\phi) = \frac{\nu}{2 \sin \pi \nu} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\xi) \cos \nu (\pi + \phi - \xi) d\xi \quad (2.157)$$

となる。ただし,

$$f(\xi) = \beta^{3/2} F(s) \quad (2.158)$$

である (問 これを示せ)。またはフーリエ展開した形として

$$\eta(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu^2 f_n}{\nu^2 - n^2} e^{in\phi} \quad (2.159)$$

と求まる。ここで

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) e^{-in\phi} d\phi \quad (2.160)$$

である (問 これを示せ)。

これらを使うと C.O.D. $x(s)$ は,

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu} \int_s^{s+c} \sqrt{\beta(s_1)} F(s_1) \cos [\pi \nu + \psi(s) - \psi(s_1)] ds_1 \quad (2.161)$$

または,

$$x(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\beta(s)} \nu^2 f_n}{\nu^2 - n^2} e^{in\phi} \quad (2.162)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi \nu} \int_0^c \beta^{1/2} F(s) e^{-in\phi} ds \quad (2.163)$$

とかける。さて (2.159) から Appendix A と同様に, ベータatron 振動数 (tune) が整数に近いと η が大きくなるのがわかる。または, (2.162) から x が, すなわち C.O.D. が大きくなるのがわかる。つまり tune があまり整数に近くなると C.O.D. が大きく

なってビームが回らないということになる。これを integral resonance (整数共鳴) といい, 実際のリングの運転に際し tune がこのような整数の近くならないように選ぶ必要がある。また (2.159) から tune に最も近い整数をもつスペクトルが (この整数に対応する f_n が極端に小さくないかぎり), η の大きさをだいたい決めていることがわかる。このことを使うと $\Delta\nu$ を知っている場合 tune の整数部がわかる。それは測定した C.O.D. がリング一周で何回振動しているかを数えれば, その数が tune に近い, つまり tune の整数部 (またはプラス 1) であるはずであるからである。しかしこの方法がうまく行くのは C.O.D. がちゃんと correction される前である。C.O.D. correction は C.O.D. を小さくすることであるから (C.O.D. correction の方法はいくつかあるが), correction を行なうと実効的に tune に近い整数をもつスペクトルが小さくなり, tune の整数部を決めることが困難になる。しかしながらそうなった後でも, ある所に ΔB を発生させる (実際にはある steering magnet を励磁することによって, これを行うことができる。その上, この場合には, ΔB が局在しているために, f_n の絶対値は n がかなり大きいところまでほとんどかわらないので (問 これを示せ), 容易に tune の整数部を決めることができる。さらにこの方法はもっと多くの情報をもたらす。これを以下に示そう。この場合 (2.161) は ΔB のある場所の s を s_1 として,

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_1)}}{2 \sin \pi \nu} F(s_1) \ell \cos (\pi \nu - |\psi(s) - \psi(s_1)|) \quad (2.164)$$

となる。(問 $s > s_1$, $s < s_1$ の場合にわけて, これを示せ)

ここで ℓ はたとえば steering magnet の長さである。上で $F(s_1) \ell$ は ΔB によるけり角 θ であるので,

$$\theta = F(s_1) \ell = \frac{-\Delta B \ell}{B \rho}$$

となり (ℓ は短かいとして, thin lens 近似する) (問 これを示せ), (2.164) は,

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_1)}}{2 \sin \pi \nu} \theta \cos (\pi \nu - |\psi(s) - \psi(s_1)|) \quad (2.165)$$

ともかける。(2.165)で $s = s_1$ とすると、

$$x(s_1) = 0.5 \beta(s_1) \theta \cot \pi \nu \quad (2.166)$$

となる。(2.165)を図示すると、図2.32のようになる。

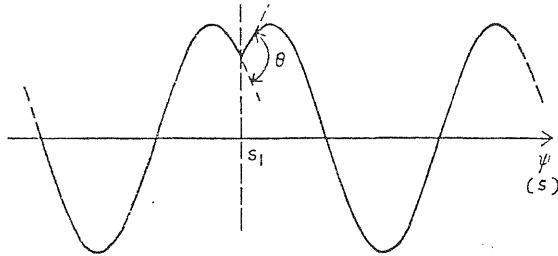


図 2 - 32.

(2.166)を使うと tune shift の測定のとときと同じく、tune の小数部が $\Delta \nu$ か $1 - \Delta \nu$ かを決めることができる。それは、 $0 < \Delta \nu < 0.5$ の場合には s_1 での (またはそのすぐ近くでの) x を測定すると、 x と θ は同符号で図3.32のようになり、 $0.5 < \Delta \nu < 1.0$ のときは、 x と θ が異符号となるからである。ここで重要なことは、 θ の符号つまり steering magnet の極性に自信がないといけない。自信がない場合は、 s_1 の付近の x のふるまいを調べる必要がある。

(2.165) と (2.166) から

$$\nu = n + \Delta \nu \quad 0 < \Delta \nu < 0.5$$

の場合には、 x の振動の回数、つまり山の数 (図2.32で s_1 の付近の2山は1つとする)、または zero crossing の数の半分は n となり、そして s_1 の位置での x は θ と同符号であることがわかる。

また

$$\nu = n + \Delta \nu \quad 0.5 < \Delta \nu < 1$$

の場合には、振動の回数は $n + 1$ となり、 s_1 の位置の x は θ と異符号となることがわかる。たとえば、 $\nu = 3.25$ と $\nu = 3.75$ の場合を図示すると図2.33のようになる。

また (2.165) 特に (2.166) は β の測定にも使える。それは、 θ と ν がわかっているとすると、 s_1 のところでの (またはそのすぐそばの) x を測定すると、

$$\beta(s_1) = \frac{2x(s_1) \tan \pi \nu}{\theta} \quad (2.167)$$

となり β を決めることができる。

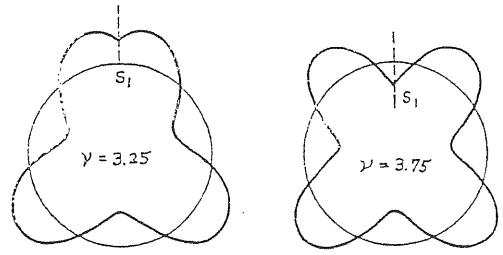


図 2 - 33.

さて、(2.161), (2.162) からわかるように、 β の大きいところでは、位相にもよるが、一般に x が大きいことがわかる。逆に β が小さいところでは x が小さい。このことと、colliding point の両側にある QM の間の位相差がほぼ π であることを考慮すると、colliding point 付近で correction を行なう前の C.O.D. が図2.34のようになり、特に y 方向の C.O.D. が colliding point に一番近い QM の所で最大になるであろうということがわかる。

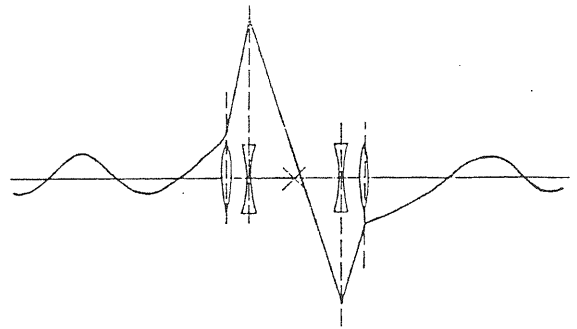


図 2 - 34.

うということがわかる。また y 方向の dispersion についても同様なことがいえる。そして C.O.D. と dispersion を correction しないとすると、ビームの寿命が短くなったり、最悪の場合はビームが全然回らないというようなことにもなりかねない。

次にいろいろな磁場の error や alignment の error があるとき C.O.D. の大きさがどの程度になるか予想する式を導びよう。これら error は前もってわからないのが普通であるので、それを統計的に考えることにし、 $\eta(\phi)$ の振巾の二乗の期待値を計算してみよう (これはちょうど C.O.D. のエミッタンスとでもよべるようなものである)。 $\eta(\phi)$ は、

$$\frac{\nu}{2 \sin \pi \nu} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\xi) \exp(-i\nu \xi) d\xi \cdot$$

$$\exp[i\nu(\pi + \phi)]$$

の実数部であるので、振巾の二乗を $V(\phi)$ とすると

$$V(\phi) = \frac{\nu^2}{4 \sin^2 \pi \nu} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\xi) f(x) \cdot \exp[i\nu(x-\xi)] d\xi dx$$

となる。ここでこの期待値をとる（たくさん同じ加速器をもってきてそれらにいろいろな error があると考へて、期待値を計算する）のであるが、ある場所の error と他の場所の error とに相関がないとすると、 $f(\xi) f(x)$ の期待値は場所がちがうとき

$$\langle f(\xi) f(x) \rangle = 0$$

となる。ここでかぎカッコは期待値を意味する。

これより $V(\phi)$ の期待値は、

$$\begin{aligned} \langle V(\phi) \rangle &= \frac{\nu^2}{4 \sin^2 \pi \nu} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} \langle f(\xi)^2 \Delta \xi \rangle d\xi \\ &= \frac{\nu^2}{4 \sin^2 \pi \nu} \int_0^{2\pi} \langle f(\xi)^2 \Delta \xi \rangle d\xi \end{aligned}$$

となる。ここで $\Delta \xi$ は error のある場所の長さに対応する phase advance である（問 これを示せ）。この長さを ℓ として、積分を和でかくと、

$$\langle V(\phi) \rangle = \frac{1}{4 \sin^2 \pi \nu} \sum_i \beta_i \langle \psi_i^2 \rangle \quad (2.168)$$

となる。ここで ψ_i は

$$\psi_i = \left(\frac{\Delta B \ell}{B \rho} \right)_i$$

である（問 これを示せ）。さて、 $\langle V(\phi) \rangle$ は η の振巾の2乗の期待値であったのでこれを $\hat{\eta}^2$ とおくと、実際の C.O.D. の期待値の振巾 \hat{y} は

$$\hat{y}(s) = \sqrt{\beta(s)} \hat{\eta} = \sqrt{\frac{\beta(s)}{4 \sin^2 \pi \nu} \sum_i \beta_i \psi_i^2} \quad (2.169)$$

と与えられる。

さて、 ψ_i は QM の alignment error Δy (または Δx) の場合

$$\psi_i = K_i \ell_i \Delta y \quad (2.170)$$

である。BM の field error ΔB の場合

$$\psi_i = \left(\frac{\ell}{\rho} \right)_i \left(\frac{\Delta B}{B} \right)_i = \theta_i \left(\frac{\Delta B}{B} \right)_i \quad (2.171)$$

で、 θ_i は BM の曲げ角である。

また BM の rotation error ϕ の場合

$$\psi_i = \left(\frac{B \phi \ell}{B \rho} \right)_i = \theta_i \phi_i \quad (2.172)$$

で与えられる。

example

図 2.25 の cell を 29 個集めてリングを作ったとしよう。そして $\ell = 5 \text{ m}$ とする（問 全周の長さはいくらか）。すると 1 個の BM 曲げ角は 6.21° となる。また、1 個の cell の phase advance を 90° に選ぶと $k\ell = \sqrt{2}$ となり、 k の値は、 $k \approx 0.283/\text{m}$ となる。今 error の rms (標準偏差) を

$$\sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle} = \sqrt{\langle \Delta y^2 \rangle} = 0.1 \text{ mm}$$

$$\sqrt{\langle (\Delta B/B)^2 \rangle} = 0.1 \%$$

$$\sqrt{\langle \phi^2 \rangle} = 0.2 \text{ mrad}$$

としよう。 β の値は

$$\beta_{xF} = \beta_{yD} \approx 17 \text{ m}, \quad \beta_{xD} = \beta_{yF} \approx 3 \text{ m}$$

$$\beta_x = \beta_y = 7.5 \text{ m (at BM)}$$

である。これらを使うと x 方向については

$$\begin{aligned} \langle v(\phi) \rangle_x &\approx \frac{1}{2} \left[29 \times (17+3) \right. \\ &\quad \times (0.283 \times 0.1 \times 10^{-3})^2 \\ &\quad \left. + 58 \times 7.5 \times (0.108 \times 1 \times 10^{-3})^2 \right] \end{aligned}$$

となり、 y 方向については

$$\begin{aligned} \langle v(\phi) \rangle_y &\approx \frac{1}{2} \left[29 \times (17+3) \right. \\ &\quad \times (0.283 \times 0.1 \times 10^{-3})^2 \\ &\quad \left. + 58 \times 7.5 \times (0.108 \times 0.2 \times 10^{-3})^2 \right] \end{aligned}$$

となる（問 これを示せ）。

これより

$$\hat{x}(s) [\text{mm}] \approx 1.67 \sqrt{\beta_x(s) [\text{m}]}$$

$$\hat{y}(s) [\text{mm}] \approx 0.58 \sqrt{\beta_y(s) [\text{m}]}$$

となる。たとえば、Fのところでは $\hat{x}_F \sim 7 \text{ mm}$ 、Dのところでは $\hat{y}_D \sim 2.4 \text{ mm}$ となる。そして \hat{x} (または \hat{y}) は rms であるので、安全をみるために、さらにこれを2.5倍ぐらいすると、実際の C.O.D. はほとんどこの範囲の内に入るであろう。

次に gradient error がある場合について考えてみよう。その前に簡単な例として、tune shift の計算で使った (2.127) をしらべてみよう。(2.127) は

$$\cos \mu = \cos \mu_0 - \frac{k \beta_0}{2} \sin \mu_0 \quad (2.173)$$

であった。さて、ベータトロン振動が安定である条件は

$$|\cos \mu| < 1$$

であるが、 $\cos \mu_0$ が ± 1 に近くなると (2.173) の $|\cos \mu|$ は 1 より大きくなる可能性がある。ここで、 $\cos \mu_0 \approx 1$ のときは、

$$\nu_0 \approx n$$

の場合であり、 $\cos \mu_0 \approx -1$ のときは、

$$\nu_0 \approx n + \frac{1}{2}$$

の場合である。ここで n は整数である。前者の場合、

$$\nu_0 = n + \epsilon$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \cos \mu &= \cos 2\pi\epsilon - \frac{k \beta_0}{2} \sin 2\pi\epsilon \\ &\approx 1 - \frac{(2\pi\epsilon)^2}{2} - \frac{k \beta_0}{2} 2\pi\epsilon \end{aligned}$$

となり、安定であるためには、

$$\epsilon \left(\epsilon + \frac{k \beta_0}{2\pi} \right) > 0 \quad (2.174)$$

が必要であることがわかる。後者の場合も同じ条件になる (問 これを示せ)。これを図示すると、図 2.35 のようになり、斜線部が不安定領域である。ところで

tune shift $\Delta\nu$ は、

$$\Delta\nu = \frac{k \beta_0}{4\pi}$$

であったが、図 2.35 はこの tune shift の半分で ϵ を相殺して不安定になることを示している。これは矛盾

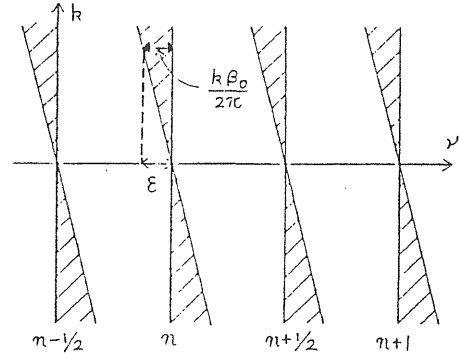


図 2 - 35.

しているように思えるが、実は、上の計算では (2.173) の右辺の第 2 項が 2 次の微小量であり、一方、tune shift の計算のときは 1 次の微小量として、 $\cos \Delta\mu$ を 1 とおいたためである。さて、このように tune ν が

$$2\nu \approx n$$

のとき、ベータトロン振動が不安定になる可能性があるが、この不安定性を half integral resonance (半整数共鳴) といっている。

上の場合には、ある 1ヶ所に収束力を加えた場合であるが、リング内のいろいろな場所に収束力を加えた場合に (または gradient error がある場合に)、tune が半整数 ($2\nu = \text{整数}$) の近くにあるとき (または gradient error のないときの tune がそうであるとき) の安定性はどうなるであろうか。これを調べるために調和振動子の方法を使おう。今 gradient error を ΔK として、収束力が

$$K \rightarrow K + \Delta K$$

となったとしよう。すると (2.155) で $F(s)$ を

$$F(s) = -\Delta K x(s) = -\Delta K \sqrt{\beta} \eta \quad (2.175)$$

とおいて、

$$\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} + \nu^2 \eta = -\nu^2 \Delta K \beta^2 \eta \quad (2.176)$$

なる式を得る。ここで $\nu \Delta K \beta^2$ を

$$\nu \Delta K \beta^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n e^{in\phi} \quad (2.177)$$

とフーリエ展開すると、(2.176) は

$$\eta'' + \nu^2 \left(1 + \frac{1}{2\pi\nu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n e^{in\phi} \right) \eta = 0 \quad (2.178)$$

となる。これは Hill の方程式と呼ばれるものであるが、ここでは以下のように簡略化してこれを解いてみよう。まず (2.178) のカッコの中の第2項は小さいと仮定すると、第0近似では、

$$\eta = A \cos \nu\phi + B \sin \nu\phi \quad (2.179)$$

と考えられる。すると、カッコの中の第2項とこの η をかけて、調和振動子に対する外力とみなすと、

$$\cos(n+\nu)\phi, \quad \cos(n-\nu)\phi$$

のような項がでてくるが、このような項の内、

$$\nu \approx n + \nu, \quad \nu \approx n - \nu$$

を満足する項があると、調和振動子は共鳴を起こす。そのような項は

$$2\nu \approx k \quad (k \text{ は整数})$$

を満足する項である。これを満足するためには ν は半整数に近くなければならないが、いま ν として

$$\nu = p + \epsilon$$

の場合を考え、 $n = 2p$ となる項と、DC成分の項のみを考えると、(2.178) は

$$\eta'' + \nu^2 \left(1 + \frac{1}{2\pi\nu} (J_0 + J_{2p} e^{i2p\phi} + J_{-2p} e^{-i2p\phi}) \right) \eta = 0 \quad (2.180)$$

となる。 $\nu \Delta K \beta^2$ は実数であるので

$$J_{-2p} = J_{2p}^*$$

である (* は複素共役)。(問 これを示せ)。これから (2.180) は

$$\eta'' + \nu^2 \left[1 + \frac{1}{2\pi\nu} (J_0 + 2 |J_{2p}| \cos(2p\phi + \psi_0)) \right] \eta = 0 \quad (2.181)$$

となるが、ここで

$$\frac{|J_{2p}|}{\pi\nu} = J \quad (2.182)$$

とおき、 ϕ の原点をとりなおすと、(2.181) は、

$$\eta'' + \nu^2 \left[1 + \frac{J_0}{2\pi\nu} + J \cos 2p\phi \right] \eta = 0 \quad (2.183)$$

となる。これは Mathieu (マッシュュー) の方程式と呼ばれるものである。

DC成分の効果は後ですぐにくりこむことができるので、この成分がない場合をまず考えてみよう。すると (2.183) は

$$\eta'' + \nu^2 (1 + J \cos 2p\phi) \eta = 0 \quad (2.184)$$

となるが、ここで解として

$$\eta = A(\phi) \cos \omega\phi + B(\phi) \sin \omega\phi \quad (2.185)$$

という形を仮定してみよう。そして、 A, B はゆっくり変化するものとし、 ω は ν に近いが今のところ未知数とする。すると、これを (2.184) に代入すると

$$\begin{aligned} & (2\omega B' - \omega^2 A + \nu^2 A) \cos \omega\phi \\ & + (-2\omega A' - \omega^2 B + \nu^2 B) \sin \omega\phi \\ & + \frac{AJ}{2} \nu^2 [\cos(2p + \omega)\phi + \cos(2p - \omega)\phi] \\ & + \frac{BJ}{2} \nu^2 [\sin(2p + \omega)\phi - \sin(2p - \omega)\phi] = 0 \end{aligned} \quad (2.186)$$

となる。ここで A'', B'' は A, B がゆっくり変化するとしたので省略した。

$\omega \approx \nu \approx p$ であるので、(2.186) より

$$\omega = 2p - \omega$$

である。これより $\omega = p$ として、 $\cos p\phi, \sin p\phi$ の項をとりだすことによって ($\cos 3p\phi$ 等は (2.186) で無視した項と比較する必要がある),

$$2pB' + 2p\epsilon A + \frac{AJ}{2} p^2 \approx 0$$

$$-2pA' + 2p\epsilon B - \frac{BJ}{2} p^2 \approx 0$$

を得る (問 これを示せ)。このAとBの連立方程式の解を

$$A, B \propto e^{\lambda t}$$

のように仮定すると、次の固有値方程式を得る。

$$\begin{vmatrix} \epsilon + \frac{Jp}{4} & \lambda \\ -\lambda & \epsilon - \frac{Jp}{4} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.187)$$

(問 これを示せ)。これから

$$\lambda^2 + \epsilon^2 - \frac{J^2 p^2}{16} = 0$$

となり、 λ は

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{J^2 p^2}{16} - \epsilon^2} \quad (2.188)$$

と求まる。これより、運動が安定であるためには、平方根の中が負である必要があり (問 これを示せ)。

$$|\epsilon| > \frac{Jp}{4} \quad (2.189)$$

となる。さて、D.C. 成分のある場合には、第1近似では ν^2 を

$$\nu'^2 = \nu^2 \left(1 + \frac{J_0}{2\pi\nu} \right)$$

とすることができる (問 これを示せ) ので、

$$\nu' \approx \nu \left(1 + \frac{J_0}{4\pi\nu} \right) \approx p + \epsilon + \frac{J_0}{4\pi}$$

となり、(2.189) で ϵ を $\epsilon + J_0/4\pi$ とすればよいことがわかる。これから、運動の安定な条件として、

$$\left| \epsilon + \frac{J_0}{4\pi} \right| > \frac{|J_{2p}|}{4\pi} \quad (2.190)$$

が得られる。また ν が

$$\nu = p + \frac{1}{2}$$

のときも全く同様にして、

$$\left| \epsilon + \frac{J_0}{4\pi} \right| > \frac{|J_{2p+1}|}{4\pi} \quad (2.191)$$

これより $\nu = p + \epsilon$ の場合の不安定領域の幅 $\delta\nu$ は

$$\delta\nu = \frac{|J_{2p}|}{2\pi} \quad (2.192)$$

であり、 $\nu = p + \frac{1}{2} + \epsilon$ の場合には

$$\delta\nu = \frac{|J_{2p+1}|}{2\pi} \quad (2.193)$$

となる。ところで J_n

$$J_n = \int_0^{2\pi} \nu \Delta K \beta^2 e^{-in\phi} d\phi$$

$$= \int_0^c \Delta K \beta e^{-in\phi(s)} ds \quad (2.194)$$

であるので (問 これを示せ)。

$$J_0 = \int_0^c \Delta K \beta ds \quad (2.195)$$

となり J_{2p} は、

$$J_{2p} = \int_0^c \Delta K \beta e^{-2ip\phi(s)} ds \quad (2.196)$$

となる。つまり $J_0/4\pi$ は tune shift である。いま gradient error ΔK が一ヶ所に局在しているとすると、それが存在する場所の長さ l を使って $k = \Delta K l$ とおくと

$$J_0 = k\beta, \quad |J_{2p}| = |k\beta|$$

となる (問 これを示せ)。同様に、

$$|J_{2p+1}| = |k\beta|$$

である。

これより $\nu = p + \epsilon$ と $\nu = p + \frac{1}{2} + \epsilon$ の両方の場合とも

$$\frac{-k\beta - |k\beta|}{4\pi} < \epsilon < \frac{-k\beta + |k\beta|}{4\pi}$$

のとき運動が不安定になるということがわかる。これは図2.35の場合と全く同じ結果である (問 これを

示せ)。

さて, gradient error の場合も C.O.D. のときと同じように統計的に考えると, tune shift $\Delta\nu$ の期待値は

$$\sqrt{\langle \Delta\nu^2 \rangle} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\sum_i \beta_i^2 (K\ell)_i^2 \langle \left(\frac{\Delta K}{K}\right)^2 \rangle} \quad (2.193)$$

となり, 不安定領域の幅 (stop band という) $\delta\nu$ の期待値は

$$\sqrt{\langle \delta\nu^2 \rangle} = 2\sqrt{\langle \Delta\nu^2 \rangle} \quad (2.194)$$

となる (問 これを示せ)。

example

C.O.D. のときと同じ lattice を考え, $\sqrt{(\Delta K/K)^2} = 0.1\%$ とすると, $K\ell = k$ であるので

$$\sqrt{\langle \Delta\nu^2 \rangle} = 2 \times 10^{-3}, \quad \sqrt{\langle \delta\nu^2 \rangle} = 4 \times 10^{-3}$$

となる (問 これを示せ)。これからこの場合には, tune をかなり半整数に近づけても, ビームが安定であることがわかる。

さて, gradient error があるとき, β も当然ゆがむが, そのゆがみもまた調和振動子的にとり扱うことができることを次に示そう。

(2.69) 式の第一式は

$$\omega'' + K\omega - \frac{1}{\omega^3} = 0 \quad (2.195)$$

であるが, gradient error のない場合の式を

$$\omega_0'' + K\omega_0 - \frac{1}{\omega_0^3} = 0 \quad (2.196)$$

とし, gradient error がある場合の式を

$$\omega'' + (K+k)\omega - \frac{1}{\omega^3} = 0 \quad (2.197)$$

としよう (ここで簡単のため ΔK を k とおいた)。そして $\omega = \omega_0 + \omega_1$ とおき, ω_1 は ω_0 に比較して小さいと考えて, ω_1 の高次項を無視すると (また $k\omega_1$ は 2 次の項と考える), (2.197) は

$$\omega_0'' + \omega_1'' + K\omega_0 + K\omega_1 + k\omega_0 - \frac{1}{\omega_0^3} + \frac{3}{\omega_0^3} \frac{\omega_1}{\omega_0} = 0$$

となり (2.196) を使うと,

$$\omega_1'' + K\omega_1 + k\omega_0 + \frac{3\omega_1}{\omega_0^4} = 0 \quad (2.198)$$

となる。また (2.196) より,

$$K = \frac{1}{\omega_0^4} - \frac{\omega_0''}{\omega_0}$$

であるので (2.198) は,

$$\omega_1'' - \frac{\omega_0''}{\omega_0} \omega_1 + \frac{4\omega_1}{\omega_0^4} + k\omega_0 = 0 \quad (2.199)$$

となる (問 これを示せ)。左辺の第 1, 2 項は,

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0 \omega_1'' - \omega_0'' \omega_1}{\omega_0} &= \frac{1}{\omega_0} (\omega_0 \omega_1' - \omega_0' \omega_1)' \\ &= \frac{1}{\omega_0} \left[\omega_0^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)' \right]' \end{aligned}$$

と変形できるので (2.199) は,

$$\left(\omega_0^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)' \right)' + \frac{4\omega_1}{\omega_0^3} + k\omega_0^2 = 0 \quad (2.200)$$

となる。さて $\omega = \sqrt{\beta}$ であるので

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta\beta}{\beta}$$

となる。また独立変数を s から ϕ にかえると, (2.200)

は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu\beta} \frac{d}{d\phi} \left[\frac{\beta}{\nu\beta} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta\beta}{\beta} \right) \right] \\ + \frac{4}{\beta} \frac{1}{2} \frac{\Delta\beta}{\beta} + k\beta^2 = 0 \quad (2.201) \end{aligned}$$

となり, 整理すると,

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{\Delta\beta}{\beta} \right) + 4\nu^2 \left(\frac{\Delta\beta}{\beta} \right) = -2\nu^2 k\beta^2 \quad (2.202)$$

になる。これは調和振動子の式と同じであり, 右辺は調和振動子に働く外力と考えることができる。 β は全周について周期的であるので, 当然 $\Delta\beta/\beta$ も周期的である。よって $\Delta\beta/\beta$ の解として, (2.202) の解のうち周期解をとる必要がある。この周期解は Appendix A より, ただちに

$$\Delta\beta/\beta = \frac{-\nu}{2s_1} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} k\beta^2 \cos 2\nu(\pi + \phi - x) dx$$

(2.203)

と求まる。またフーリエ展開の形の解は、

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = -\frac{\nu}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n e^{in\phi}}{4\nu^2 - n^2}$$

(2.204)

で与えられる。ここで J_n は、(2.177) の J_n と同じものである。これより $\Delta\beta/\beta$ を主に決めているフーリエ成分は $2\nu \approx$ 整数となる成分である。

つまり $2\nu \approx p$ のとき

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} \approx -\frac{|J_p| \cos(p\phi + x_0)}{4\pi(\nu - p/2)} \quad (2.205)$$

となり、 β のゆがみの最大値は

$$(\Delta\beta/\beta)_{\max} \approx \frac{|J_p|}{4\pi(\nu - p/2)}$$

(2.206)

となる。(2.203)、また(2.206)に対しても C.O.D. や stop band のときと同様に統計的期待値が計算できるが、ここでは省略する。

さて次に momentum compaction factor α を調和振動子的方法で計算してみよう。この計算から重要な関係式がでてくる。この α を計算するには、(2.155) で $F(s)$ を

$$F(s) = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p}$$

として、周期解を求めればよい。これはフーリエ展開した形では、

$$\eta = \frac{\Delta p}{p} \nu^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n e^{in\phi}}{\nu^2 - n^2} \quad (2.207)$$

と求まる。ただし、ここで η は dispersion 関数の η ではない。また f_n は

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\beta^{3/2}}{\rho} e^{-in\phi} d\phi \quad (2.208)$$

である。これから $\Delta p/p$ をもつ粒子の閉軌道 x_ϵ は

$$x_\epsilon = \frac{\Delta p}{p} \sqrt{\beta(s)} \nu^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n e^{in\phi}}{\nu^2 - n^2} \quad (2.209)$$

となる。これより閉軌道の長さの差 ($\Delta p = 0$ の閉軌道との差) ΔC は

$$\begin{aligned} \Delta C &= \int_0^C \frac{x_\epsilon}{\rho} ds = \int_0^C \frac{x_\epsilon \nu \beta}{\rho} d\phi \\ &= \frac{\Delta p}{p} \nu^3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n}{\nu^2 - n^2} \int_0^C \frac{\beta^{3/2}}{\rho} e^{+in\phi} d\phi \end{aligned} \quad (2.210)$$

となり、(2.208) を使うと、

$$\Delta C = \frac{\Delta p}{p} 2\pi \nu^3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|f_n|^2}{\nu^2 - n^2} \quad (2.211)$$

となる(問 これを示せ)。これから、momentum compaction factor α は、

$$\alpha = \frac{\nu^3}{R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|f_n|^2}{\nu^2 - n^2} \quad (2.212)$$

と与えられることがわかる(問 これを示せ)。さて加速器では、特にシクロトロンではリングの大部分を BM がしめている。このことから、(2.208) で、 $n=0$ の f_n 、つまりフーリエ成分の DC 成分が大きいたことがわかる。また通常は tune を整数の近くには選ばないので(2.212)より、 α は

$$\alpha \approx \frac{\nu}{R} f_0^2$$

と近似できることがわかる。 f_0 は、

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\beta^{3/2}}{\rho} d\phi = \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^C \frac{\beta^{1/2}}{\rho} ds \\ &\approx \frac{2\pi}{2\pi\nu} \overline{\beta^{1/2}} \text{ (BM中)} \approx \frac{1}{\nu} \left(\frac{R}{\nu}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

となるので

$$\alpha \approx \frac{1}{\nu_x^2} \quad (2.213)$$

という重要な関係式がでてくる。また dispersion 関数 η は、

$$\eta \approx \beta^{1/2} f_0 \approx \beta^{1/2} \left(\frac{R}{\nu^3}\right)^{1/2} \quad (2.214)$$

となる。さらに $\beta^{1/2} \approx R/\nu$ と近似すると

$$\eta \approx R/\nu_x^2 \approx \alpha R \quad (2.215)$$

となる。簡単であるがこれも重要な関係式である。まずこの dispersion 関数と (2.126) の η とがほぼ一致することをみてみよう。(2.126) の η は、

$$\eta \sim 2 \ell \theta \sim \frac{2 \ell^2}{\rho} \sim \frac{2 \ell^2}{R}$$

であった。またセルの数を N とすると、

$$2 \ell N = 2 \pi R, \quad \frac{N}{4} = \nu$$

であり、

$$\ell = \frac{\pi R}{4 \nu}$$

となる。これより

$$\eta \sim 2 \cdot \frac{\pi^2}{16} \frac{R^2}{\nu^2 R} = \frac{\pi^2}{8} \frac{R}{\nu^2} \sim \frac{R}{\nu^2}$$

となり、一致する。では β は、

$$\beta \sim R/\nu$$

となるであろうか。

$$R/\nu = R / \left(\frac{\pi R}{4 \ell} \right) = \frac{4}{\pi} \ell \sim \ell$$

となり、factor 2 合わない。これは (2.126) の β は

$$\beta \sim \bar{\beta} \approx \frac{\beta_F + \beta_D}{2}$$

としたためであり、

$$\left(\frac{1}{\beta} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta_F} + \frac{1}{\beta_D} \right)$$

とすると

$$\left(\frac{1}{\beta} \right) = \frac{1}{\ell}$$

となり一致する。このように $\beta \approx R/\nu$ の式は β の逆数の平均からでてきたものであり、また β は場所場所でかなり変動 (普通のノーマルセルでも $\beta_{\max} / \beta_{\min}$ が数倍ぐらいにはなる) することに注意する必要があるが、およその見当をつけるには非常に便利である。さて dispersion 関数は $\sqrt{\beta}$ という形で β 関数が入っているので β の変動の影響は比較的少ない。そして α はその平均のようなものであるので (2.213) の精度はかなりよい。ただし、衝突型リングでは長い

直線部があり、シンクロトロンのように、ほとんど BM でしめられているというわけではないので α の近似式を次のようにしたほうが精度があがる。まず直線部を除いて考えると、

$$\eta \approx R' / \nu_x'^2$$

となる。ここで R' は BM のある曲線部の平均半径であり、 ν_x' はその部分の tune である。これを使うと、

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2 \pi R} \int_0^{2 \pi} \frac{\eta}{\rho} ds \approx \frac{1}{2 \pi R} 2 \pi \frac{R'}{\nu_x'^2} \\ &= \frac{R'}{R} \frac{1}{\nu_x'^2} \end{aligned}$$

(2.216)

となり、さらに

$$R'/R \approx \nu_x' / \nu_x$$

と近似すると、

$$\alpha \sim \frac{1}{\nu_x \nu_x'} \quad (2.217)$$

となる。トリスタン MR の場合 $\nu_x = 32.75$, $\nu_x' = 24$ であるので、

$$\alpha \sim 1.3 \times 10^{-3}$$

となり、正確な値、

$$\alpha = 1.5 \times 10^{-3}$$

にかなり近い。

2.9 でエミッタンスからくるビームサイズを使って weak focusing の加速器と strong focusing の加速器の比較を行なったが、ここで上の η の表式を使って、もう一度比較を行なってみよう。

ビームサイズ σ はエミッタンスからくるビームサイズ σ_β と運動量の拡がりからくるビームサイズ σ_ϵ とで (2.97) または (2.98) のように表わされる。ここで、

$$\sigma_\beta = \sqrt{\epsilon \beta} \sim \sqrt{\epsilon R/\nu}$$

であり、

$$\sigma_\epsilon = \frac{4p}{p} \eta \sim \frac{4p R}{p \nu^2}$$

であるので、運動量の拡がりがある程度あると、strong focusing の加速器の方が weak focusing の加速器よりずっとビームサイズが小さい、ということがわかる。たとえば、PS主リングの場合

$$\epsilon_x \sim 40 \text{ mm mrad}, \quad \Delta p/p \sim \pm 0.3\%$$

であり、 $\nu_x \sim 7$ とすると

$$\sigma_\beta \sim 17.6 \text{ mm}, \quad \sigma_\epsilon \sim 3.3 \text{ mm}$$

となる。ところがこれを weak focusing の加速器に適用すると、 $\nu_x \sim 0.7$ として、

$$\sigma_\beta \sim 55.5 \text{ mm}, \quad \sigma_\epsilon \sim 331 \text{ mm}$$

となり、この場合には、BMの磁極の横幅が1 mぐらい必要であることがわかる。このように weak focusing の加速器では運動量の拡がりによるビームサイズがかなり大きなものになるが、一方 strong focusing の加速器では運動量の拡がりに対するアクセプタンスがかなり広いということがわかる。

最後に、上で α と η の近似式をちょっと長い計算で求めたが、これは、ベータatron振動の近似式(2.19)を使うとすぐにできるということを示そう(忘れた時に α 、 η の近似式が暗算で求まる。(2.19)式は忘れても、これは一周についての振動数が ν であることからすぐにできる)。運動量にずれのある場合(2.19)式は、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \left(\frac{\nu}{R}\right)^2 x = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p} \approx \frac{1}{R} \frac{\Delta p}{p}$$

となる(右辺を忘れたときは、左辺の次元が[1/長さ]であることを使うと思い出す)。これよりただちに平衡軌道は、 $x = \text{const.}$ として、

$$x = \frac{R}{\nu^2} \frac{\Delta p}{p}$$

と求まり、これから η は

$$\eta = R/\nu^2$$

となり、また α は

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2\pi R} \int \frac{\eta}{\rho} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi R} \frac{R}{\nu^2} 2\pi = 1/\nu^2 \end{aligned}$$

と求まる(問 上で $x = \text{const.}$ としたが、なぜそれでよいか)。

2.16 共鳴 (resonance) と tune の図 (tune diagram)

この項では前項でもでてきた共鳴 (resonance) と tune diagram とよばれるものについて非常に簡単ではあるが説明する。

ここでもう一度 integral resonance (整数共鳴) と half integral resonance (半整数共鳴) を思い出してみよう。integral resonance とは調和振動子の振動数とはほぼ等しい振動数をもつ外力が加えられたときに起こる共鳴現象と同じものであり、half integral resonance とは調和振動子のバネの力に、振動子のほぼ2倍の振動数で変わる項がつけ加わったときに起こる共鳴現象(いわゆるパラメトリック共鳴)と同じであった。これらを直観的にみると図 2.36 と図 2.37 のようになる。

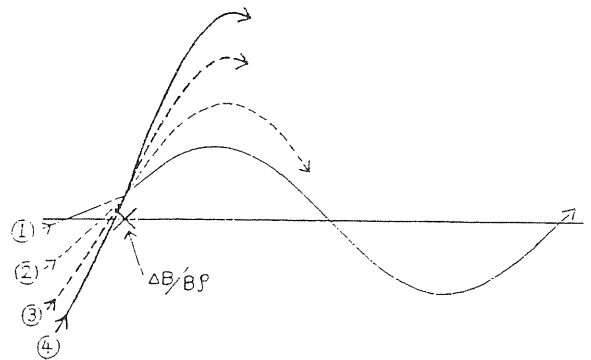


図 2 - 36.

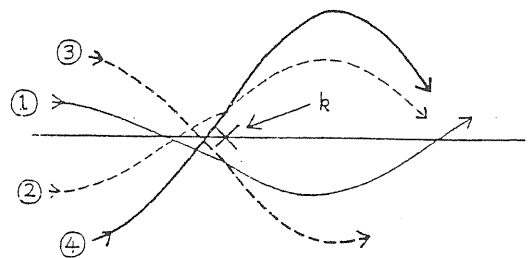


図 2 - 37.

ここで図 2.36 は integral resonance の場合で、図 2.37 は half integral resonance の場合である。

図 2.36 の場合、tune が整数またはほぼ整数に近いので、①の状態にあった粒子は余分な磁場でけとばされ、振幅が大きくなったのちリングを一周してくると②のような状態になっている。そこで①のときと同じ方向にまたけとばされ、さらに振幅が大きくなるというよ

うに次々と振幅が大きくなっていく。これは、ちょうど調和振動子の場合に、外力の周波数が振動子のそれと完全に一致しているとき、その振幅 x が

$$x \propto t \sin \omega t$$

のように増大するのと同じである（問 これを示せ）。（問 図 2.37は×印に余分な収束力が加えられた場合であるが、図 2.36と同じような定性的議論をして half integral resonance を説明せよ）

ここで、図 2.36は粒子の時間的変化を示すものであるが、前項の C. O. D. の計算は十分時間がたったのちの粒子の運動の平衡状態（または定常状態といってもよいかもしれない）を示すものであったということを指摘しておこう。

さて、integral resonance は tune が、

$$\nu_{x,y} \approx n \quad (n: \text{整数})$$

のときに起こり、half integral resonance は

$$2\nu_{x,y} \approx n$$

のときに起こるのであった。この講義では詳しくのべないが、このほかにも、いろいろな resonance がある。たとえば、 x 方向の運動と y 方向の運動が結合して起こす、共鳴に difference resonance（差共鳴）と sum resonance（和共鳴）といわれるものがあり、difference resonance は、tune が、

$$\nu_x - \nu_y \approx n$$

のときに起こり、sum resonance は、

$$\nu_x + \nu_y \approx n$$

のときに起こる。これは収束力を作っている quadrupole magnet が、中心軸に対してある角度回転しているときに（たとえばすえ付け誤差のために）、 x 方向の振幅をもつ粒子が y 方向にすこしけとばされる（問 これを示せ）ということによって引き起こされる。difference resonance のときは、エミッタンス ϵ_x, ϵ_y が、

$$\epsilon_x + \epsilon_y = C = \text{const.}$$

という関係にあり、sum resonance のときは、

$$\epsilon_x - \epsilon_y = C = \text{const.}$$

という関係にある。 $\epsilon_x, \epsilon_y > 0$ であるので、difference resonance のときは、どちらのエミッタンスも

$$\epsilon_x, \epsilon_y < C$$

となり、エミッタンスに上限があるが、sum resonance のときは、上限がない（問 これを示せ）このことから、sum resonance のときは、両方のエミッタンスがどんどん大きくなる可能性があることがわかる。実際にそのようなことが起こり、ビームサイズがどんどん増大してビームが失なわれる。そのため sum resonance は危険な resonance である。一方、difference resonance にはそのようなことはなく、ビームの断面が丸くなるだけである。ただし、 ϵ_y が小さいとして、リングのたて方向の aperture をせまくして加速器を作った場合には、difference resonance が起こると、 x 方向のエミッタンスが ϵ_y に移ってくるので、危険である。しかし、そうでない場合には、difference resonance を両方向のエミッタンス ϵ_x, ϵ_y の配分を変えるということに利用することができる。このためにリングに回転した quadrupole magnet（skew quadrupole magnet, rotated quadrupole magnet）を設置して、エミッタンスの配分を変化させることを行うことがある。

このエミッタンスの比

$$\kappa = \epsilon_y / \epsilon_x$$

を結合定数（coupling constant）といっている。また difference resonance と sum resonance を coupling resonance ということもある。

さてこの他に、収束力が非線型だと起ってくる resonance があり、これは tune が一般に、

$$k\nu_x + l\nu_y \approx n \quad (2.218)$$

の関係にあるときに起こる。たとえば、chromaticity を補正するために六極電磁石を励磁すると（または電磁石の誤差による六極成分がリング内にあると）、

$$3\nu_x \approx n$$

$$\nu_x \pm 2\nu_y \approx n$$

という共鳴が起こることがある。そしてこれらの共鳴を third resonance（ $|k| + |l| = 3$ ）という。また (2.218) で k と l が同符号のときを sum resonance といい、異符号のときを difference resonance といふ。一般的には、(2.218) で $|k|$ や $|l|$ が小さな値のときの共鳴が危険である。さらに、あとの項でのべるシンクロトロン振動がある場合には、その振動数（synchrotron tune） ν_s とすると、

$$k\nu_x + l\nu_y + m\nu_s \approx n$$

の関係があるときにも共鳴が起こる可能性がある。

さて、実際のリングでこれらの共鳴がどのようになっているのか、共鳴があるとすれば、その共鳴の幅 (stop band) はどのくらいかということ調べることは、リングの運転上好ましい tune を選ぶために重要なことであり、これを調べることを tune survey といっている。またリングの運転に使われる tune の組 (ν_x, ν_y) のことを operating point といふ。また ν_x と ν_y を座標軸とする図の上にいろいろな共鳴を起こす線 (resonance line) を描いたりしたものを tune の図 (tune diagram) といふ。その例を図 2.38 に示す。

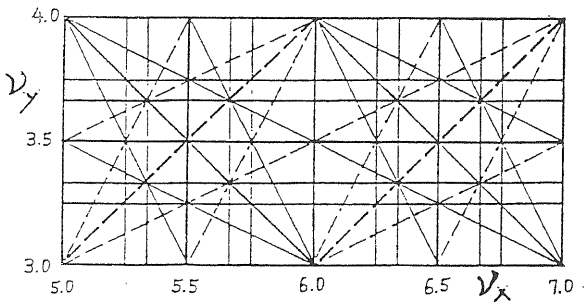


図 2 - 38.

2.17 計算機による lattice の計算

加速器の電磁石の配列 (lattice) を決めるためには、ある配列について β や η を計算し、さらにその他のいろいろな量を求め、他の配列のそれらと比較検討を行う必要がある。しかしながら一つの簡単な配列でも手計算ではかなりの労力であり、昔ならいざ知らず、現代では人間が計算するという代物ではなく、通常計算機を用いて行なわれる。そして計算機を使うことによって、昔では不可能であった複雑な lattice の設計や、さらにはその最適化も行なうことができる。ここでは計算機でどのように β や η を計算しているかを概観してみよう。

まず初めに、ある lattice がここにあるとする。

- (1) 各電磁石および drift space のそれぞれのマトリックス (transfer matrix) をまず作る。リングのある場所 ($s = s_0$) を基準にとって、各マトリックスを全周にわたってかけ合せ、一周についてのマトリックス M を作る。

そして、

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし、

$$\cos \mu = (a_{11} + a_{22}) / 2$$

を計算する。もし $|\cos \mu| > 1$ ならベータatron 振動は不安定となる。 $|\cos \mu| < 1$ のときは (つまり安定のときは)

$$\beta(s_0) = a_{12} / \sin \mu$$

より、 β が正であるように、 $\sin \mu$ の符号をとる。つまり $a_{12} > 0$ なら $\sin \mu = \sqrt{1 - \cos^2 \mu}$ で、 $a_{12} < 0$ なら $\sin \mu = -\sqrt{1 - \cos^2 \mu}$ とする。

次に、

$$\alpha(s_0) = (a_{11} - a_{22}) / 2 \sin \mu$$

から α を求める。

以上より、 $s = s_0$ での $\beta, \alpha, \gamma (= (1 + \alpha^2) / \beta)$ が求まった。 μ は不定性があるので、これからは tune を計算しない。

また dispersion 関数は

$$\begin{pmatrix} \eta(s_0) \\ \eta'(s_0) \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1 - \cos \mu)} \begin{pmatrix} a_{13} + a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \\ a_{23} + a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23} \end{pmatrix}$$

より計算できる。

- (2) 次に、ある電磁石または drift space のマトリックスを、

$$M' = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{21}m_{11} & 1 + 2m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{22}m_{21} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_1$$

を使って、各電磁石、drift space の入口と出口の Twiss parameters を計算する。また各マトリックスあたりの phase advance $\Delta\psi$ は

$$\tan \Delta\psi = m_{12} / (m_{11}\beta_1 - m_{12}\alpha_1)$$

より、 $\Delta\psi > 0$ であるように求める。(ただし、 $\pi > \Delta\psi > 0$ であるとする。つまり、各マトリックスの phase advance がそれ以上になると不定性がでてくるが、通常はそのようなことはほとんどない。心配のあるときは各マトリックスを分割すればよい。)

また dispersion 関数は

$$\begin{pmatrix} \eta_2 \\ \eta_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_1' \\ 1 \end{pmatrix}$$

より計算される。

以上を一周にわたって計算すれば、各場所 (電磁石の入口と出口等) の β, α, γ および一周について

の phase advance

$$\psi = 2\pi\nu = \sum \Delta\psi$$

が求まる。

(3) (1)と(2)はある lattice が与えられたとして, Twiss parameters を計算したが, 実際は, これを希望の値にしたいわけで, それはたとえばQMの収束力を変化させることによって行なうことができる。いまある場所 (またはいくつかの場所) での希望する値を $\tilde{\beta}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\mu}$ とし, (1), (2) で計算した値を β , α , μ とすると, たとえば,

$$s = (\tilde{\beta} - \beta)^2 + (\tilde{\alpha} - \alpha)^2 + (\tilde{\mu} - \mu)^2$$

を最小にするように, QMの収束力を変数として最適化を行えばよい。

さて上では各段階の計算は一周について行なうとしたが, lattice がある周期をもつ場合には, 実際は一つの周期についてのみ上の計算を行なえばよい。また一つの周期が normal cell と insertion からできている場合には, normal cell についての計算と insertion についての計算に分けて行なうこともできる。この場合 normal cell と insertion とのマッチングを行なう必要がある。さらにこの場合 insertion のみでは周期的でないので, insertion の β や η を計算するのに(1)の計算を用いることはできない。そのため(2), (3)の計算への入力として, insertion の端の β , η を適当に仮定 (または normal cell の端の β , η を使う) してやる必要がある。

以上, 計算機を使って計算する方法について簡単にのべたが, このような計算を行なうプログラムはいろいろと開発されている。その代表的なものとして, MAGIC, SYNCH 等のプログラムがある。このようなプログラムは, その他のいろいろなパラメータ (たとえば chromaticity) も同時に計算することができる。

計算機は今では lattice の設計になくてはならないものになっているが, そのほか C. O. D. correction 等, 実際の加速器の運転にも必要不可欠のものとなっている。

またいろいろな計算機シュミレーションによって, 加速器が建設される前に, 前もっていろいろな予想を行なうことができる。建設後も, 実際の加速器では行なうことが不可能なこと, たとえば, 全く磁場の error がなかったらどうなるか, またシンクロトロン放射がなかったらどうなるかというようなことをシュミレーションすることによって現実のいろいろな現象を把握するのを容易にすることが可能であり, さらに実際には見ることが困難なもの (たとえば大振巾のベータ

トロン振動をしている粒子のふるまい) も, たぶんこうなっていると予測することができる。そしてもし予測がはずれたとしても, なぜはずれたのかということを考えるきっかけとなり, 全く予測のない場合に比較して, 格段の差がある。

2.18 位相安定性 (phase stability) の原理

これまでは横方向の振動に対する安定性やそれに関することがらについてのべてきたが, ここではたて方向 (粒子の進行方向) の運動について考えることにしよう。最初に位相安定性の原理とは何であるのかということ を説明する。

ここで位相とは加速電場 (または加速電圧) の位相を意味し, 位相安定性とは, この加速電圧の位相に対してビーム中の粒子が, 常に同期または同期に近い状態にあり, 平均してみると全粒子が一様に加速され, 決していろいろな粒子からみて位相がどんどん進んだり, 遅れたりして, それら粒子の受ける加速電圧がばらばらになつたりしないことつまりビームの中の粒子のエネルギーがばらばらになつたりしないことを意味している。

円形加速器の位相安定性を調べる前に, まず陽子線形加速器の場合を考えてみよう。この場合には陽子を図 2.39 のように, 高周波の電場の位相と常に同期するように加速する (またはしたい)。

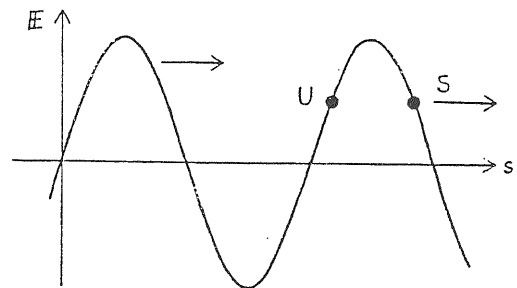


図 2 - 39

図の S (または U) のように常に電場の位相と同期している粒子のことを synchronous particle という。図 2.39 をこの synchronous particle とともに動く座標でみると, 図 2.40 のようになる。

ここで横軸は負の方向が粒子の進行であり, またこの図では synchronous particle (図の S) とともに動く座標であるので電場は動かない。さらに, ある場所で見ていると, S の前に走っている粒子 (たとえば図の B のところにいる粒子) は時間的には S より早く到達した粒子であり, S の後から走っている粒

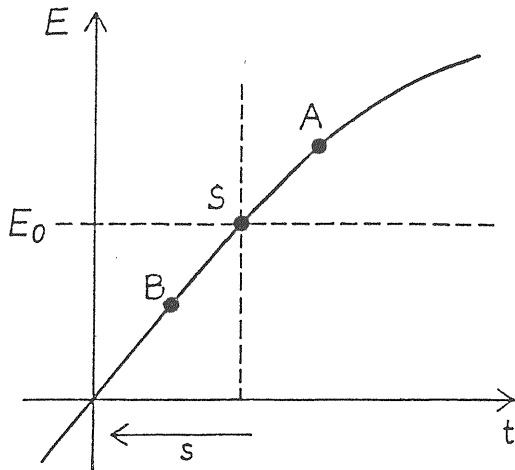


図 2 - 40.

子 (図の A にいる粒子) は S より時間的には遅れて到達する粒子であるので横軸の正の方向は時間遅れを表わしているとみることが出来る。さて図で A のところにいる粒子の運動を考えてみよう。この粒子は S より強く加速されるので速度が増す①。すると、S に追いつこうとする (または時間遅れをとりもどそうとする)。ところが S に追いついたとき②、この粒子の速度は S より大であるので (大でないと追いつかない), 図の B の方向に向う (つまり時間的に S より早くなる) すると電場が S より弱いので速度はそのうちに S と同じになる③。しかしまだ依然として電場は弱いので速度は S よりさらに落ちる。すると S に追いつかれようとする。つまり S の方向に向う。ところが S のところに来たとき④、速度は S よりおそくなっているから A の方向に向う (問 最初に B の所にいた粒子の運動についてのべよ)。速度が大とは運動量が大を意味するので、以上を図示すると、図 2.41 のようになる。

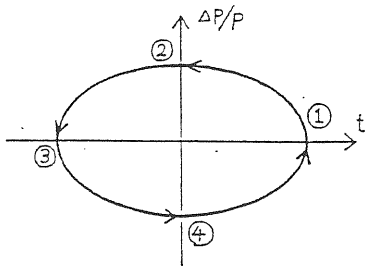


図 2 - 41.

ここで横軸は t である。逆に synchronous particle が図 2.37 の U の位置にいたときそのまわりにいる粒子の運動は不安定になる (問 これを示せ)。

次に円形加速器の場合について考えるが、その前に電子線形加速器の phase stability についてちょっとのべる。電子は加速されると陽子の場合に較べて、た

ちまち光速に近くなる (問 それはなぜか)。ほとんど光速で走る電子はその後いくら加速して、エネルギーが変化しても速度は変わらない。つまり陽子の場合のような位相安定性はない。しかし、光速で走っているので、ビーム内の電子のたて方向の互いの位置関係は変化しない。そのため、この意味では電子ビームは非常に安定であるといえる。しかし、位置関係が変化しないということは電子の受ける加速電圧がビーム中での電子がしめる (固定の) 位置によって異なることになり、エネルギーのずれに対する安定性が全くない。

さて (強収れんの) 円形加速器の場合であるが、まず加速される荷電粒子の速度が小さい場合の phase stability は陽子線形加速器の場合と全く同じである。これを図で示すと、図 2.42 のようになる。

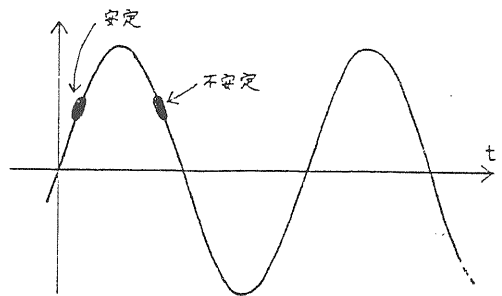


図 2 - 42.

図の横軸は、リング内の加速空洞に粒子が到達したときの時間を表わし、たて軸はその時に粒子の受ける加速電圧である。粒子の速度が小さい、つまり非対論的な場合、エネルギーが大なら、速度も大で、時間おくれをとりもどそうとするということから、図で安定と示したビームは安定であるということがわかる (問 陽子線形加速器の場合と同じ議論を行え)。

では、リング内を回っている粒子の速度が光速に近づいたらどうなるであろうか。この場合、加速しても粒子の速度は変化しないので、電子線形加速器と同じようになると思われるが、円形加速器の場合、エネルギーが大の粒子ほど中心軌道の外側を回る傾向にあるので、速度は等しくとも粒子のエネルギーが大きいとリングを一周する時間がエネルギーの小さい粒子より多くかかる。これを式で表わすものは、すなわち、momentum compaction factor (の定義) であり、

$$\Delta C/C = \alpha \Delta p/p \approx \alpha \frac{\Delta E}{E} \quad (r \gg 1)$$

(通常 α は正である)

エネルギーが大だとリング一周の道のりが長いことになる。つまり加速空洞のところをみていると、エネルギーが大きい粒子の「速度」がエネルギーが小さい粒子の「速度」より小さくみえる。つまりこの場合の

位相安定・不安定性は図 2.42と逆になり，図 2.43のようになる。

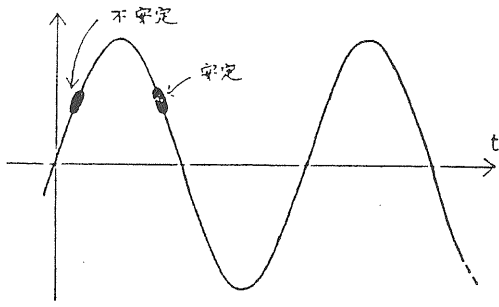


図 2 - 43.

もちろんビームの速度が小さい場合にも，粒子のエネルギーが大きいと中心軌道の外側を回ることになるか，それによる時間のおくれより速度が大の効果の方が大きいので，エネルギーが大だと，一周回わる時間が短いことになる。つまり，非相対論的な場合には，急がば回われの原則が成り立つが，相対論的な場合には，速度は皆同じなので，急がば回わるな，最短距離を行けということである。

以上，かなり定性的に非相対論的，相対論的という言葉を使って説明したが，次に定量的にこのことをみてみよう。

t を粒子がリングを一周するのにかかる時間とすると，

$$t = C/v \quad (2.219)$$

となるが，これよりただちに

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta C}{C} - \frac{\Delta v}{v} \quad (2.220)$$

という関係式がでてくる（問 これを示せ）。

さて，

$$1/r^2 = 1 - \beta^2$$

より，

$$\frac{\Delta r}{r^3} = \beta \Delta \beta = \beta^2 \frac{\Delta \beta}{\beta} \quad (2.221)$$

となるが（問 これを示せ），これはまた，

$$\frac{\Delta r}{r} = (r^2 - 1) \frac{\Delta \beta}{\beta} \quad (2.222)$$

ともかける（問 これを示せ）。また，

$$p = \frac{E}{c^2} v$$

より，

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta E}{E} + \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta \beta}{\beta}$$

であるので，(2.222)より

$$\frac{\Delta p}{p} = r^2 \frac{\Delta \beta}{\beta}$$

となる。

これを使うと，(2.220)より，

$$\frac{\Delta t}{t} = \left(\alpha - \frac{1}{r^2} \right) \frac{\Delta p}{p} \quad (2.223)$$

となる。今 $\alpha < 1$ とすると，ビームの速度が小さい場合，つまり， $r \approx 1$ の場合，

$$\frac{\Delta t}{t} \approx - \frac{\Delta p}{p}$$

となって， $\Delta p > 0$ の場合つまりエネルギーが大の場合， Δt は負になり，リングを一周する時間が短くなる。逆にビームの速度が大の場合， $r \gg 1$ であるので，

$$\frac{\Delta t}{t} \approx \alpha \frac{\Delta p}{p}$$

となって，前に定性的にのべた結果と一致する。

しかし，前にのべた結果と一致するためには， $\alpha < 1$ の条件が必要である（問 これを示せ）。今リング全周にわたって磁場が一樣であると仮定すると， $\alpha = 1$ であり， r は常に $r > 1$ であるから，このような場合はどんなに速度が小さくても，前に相対論的といった場合に相当する。さらに磁場が外に行くほど弱くなっている場合（weak focusingの加速器等）にも，ビームのエネルギーの大小にかかわらずそうである（問 これを示せ）。しかしながら，strong focusingの加速器の場合， $\alpha < 1$ であるので，入射のエネルギーが低い場合，ビームを加速していくうちに，位相の安定・不安定性が図 2.42から図 2.43に変化する。この境目のエネルギーは(2.223)から

$$r_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (2.224)$$

となる。このエネルギーを transition energy といい，ビームの加速エネルギーがこの値になったとき，加速空洞の高周波の位相を，ビームが図 2.42の安定の場所から図 2.43の安定な場所にくるように変化させる（phase jump）必要がある。さて，この r_t は，

$$r_t \approx \nu_x$$

と近似できる（問 これを示せ）。これをつかうと PSの主リングの $\nu_x \sim 7$ であるので， $r_t \sim 7$ となり，このときの陽子の運動エネルギー T はおよそ，

$$T = (r_t - 1) m_p c^2 \approx 5.6 \text{ GeV}$$

となる。（問 $\nu_x = 6.2$ の場合の陽子の transition energy とそのときの運動エネルギーを求めよ）。

2.19 位相振動 (phase oscillation)

前項でのべたように、位相安定性がある場合には、加速高周波と同期していない粒子はある基準 (synchronous particle の位相) の回りで振動するというを示したが、この振動を位相振動 (phase oscillation)、またはシンクロトロン振動 (synchrotron oscillation) という。この項ではこれをもうすこし定量的に考えてみよう。

synchronous particle は加速高周波と同期しているのであるから、加速高周波の周波数 ω_{rf} と synchronous particle の revolution frequency ω_0 との間に、

$$\omega_{rf} = h \omega_0$$

の関係がある。ここで h は harmonic number とよばれるもので、整数である。またこの particle が受ける加速電圧 (加速エネルギー) を

$$eV_0 = e\hat{V} \sin \phi_0 \quad (2.225)$$

とおこう。ここで \hat{V} は加速電圧の peak の値であり、 ϕ_0 はその位相である。そして同期してない粒子の受ける加速電圧を

$$eV = e\hat{V} \sin \phi \quad (2.226)$$

とおく。また、

$$\phi_0 = \omega_{rf} \tau_0, \quad \phi = \omega_{rf} \tau$$

とおこう。ここで τ は時間の符号を逆にしたものとす。つまり、 $\tau > \tau_0$ ならこの粒子は synchronous particle より早く加速空胴に到達したものとし、 $\tau < \tau_0$ なら、遅く到達したものとする。(シンクロトロン振動を表示するのにいろいろな表示法が使われるので、特に符号がちがったりするので注意が必要である)

以下では初めに取り扱いの簡単な電子ストレージリングについて、そして次に陽子シンクロトロンについてのべる。

電子ストレージリングでは電子は光速で走っていると考えてよいので、

$$p = E / c$$

とすることができる。(問 これを示せ)。これから

$$\frac{dp}{p} = \frac{dE}{E} \quad (2.227)$$

となる。また (2.223) で $r \gg 1$ であるので (または電子が光速で走っているとすると)、

$$\frac{dt}{t} = \alpha \frac{dp}{p} = \alpha \frac{dE}{E} \quad (2.228)$$

となる。 dt は時間おくれであったので、

$$dt = -(\tau - \tau_0) = -d\tau$$

となり、(2.228) は、

$$\frac{d\tau}{T} = -\alpha \frac{dE}{E} \quad (2.229)$$

となる。ここで T は (synchronous particle が) リングを一周する時間、revolution time である。あとでわかるようにシンクロトロン振動は時間 T にくらべて、ゆっくりしているので、(2.229) は

$$\frac{d d\tau}{dt} = -\alpha \frac{dE}{E} \quad (2.230)$$

とすることができる。

さて、電子はシンクロトロン放射によってエネルギーを失う。このエネルギーの損失は電子のエネルギーに依存するのであるが、ここでは定数と考え、ちゃんとした取り扱いは第3章でやることにする。そしてこのエネルギーの一周あたりの損失を U とおくと、それは synchronous particle が加速電圧から受けるエネルギー利得と等しいので

$$eV_0 = e\hat{V} \sin \phi_0 = U$$

となる。これはまた、

$$\sin \phi_0 = U / e\hat{V} = 1/q \quad (2.231)$$

ともかけ、ここで、 q は

$$q = e\hat{V}/U \quad (> 1) \quad (2.232)$$

であり、overvoltage factor といわれる。また同期していない電子が一周に得るエネルギー δE は

$$\delta E = eV(\tau) - U = eV(\tau) - eV_0 \quad (2.233)$$

となり、これは次のような時間変化で近似できる。

$$\frac{dE}{dt} = \frac{eV(\tau) - eV_0}{T} \quad (2.234)$$

(問 これを示せ)。

synchronous particle のエネルギーは変化しないので、上の式は

$$\frac{d dE}{dt} = \frac{eV(\tau) - eV_0}{T} \quad (2.235)$$

とかける。また (2.230) は、

$$\frac{d d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dt} = -\alpha \frac{dE}{E} \quad (2.236)$$

ともかける。(2.235) と (2.236) が電子ストレージリングのシンクロトロン振動を表わす基本式である。 $d\tau$ が小さい、微小振動の場合 (2.235) は、

$$\frac{d\Delta E}{dt} = \frac{e\dot{V}_0}{T} \Delta\tau \quad (2.237)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} e\dot{V}_0 &= \omega_{rf} e\hat{V} \cos\phi_0 \\ &= \omega_{rf} e\hat{V} \left[1 - \left(\frac{U}{e\hat{V}} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= h\omega_0 e\hat{V} (1 - 1/q^2)^{1/2} \\ &= h\omega_0 U (q^2 - 1)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.238)$$

である。(注、 ϕ_0 は振動が安定であるようになっているものとする。つまり $e\dot{V}_0 = e \frac{dV}{d\tau} \Big|_{\tau=0} > 0$ である。前項の図 2.43 と比較せよ。)

(2.236) と (2.237) から

$$\frac{d^2 \Delta\tau}{dt^2} = - \frac{\alpha e\dot{V}_0}{TE} \Delta\tau$$

となる(問 これを示せ)。これは調和振動子の式と同じであり、その周波数 Ω_s は、

$$\Omega_s^2 = \frac{\alpha e\dot{V}_0}{TE}$$

または

$$\Omega_s = \sqrt{\frac{\alpha e\dot{V}_0}{TE}} = \left(\frac{\alpha h\omega_0^2 e\hat{V} \cos\phi_0}{2\pi E} \right)^{1/2} \quad (2.239)$$

で与えられる。(問 これを示せ)。この Ω_s を

$$\Omega_s = 2\pi f_s = 2\pi \nu_s f_{rev} \quad (\omega_0 = 2\pi f_{rev})$$

とおき、 f_s (または Ω_s) を synchrotron frequency, $\nu_s (= f_s / f_{rev})$ を synchrotron tune という。 ν_s はリングを1周したとき何回シンクロトン振動をしたかを表す量であり、通常 $\nu_s \ll 1$ である。 ν_s はまた

$$\nu_s = \left(\frac{\alpha h e \hat{V} \cos\phi_0}{2\pi E} \right)^{1/2} \quad (2.240)$$

ともかける。

example

トリスタンMRのパラメータ、 $E = 30 \text{ GeV}$,
 $\alpha = 1.5 \times 10^{-3}$, $e\hat{V} = 382 \text{ MeV}$, $U = 290 \text{ MeV}$,
 $h = 5120$ を使うと、

$$\cos\phi_0 = \left[1 - \left(\frac{U}{e\hat{V}} \right)^2 \right]^{1/2} \approx 0.6509$$

となり、 $\nu_s \approx 0.1$, また $f_s \approx 10 \text{ kHz}$ となることがわかる。

では次に振動が微小ではない場合を考えよう。この場合には、

$$\frac{d^2 \tau}{dt^2} = - \frac{\alpha}{ET} (eV(\tau) - U) \quad (2.241)$$

となる(問 これを示せ)。これは右辺を力と考えると、力が位置のみに依存するニュートンの運動方程式と同じである。(2.241)の両辺に $\frac{d\tau}{dt}$ をかけ t で積分すると、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = \text{const} - \Phi(\tau) \quad (2.242)$$

$$\Phi(\tau) = \frac{\alpha}{ET} \int_{\tau_0}^{\tau} (eV(\tau) - U) d\tau$$

となる(問 これを示せ)。 $\Phi(\tau)$ は

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= \frac{\alpha e\hat{V}}{ET\omega_{rf}} \left(\cos\omega_{rf}\tau_0 - \cos\omega_{rf}\tau \right. \\ &\quad \left. - \omega_{rf}(\tau - \tau_0) \frac{U}{e\hat{V}} \right) \\ &= \frac{\alpha e\hat{V}}{2\pi hE} \left(\cos\phi_0 - \cos\phi - (\phi - \phi_0)/q \right) \end{aligned}$$

となる(問 これを示せ)。また(2.242)は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 + \Phi(\tau) = \text{const.} = \Phi_0 \quad (2.243)$$

という形にかける。これはニュートン力学で運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和(つまり全エネルギー)が保存されるということと同じ内容である。そしてこれはまた、

$$\frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{\Delta E}{E} \right)^2 + \Phi(\tau) = \Phi_0 \quad (2.244)$$

ともかける(問 これを示せ)。(ポテンシャルエネルギー) $\Phi(\tau)$ を図示すると図 2.44 のようになる。

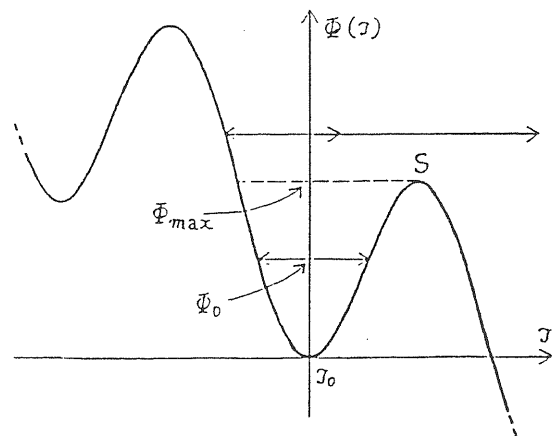


図 2-44.

図 2.44 から次のことがわかる。(振動の全エネルギー) Φ_0 が図のようになってくるときは、粒子は(ポテンシャル) $\Phi(\tau)$ のくぼみに常にとどまっております、安

定であるが、(全エネルギー) ϕ_0 が図の ϕ_{\max} より上にくると粒子はそのうちどこかに行ってしまう、不安定である。これを $(\tau, \Delta E/E)$ の位相平面で表わすと、図 2.45 のようになる。

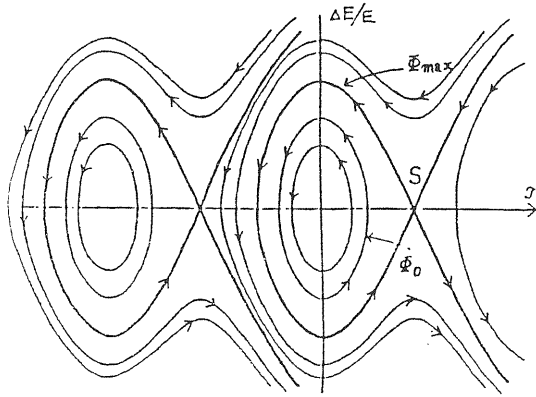


図 2 - 45.

図で ϕ_{\max} と示した安定・不安定領域をわける境界を separatrix という。また S なる点を saddle point という。S の所でこのようになるということは図 2.44 の S の所で $\phi(\tau)$ が τ について 2 次関数的であることと、(2.244) を使うと容易にわかる (問 これを示せ)。また電子は図 2.45 の矢印の方向に進むということも振動の式からすぐわかる。

次に安定な振動のうちで最大の (振動の) 全エネルギー、つまり ϕ_{\max} を求めてみよう。そこでは、

$$\phi'(\tau_1) = 0$$

であるから、

$$eV(\tau_1) - U = 0$$

となる。つまり

$$\sin \omega_{rf} \tau_1 = \sin \omega_{rf} \tau_0, \quad \sin \phi_1 = \sin \phi_0$$

であるが、この解は図 2.44 をながめることによって、

$$\phi_1 = \pi - \phi_0$$

となり、これから

$$\phi_{\max} = \phi(\phi_1) = \frac{\alpha e \hat{V}}{2\pi h E} \left(\cos \phi_0 - \cos(\pi - \phi_0) - (\pi - 2\phi_0)/q \right) \quad (2.245)$$

となる。これはまた、

$$\phi_{\max} = \frac{\alpha U}{\pi h E} \left[\sqrt{q^2 - 1} - \cos^{-1}(1/q) \right] \quad (2.246)$$

ともかける (問 これを示せ)。これを、

$$\phi_{\max} = \frac{\alpha U}{2\pi h E} F(q) \quad (2.247)$$

$$F(q) = 2 \left(\sqrt{q^2 - 1} - \cos^{-1}(1/q) \right)$$

とかいて、 $F(q)$ を energy aperture function という。 $F(q)$ は、

$$F(1) = 0, \quad q \rightarrow \infty \text{ のとき } 2q - \pi$$

なる性質がある (問 これを示せ)。この ϕ_{\max} と (2.244) を使うと、安定領域の ΔE の最大値が、

$$\left(\frac{\Delta E_{\max}}{E} \right)^2 = \frac{2}{\alpha^2} \phi_{\max} = \frac{U}{\pi \alpha h E} F(q) \quad (2.248)$$

となることがわかる。通常 ΔE_{\max} を ΔE とかいて、 $\Delta E/E$ を rf - bucket height という。たとへば入射時に $\Delta E/E$ より大きなエネルギー誤差をもった粒子は、高周波加速電圧の作るバケツからこぼれてしまうことがわかる。

次に陽子シンクロトロン位相振動を求めてみよう。まず、

$$\frac{\Delta \tau}{T} = -\eta \frac{\Delta p}{p}, \quad \eta = \alpha - \frac{1}{\gamma^2} \quad (2.249)$$

であるから (問 これを示せ)、

$$\Delta \phi = \phi - \phi_0$$

とおくと、電子の場合と同様にして、

$$\frac{d\Delta \phi}{dt} = -\eta \omega_{rf} \frac{\Delta p}{p} = -h \eta \omega_0 \frac{\Delta p}{p} \quad (2.250)$$

となる。ところが、

$$\Delta E = v \Delta p$$

であるので (問 これを示せ)、

$$\frac{d\Delta \phi}{dt} = -\frac{h \eta \omega_0^2}{pv} \left(\frac{\Delta E}{\omega_0} \right) \quad (2.251)$$

となる。ここで、

$$\omega_c = c/R$$

とおくと、 $\omega_0 = v/R$ であったので、

$$\omega_0 = \beta \omega_c$$

となる。これと、 $pv = E\beta^2$ (問 これを示せ) より、

$$\frac{d\Delta \phi}{dt} = -\frac{h \eta \omega_c^2}{E} \left(\frac{\Delta E}{\omega_0} \right) \quad (2.252)$$

となる。さて、

$$dE = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p}$$

であるので(問 これを示せ)、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

を使うと、

$$\frac{dE}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (2.253)$$

というよく知られた式が得られる。ここでこの \mathbf{E} は2種類の電場からできていることに注意しよう。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_B \quad (2.254)$$

ここで \mathbf{E}_C は加速空洞の作る電場であり、 \mathbf{E}_B は磁場が時間的に変化することによって作られる誘導電場で

$$\text{rot } \mathbf{E}_B = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.255)$$

である。

陽子がリングを一周する時間は angular revolution frequency を ω とすると

$$2\pi/\omega$$

で与えられる(問 これを示せ)ので、(2.253)をリング一周について積分すると、

$$\frac{2\pi}{\omega} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \int e\mathbf{E}_C \cdot \mathbf{v} dt + \int e\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{v} dt \quad (2.254)$$

のようにかける。ここでカギカッコは一周についての平均であるが、以下の式ではカッコをつけないでおこう(またはシンクロトロン振動はゆっくりしているので、カッコをはずして考えてもよい)。右辺の第1項は加速空洞によって得られるエネルギー利得であるので、

$$\int e\mathbf{E}_C \cdot \mathbf{v} dt = eV \quad (2.255)$$

とかける。第二項の \mathbf{E}_B は一周では時間的にほとんど変化しないと考えられるので、(または時間平均をとって考えて)、

$$\begin{aligned} \int e\mathbf{E}_B \cdot \mathbf{v} dt &= \int e\mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{s} = e \int \text{rot } \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{s} \\ &= -e \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (\mathbf{v} dt = d\mathbf{s}) \end{aligned} \quad (2.256)$$

となる(問 これを示せ)。

さて、(2.254)から synchronous particle に対する同様な式を差し引くと、

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\omega} \frac{dE}{dt} - \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{dE_0}{dt} &= eV - eV_0 - e \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot (d\mathbf{s} - d\mathbf{s}_0) \end{aligned} \quad (2.257)$$

となる。左辺は、 $\frac{dE}{dt} = \dot{E}$ 等とおくと、第一近似で

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 2\pi \left[\frac{1}{\omega_0} \left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \dot{E} - \frac{1}{\omega_0} \dot{E}_0 \right] \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{\omega_0} \Delta\dot{E} - \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2} \dot{E}_0 \right) \end{aligned}$$

となる(問 これを示せ)。ここで、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_0} \right) = \frac{1}{\omega_0} \Delta\dot{E} - \frac{\dot{\omega}_0}{\omega_0^2} \Delta E$$

を使うと、

$$\text{左辺} = 2\pi \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_0} \right) + \frac{1}{\omega_0^2} (\dot{\omega}_0 \Delta E - \Delta\omega \dot{E}_0) \right]$$

ここで、

$$\omega_0 = v_0/R \quad (R = \text{const.})$$

より、

$$\frac{d\omega_0}{\omega_0} = \frac{dv_0}{v_0} = \frac{1}{r^2} \frac{dp_0}{p_0}$$

であるので(問 これを示せ)、

$$\dot{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{r^2} \frac{\dot{p}_0}{p_0}$$

となる。

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = - \left(\alpha - \frac{1}{r^2} \right) \frac{\Delta p}{p_0}$$

$$\Delta E = v_0 \Delta p, \quad \dot{E}_0 = v_0 \dot{p}_0$$

を使うと(問 これらを示せ)、

$$\text{左辺} = 2\pi \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_0} \right) + \frac{v_0}{\omega_0} \alpha \frac{\Delta p}{p_0} \frac{\dot{p}_0}{p_0} \right] \quad (2.258)$$

となる。さて、(2.257)の右辺の第二項は、磁場の方向は時間とともに変化しないこと、また \mathbf{B} と $d\mathbf{s}$ の方向は逆であること等を考えると、

$$\text{第二項} \approx \int \frac{e\partial B_0}{\partial t} (d\mathbf{s} - d\mathbf{s}_0)$$

となる。ここで、 $p_0 = eB_0(s)\rho(s)$ であり、図2.46から

$$d\mathbf{s} - d\mathbf{s}_0 = \eta \frac{\Delta p}{p_0} d\mathbf{s}$$

となることを使うと、

$$\text{第二項} \approx \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_0}{\rho(s)} \right) \eta \frac{\Delta p}{p_0} d\mathbf{s}$$

とすることができる。

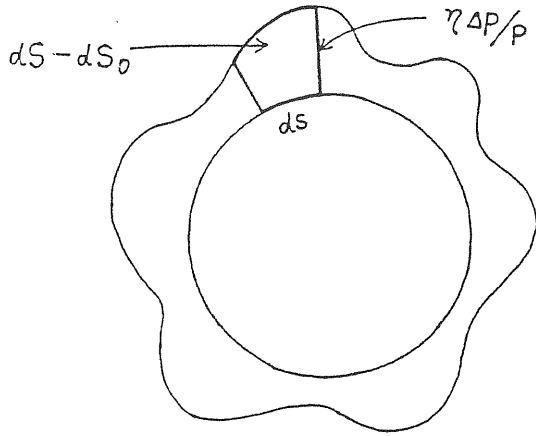


図 2 - 46.

よって,

$$\text{第二項} = \dot{p}_0 \frac{dp}{p_0} \int \frac{\eta ds}{\rho(s)} = 2\pi R \alpha \dot{p}_0 \frac{dp}{p}$$

となる。以上より, (2.257)は,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_0} \right) = \frac{eV(\phi) - eV(\phi_0)}{2\pi} \quad (2.259)$$

となる。これと, (2.252),

$$\frac{d}{dt} \Delta\phi = - \frac{h\eta\omega_c^2}{E} \left(\frac{\Delta E}{\omega_0} \right)$$

が陽子シンクロトロン振動を記述する式である。これはまた, (2.252)を(2.259)に代入して,

$$\frac{1}{h\omega_c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{\eta} \frac{d\Delta\phi}{dt} \right) = - \frac{eV(\phi) - eV(\phi_0)}{2\pi}$$

ともかける。ここで E/η を定数と仮定して(または定数とみなせる時間範囲を考えると), 微小振動に対しては,

$$\frac{d^2 \Delta\phi}{dt^2} = - \frac{e\hat{V} \cos \phi_0}{2\pi} \cdot \frac{h\omega_c^2 \eta}{E} \cdot \Delta\phi \quad (2.260)$$

となり, シンクロトロン振動数が

$$\omega_s^2 = \frac{\eta h\omega_c^2 e\hat{V} \cos \phi_0}{2\pi E} \quad (2.261)$$

と求まる。ここで陽子の速度が光速にほぼ等しいとすると,

$$\eta = \alpha, \quad \omega_c = \omega_0$$

となり, 電子の場合の式と一致する。また陽子のエネルギーが transition energy より低い場合には,

$$\eta < 0$$

であるので(問 これを示せ), $\cos \phi_0$ も負でないと $\omega_s^2 < 0$ となってしまふ。一方エネルギーが transition energy より高いときは, $\cos \phi_0$ は正である必要がある。シンクロトロンの場合, synchronous particle の一周あたりのエネルギー利得 ΔE_0 は (E_B による利得は無視できて),

$$\Delta E_0 = e\hat{V} \sin \phi_0$$

と考えることができる。これはまた, $P_0 = eB_0\rho$ を使うと,

$$\Delta E_0 = v_0 \Delta p_0 = e\dot{B}_0 v_0 T \rho = 2\pi R e \dot{B}_0 \rho$$

ともかける。これから

$$e\hat{V} \sin \phi_0 = 2\pi R e \dot{B}_0 \rho \quad (2.262)$$

となる。これからもし, \dot{B} , $e\hat{V}$ が一定であるとする, $\sin \phi_0$ も一定であるので, transition の前後で位相 ϕ_0 は図 2.47 のようになっている必要がある。

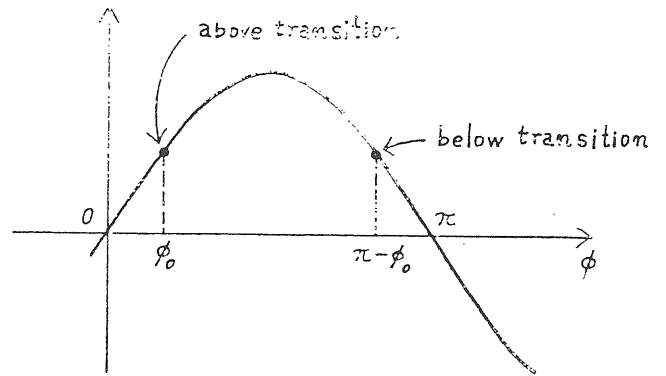


図 2 - 47.

(問 図 2.47 と図 2.42, 図 2.43 を比較せよ)

さて, ϕ_0 を 90° に近づけると ω_s がゼロになってくる(問 これを示せ) ことと, 図 2.44 から, ϕ_0 は 90° 付近には選ぶことができない(位相安定性がなくなる)。このことから,

$$e\hat{V} > 2\pi R e \dot{B}_0 \rho \quad (2.263)$$

である必要がある。(2.262)は $1T = 1 \text{ wb/m}^2$, $1 \text{ wb} = 1V \cdot \text{sec}$ であることを使うと,

$$e\hat{V} \sin \phi_0 [\text{eV}] = 2\pi R [\text{m}] \rho [\text{m}] \dot{B} [\text{T/sec}] \quad (2.264)$$

ともかける。

example

PS 主リングの場合を概算してみよう。

$$R \approx \rho \approx 50 \text{ m}, \quad B \approx 2 \text{ T/sec}$$

とすると,

$$e\hat{V} \sin \phi_0 \approx 30 \text{ keV}$$

となり, $e\hat{V} \approx 60 \text{ keV}$ とすると,

$$\phi_0 \approx 30^\circ$$

となる。

大振幅のシンクロトロン振動は電子の場合とほとんど同様であるのでここでは省略する。また時間的にシンクロトロン振動がどのように変化するかということは次の項で考える。

最後に参考のために、陽子のシンクロトロン振動を導びくのによく使われるやり方を示そう。一周あたりのエネルギー利得は

$$\Delta E = e\hat{V} \sin \phi$$

であるので $\Delta E = v \Delta p = \frac{2\pi R}{T} \Delta p$ から,

$$R \dot{p} = \frac{e\hat{V} \sin \phi}{2\pi}$$

となり, synchronous particle に対する同様の式をこれから差し引くと,

$$R \dot{p} - R_0 \dot{p}_0 = \frac{eV \sin \phi - eV \sin \phi_0}{2\pi}$$

となる。ここで左辺は、第一近似で

$$\begin{aligned} \text{左辺} &\approx R_0 \dot{\Delta p} + \Delta R \dot{p}_0 \approx R_0 \dot{\Delta p} + \dot{p}_0 \left(\frac{dR}{dp} \right)_0 \Delta p \\ &= R_0 \dot{\Delta p} + \left(\frac{dp}{dt} \frac{dR}{dp} \right)_0 \Delta p \\ &= R_0 \dot{\Delta p} + \left(\frac{dR}{dt} \right)_0 \Delta p \\ &= R_0 \dot{\Delta p} + \dot{R}_0 \Delta p \end{aligned} \quad (2.265)$$

となる。これから

$$\frac{d}{dt} (R_0 \Delta p) = \frac{e\hat{V} (\sin \phi - \sin \phi_0)}{2\pi}$$

となり, $R_0 = \frac{v_0}{\omega_0}$ を使うと,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_0} \right) = \frac{e\hat{V} (\sin \phi - \sin \phi_0)}{2\pi}$$

となる。

しかしながら上の導出にはトリックが使われている。(2.265)の最後の式で \dot{R}_0 はシンクロトロンの場合ゼロである。このことから,

$$\Delta R \dot{p}_0 = \dot{R}_0 \Delta p = 0$$

となり, (2.265)の式のどこかにトリックがあること

がわかる (問 このトリックをみやぶれ)。ただし, たとへば p と R が

$$p \propto R, \quad p_0 \propto R_0$$

となるときには, 上の導出が正しいということを指摘しておこう (問 このようになっている加速器とはどんな加速器か)。

2.20 断熱減衰 (adiabatic damping)

断熱減衰 (adiabatic damping)

2.9項でベータトロン振動のエミッタンスは不変であるということを通びき, またそれを使っているいろいろ議論を行ってきたが, 実際にはこのエミッタンスは粒子が加速されると減少する。逆に減速されるときには増大する。さて, 一般に粒子が加速される時得るエネルギーの増加は比較的ゆっくりしたものである。つまりエネルギーの増加率 (単位時間に得られるエネルギーの増加量に対する粒子のエネルギーとの比) はベータトロン振動の周波数にくらべて小さい。このように, ある運動や振動をしている系のパラメータ (この場合粒子のたて方向の運動量またはエネルギー) がゆっくりと変化することを一般に断熱的 (adiabatic) といひ, 上の場合には粒子が加速されると, エミッタンスが減少するので, 断熱減衰 (adiabatic damping) という。では粒子が加速されるとどうしてエミッタンスが減少するのであろうか。それは定性的には以下のようなである。今, 図 2.48 のようにリングのある場所 (加速空洞のある場所) で粒子が加速されるとしよう。そして

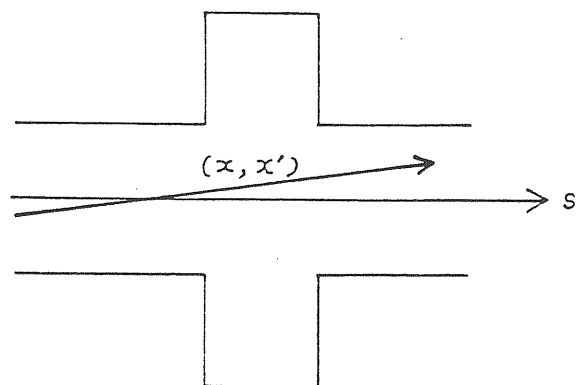


図 2-48.

その場所に入る前に粒子がもっていた位置および傾きを (x, x') とし, またその場所で粒子が加速されるとき, 粒子のたて方向の運動量が p から $p + \Delta p$ まで変化したとしよう。すると, 粒子の傾きは,

$$x' = \frac{p_x}{p} \quad (2.266)$$

(p_x は粒子のもっている横方向の運動量) であるので (問これを示せ), 図 2.49 からわかるように, 粒子のもっていた傾き x' は加速されたのちには,

$$\begin{aligned} \tilde{x}' &= \frac{p_x}{p + \Delta p} \approx \frac{p_x}{p} \left(1 - \frac{\Delta p}{p} \right) \\ &= x' \left(1 - \frac{\Delta p}{p} \right) \end{aligned}$$

のように変化する。つまり加速の前後で粒子の傾きは

$$\Delta x' = -\frac{\Delta p}{p} x' \quad (2.267)$$

だけ変化したことになる。さて, このこと位相平面で

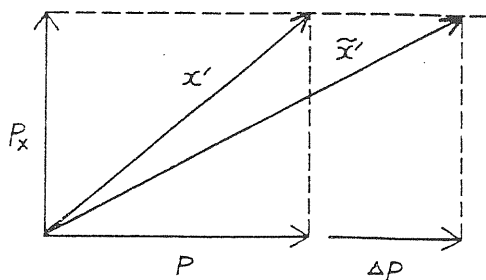


図 2 - 49.

考えると図 2.50 のようになり, 加速前にビームのしめていた面積, つまりエミッタンスが加速後では, 減少する。そして, その面積の縮少率は,

$$\Delta p / p$$

で与えられる (問これを示せ)。

図は誇張してかいてあるが, 実際の加速器ではビームが 1 回加速空洞を通るときに受けるエミッタンスの減少は非常に小さいので, エミッタンス ϵ は次のような時間についての微分方程式に従って変化すると考えることができる。

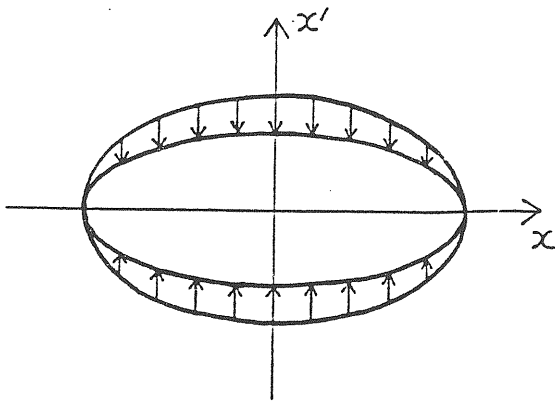


図 2 - 50

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \epsilon \quad (2.268)$$

または,

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$$

これより,

$$\epsilon \propto \frac{1}{p} \quad (2.269)$$

となることがわかる (問これを示せ)。そしてエミッタンスからくるビームサイズ σ_β は

$$\sigma_\beta = \sqrt{\epsilon \beta} \quad (2.270)$$

で与えられるので,

$$\sigma_\beta \propto \frac{1}{\sqrt{p}} \quad (2.271)$$

に従って変化するということからわかる (問これを示せ)。ここで次の二つのことに注意しよう。一つはビームサイズの式の中に β 関数が入っているが, 通常は加速とともに β 関数が変化しないようにしているということである。そして, これを暗に仮定したので (2.271) ができたということである。また, なぜ β 関数が加速とともに変化しないようにするかということ, 変化したとすると一般にベータatron振動数が変化してしまうからである (問これを示せ)。もう一つの注意すべきことは, 図 2.50 では加速後にビームサイズが変化していないのに (2.271) では変化しているということである。これは, エネルギーが少し変化するまでに粒子は何度もベータatron振動をしており, ある粒子に着目すると, その粒子が図 2.50 で x 軸上にあるときはその粒子の振動の振巾は変化しないが, x' 軸上にあるときは振巾の減少率が $-\Delta p / p$ となり, 平均的には, 振巾が,

$$-\frac{\Delta p}{2p}$$

で変化するということから理解できる。

(問直接 (2.271) を微分することによって, ビームサイズの減少率は $-\frac{1}{2p} \frac{dp}{dt}$ で与えられることを示せ)

次にもう少し, 定量的に断熱減衰を計算してみよう。粒子の横方向の運動は,

$$\dot{\mathbf{p}}_\perp = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_\perp \quad (2.272)$$

で記述されるが, これはたとえば水平方向に対しては (垂直方向も同様であるのでここでは水平方向を例にとる),

$$\frac{d}{dt} p_x = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x + \frac{m v^2}{r}$$

となり、両辺を $mv^2 = pv$ で割ると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{pv} \frac{d}{dt} px &= \frac{1}{p} \frac{d}{v dt} \left(p \frac{p_x}{p} \right) \\ &= \frac{1}{p} \frac{d}{ds} (px') \end{aligned} \quad (2.273)$$

となる。これから、

$$\frac{1}{p} \frac{d}{ds} (px') + K(s)x = 0 \quad (2.274)$$

となるのがわかる (問これを示せ)。これはまた

$$\frac{dx}{ds^2} + \frac{1}{p} \frac{dp}{ds} \frac{dx}{ds} + K(s)x = 0 \quad (2.275)$$

ともかける。

さて、この方程式を解くのであるが、ここで次のように考える。

$K(s)$ は加速によらない。また加速される場所はリング内で局在しているのでそこでベータatron振動を見ていると調和振動的である。

また、加速はベータatron振動にくらべてゆっくりしているので、リング全周で調和振動的と考えて十分であろう。

このことから、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{1}{p} \frac{dp}{ds} \frac{dx}{ds} + \Omega^2 x = 0 \quad (2.276)$$

として十分よい近似であろうということがわかる。ここで、

$$\Omega = \nu/R = \text{const}$$

である。もう少しちゃんとやるためには、ベータatron振動に調和振動子的方法を適用すると

$$\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} + \frac{1}{p} \frac{dp}{d\phi} \left(\frac{d\eta}{d\phi} - \alpha \nu \eta \right) + \nu^2 \eta = 0 \quad (2.277)$$

となる (問これを示せ)。第2項のかっこ内の η の係数は、最後の項の ν^2 にくらべて無視できる。また加速をリング全周にわたって行なわれると考えると、Twiss parameter の α は平均的にはゼロである (問 $\beta' = -2\alpha$ を使ってこれを示せ)。また α のリング内の変化はベータatron振動と直接の相関をもたない。これらのことから、この α のかかった項を無視すると (2.277) は (2.276) と同形になる。そこで以下では (2.276) を解くことにしよう。これを解くのにいわゆるWKB近似をもちいる。そのために

$$x = e^{i\phi(s)}$$

とおく。すると、

$$x' = i\phi' e^{i\phi}$$

$$x'' = ((i\phi')^2 + i\phi'') e^{i\phi}$$

となるが加速はゆっくりとしたので、 ϕ はほとんど

$$\phi \sim \Omega s$$

とかけるはずである (問これを示せ)。

よって、

$$\phi'' \approx 0$$

とすると、(2.276) から

$$(i\phi')^2 + \frac{1}{p} \frac{dp}{ds} i\phi' + \Omega^2 = 0 \quad (2.278)$$

となり

$$\phi' \approx \frac{i}{2} \frac{1}{p} \frac{dp}{ds} \pm \Omega \text{ となるが、これはただちに積分できて、}$$

$$\phi \approx \frac{i}{2} \ln p \pm \Omega s \quad (2.279)$$

と求まる (問これを示せ)。これより

$$x \propto e^{i\phi s} / \sqrt{p}$$

$$x' \propto e^{i\phi s} / \sqrt{p}$$

となるのがわかる (問これを示せ)。これからビームサイズ、ビームの傾きの拡がりが増速とともに $1/\sqrt{p}$ のように変化することがわかり、またエミッタンスは

$$\epsilon \propto 1/p$$

のように変化することがわかる (問これを示せ)。これらの結果は先に定性的に求めたのと全く同じものである。

次にシンクロtron振動の断熱減衰といわれるものについて考えよう。以下ではシンクロtron振動が微小振動である場合のみを考える。

まず初めに「仮想的」電子シンクロtronについて考える。仮想的とは第3章でのべる放射減衰がないという意味である。この場合シンクロtronとしたので (synchronous particle) のエネルギーが変化する。

よって

$$\frac{d\Delta\tau}{dt} = -\alpha \left(\frac{\Delta E}{E} \right)$$

より

$$\frac{d^2 \Delta\tau}{dt^2} = \frac{-\alpha}{E} \frac{d\Delta E}{dt} + \frac{\alpha}{E^2} \frac{dE}{dt} \Delta E \quad (2.280)$$

となる。エネルギーの変化の式は、

$$\frac{d\Delta E}{dt} = \frac{e\dot{V}_0}{T} \Delta\tau \quad (2.281)$$

となり、電子ストレージリングの式と同じになる（これはたとえば陽子シンクロトロンと同様の式からでる）。(2.280)と(2.281)から

$$\frac{d^2\Delta\tau}{dt^2} + \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} \frac{d\Delta\tau}{dt} + \frac{\alpha e\dot{V}}{TE} \Delta\tau = 0 \quad (2.282)$$

となる(問これを示せ)。これはベータトロン振動の場合と同形であるので、

$$\Delta\tau \propto 1/\sqrt{E} \quad (2.283)$$

のように変化するように思えるかもしれないが、これは、

$$\Omega_s^2 = \frac{\alpha e\dot{V}}{TE}$$

が定数とした場合であって、 Ω_s がエネルギーとともに変化する場合には(つまり時間とともに変化する場合)には上のようにはならない。これをみるために、まず、

$$\frac{d^2\Delta\tau}{dt^2} + \frac{\alpha e\dot{V}}{TE} \Delta\tau = 0 \quad (2.284)$$

なる式を考え、

$$\Omega^2(t) = \frac{\alpha e\dot{V}}{TE}$$

とおくことにする。(2.284)をWKB近似するために、

$$\Delta\tau = \exp[i\phi(t)] \quad (2.285)$$

とおき、これを(2.284)に代入すると

$$-(\phi')^2 + i\phi'' + \Omega^2(t) = 0 \quad (2.286)$$

となる。 ϕ はゆっくり変化すると考えているので、まず ϕ'' をゼロとおくと

$$\phi' \approx \pm\Omega(t)$$

となり、これから

$$\phi'' \approx \pm\Omega'(t)$$

となる。これを(2.286)に代入して、 ϕ' を求めると、

$$\phi' \approx \pm\Omega + \frac{i\Omega'}{2\Omega} \quad (2.287)$$

となる(問これを示せ)。これを積分すると、

$$\phi \approx \pm \int \Omega dt + \frac{i}{2} \ln \Omega \quad (2.288)$$

となり、これを(2.285)に代入すると

$$\Delta\tau = \frac{1}{\Omega^{1/2}} \exp\left(\pm i \int \Omega dt\right)$$

となることがわかる。これから、

$$\frac{\alpha e\dot{V}}{T} = \text{const}$$

とすると、

$$\Delta\tau \propto E^{1/4} \exp\left(\pm i \int \Omega dt\right) \quad (2.289)$$

となる。これは(2.284)の解であったが、(2.282)に対しては、減衰項のため $\Delta\tau$ が Ω が一定のとき(2.283)のように変化するので(2.282)の解は

$$\Delta\tau \propto \frac{1}{E^{1/4}} \exp\left(\pm i \int \Omega dt\right) \quad (2.290)$$

となる。 ΔE は、 $\Delta E \propto E \frac{d\Delta\tau}{dt}$ より

$$\Delta E \propto E\Omega \Delta\tau \propto E^{1/4} \exp\left(\pm i \int \Omega dt\right)$$

(2.291)

となる。このように Ω^2 がエネルギーに逆比例して小さくなる場合には、(または加速電圧が一定の場合には)、 $\Delta\tau$ は時間とともに小さくなるが、エネルギーのずれは大きくなる。しかし、次の積分は定数であることに注意しよう。

$$\int \Delta\tau \Delta E = \text{const.}$$

次に陽子シンクロトロンの場合を考えよう。この場合のシンクロトロン振動の式は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{E}{\eta} \frac{d\Delta\phi}{dt} \right) = -S \Delta\phi \quad (2.292)$$

$$S = \frac{hw c^2 e V \cos \phi_0}{2\pi}$$

であった。これもWKB近似するために、

$$\Delta\phi = e^{i\psi(t)} \quad (2.293)$$

とおき、(2.292)にこれを代入すると、

$$-(\psi')^2 + i\psi'' + \frac{(E/\eta)'}{E/\eta} i\psi' + \Omega^2(t) = 0 \quad (2.294)$$

となる。ここで、

$$\Omega^2(t) = \frac{\eta}{E} S \quad (2.295)$$

とおいた。例によって、まず $\psi'' = 0$ とおくと、

$$\psi' \approx \frac{i}{2} (\ln E/\eta)' \pm \Omega \quad (2.296)$$

となり、これから

$$\psi'' \approx \pm \Omega'$$

とおける。これを(2.294)に代入すると、

$$\psi' \approx \frac{i}{2} (\ln E/\eta)' \pm \Omega + \frac{i}{2} \frac{\Omega'}{\Omega} \quad (2.297)$$

となり、これより

$$\psi \approx \frac{i}{2} (\ln E/\eta) \pm \int \Omega dt + \frac{i}{2} \ln \Omega \quad (2.298)$$

となる。これを(2.293)に代入すると

$$\Delta \phi \approx (E/\eta)^{-1/2} \Omega^{-1/2} \exp[\pm i \int \Omega dt] \quad (2.299)$$

となる。また、

$$\frac{d \Delta \phi}{dt} = \frac{-\eta h \omega_c^2}{E} \left(\frac{\Delta E}{\omega_0} \right)$$

より、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{\omega_0} &\sim \frac{1}{h \omega_c^2} (E/\eta) \Omega \Delta \phi \\ &\sim (E/\eta) (\eta/ES)^{1/2} (E/\eta)^{-1/2} \exp[\pm i \int \Omega dt] \\ &= \left(\frac{E}{\eta} S \right)^{1/2} \exp[\pm i \int \Omega dt] \quad (2.300) \end{aligned}$$

となり、 $\Delta \phi$ はまた

$$\Delta \phi \approx \left(\frac{E}{\eta} S \right)^{-1/2} \exp[+ i \int \Omega dt] \quad (2.301)$$

ともかける。

この場合にも、

$$\int \Delta \phi \frac{\Delta E}{\omega_0} = \text{const} \quad (2.302)$$

となることがわかる。上の式は $\eta > 0$ として求めたが、 $\eta < 0$ の場合にも全く同様になる。さて、陽子のエネルギーがtransitionに近くなると、 $\eta \approx 0$ となるので、

$$\Delta \phi \rightarrow 0$$

$$\Delta E/\omega_0 \rightarrow \infty$$

となる傾向にあることがわかる。つまりパンチのたて巾が短くなり、 ΔE が大きくなるので横巾が増大する。しかし実際は、transitionのところでは ΔE は無量大にはならない。これは、 $\eta \approx 0$ の付近では上のような

WKB近似が有効でないためである。以下では式が複雑になるので詳細は省くが、 $\eta \approx 0$ の付近で、時間の原点をtransitionにとって、

$$\eta/E \propto -t$$

と近似すると、(2.292)は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \frac{d \Delta \phi}{dt} \right) + C \Delta \phi = 0 \quad (2.303)$$

となる。Cは定数、ここで両辺をtで割って

$$x = \frac{1}{2} t^2$$

なる独立変数をとると(2.303)は

$$\frac{d^2 \Delta \phi}{dx^2} + k^2 x^{-1/2} \Delta \phi = 0 \quad (2.304)$$

となる。ここで k^2 は定数。これの解は級数展開の形で求めることもできるが、実は、

$$\Delta \phi = \sqrt{x} \left(a J_{2/3} \left(\frac{4}{3} k x^{3/4} \right) + b J_{-2/3} \left(\frac{4}{3} k x^{3/4} \right) \right)$$

とベッセル関数でかける。これは

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 x^m y = 0 \quad (2.305)$$

の解が

$$y = \sqrt{x} J_{\frac{1}{m+2}} \left(\frac{2k}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}} \right)$$

となることが、ベッセル関数の方程式に一連の変換をほどこすことによってわかる(たとえば、寺沢寛一、数学概論)。

そして、 $t \rightarrow 0$ は $x \rightarrow 0$ であるので、

$$\Delta \phi \rightarrow x^{1/2} (A x^{-1/2} + B x^{1/2} + \dots)$$

となり $\Delta \phi$ は一定であることがわかる。また、

$$\Delta \phi \rightarrow \text{const.} + B' t^2 + \dots$$

であるので

$$\Delta E \rightarrow \frac{C}{t} \frac{d \Delta \phi}{dt} \rightarrow \text{const.}$$

となることがわかり、 ΔE は $t \rightarrow 0$ すなわち、transitionに近づいても定数であることがわかる。

第三章 電子ストレージリング (electron storage ring)

3.1 序

この章では電子ストレージリングの特徴について述べる。それは、電子がリング内を回るとき、シンクロトロン放射という形でエネルギーを放出するという性質によってもたらされるものである。このことによる電子の運動への影響には、(1)放射減衰 (radiation damping) と呼ばれるものと、(2)放射励起 (radiation excitation, または quantum excitation) と呼ばれるものとの二つのものがある。(1)は、リングを回っている電子の振動 (ベータトロン振動, シンクロトロン振動) が、電子がシンクロトロン放射を行うことによって減衰することをさしている。このことはまた、シンクロトロン放射がない場合には第二章で示したように不変であったベータトロンのエミッタンスがこの場合には減衰することを意味している。この減衰の様子は調和振動子の減衰と同じで、振動の振幅 A が時間とともに、

$$A \propto e^{-t/\tau}$$

のように変化する。そしてこの τ を減衰時間 (damping time) といい、ベータトロン振動 (x, y 方向の振動), シンクロトロン振動のそれぞれに対応して三つの damping time (τ_x, τ_y, τ_e) がある。電子ストレージリングでは、これら damping time の関係はおおよそ次のようになっている。

$$2\tau_e \approx \tau_x \approx \tau_y$$

example

P F-ring では、 $\tau_x \approx \tau_y \approx 8$ m sec, $\tau_e \approx 4$ m sec, revolution time $\approx 0.624 \mu$ sec であり、ベータトロン tune を $\nu_x \approx 5.3$, $\nu_y \approx 4.2$ とすると、damping time の間に、 x 方向には約 7×10^4 回、 y 方向には約 5.5×10^4 回振動する。またシンクロトロン振動に関しては、damping time の間に、約 200 回振動する。このように数 m sec という時間は短い時間 (たとえばビームを蓄積している時間、数時間に比較して) であるが、電子の振動という点からすると非常にゆっくりしている。

さて、もし振動が減衰ししないとするとたちまち (P F-ring では数秒で) 電子ビームは一点に集中してしまう。(問 damping time が 10 m sec で、ビ-

ムが初め 10 mm ぐらい広がっていたとすると、10 秒後にはビームの広がりはいくらになるか (注. 電卓または計算機が underflow を起こさないように計算)。

しかし実際には (2) の radiation excitation があり、電子ビームは、一点に集中してしまうようなことはない。(2)は、シンクロトロン光が電子から連続して放出されるのではなく、光子というエネルギーのかたまり ($\hbar\omega$) として確率的に放出されるために起こるものである。このため、(2)の効果を理解するためには量子論を知らないといけないように思われるが、実際にはそれを理解するのに量子論は一切必要としない。ただ光が $\hbar\omega$ というエネルギーのかたまりで確率的に出るということのみで十分である。そして光が光子という形で確率的に放出されるため電子の振動はランダムにゆさぶられる。これは、花粉が分子との衝突によってランダムにゆさぶられるという現象 (ブラウン運動, Brownian motion) と同じであり、実際、電子は花粉と同じようなふるまいをする。もし花粉があるバネのようなものから力を受けて、調和振動的になっていると、この花粉の運動と電子の振動とは全く等価なものになる。

減衰力の働く調和振動子が外からランダムに力を受けると、その振動子の振幅は減衰力と確率的に拡がろうとすることから決まってくる確率的なある巾をもっているが、それと同様に電子の振動の振幅も確率的にある巾をもっている。しかし電子ストレージリングでは多数の電子がリング内を回っているため、この確率的な巾は、多数の電子を考えることによって確定的な巾となる。そしてこの巾が電子ビームの振動の巾となる。これはベータトロン振動については (ベータトロン振動の) ビームサイズ (またはエミッタンス) であり、シンクロトロン振動についてはバンチ巾またはエネルギー巾となる。

以下この章では、まず初めに、(1)についてのべ、次に(2)、そして最後に電子の lifetime についてのべる。なお Appendix B で電子ビームを考えるとき必要なシンクロトロン放射の性質についてのべておいた。

3.2 放射減衰 (radiation damping)

放射減衰を考える前に Appendix B で与えた、一周あたりのシンクロトロン光によるエネルギー損失の見

積りをしてみよう。このエネルギー損失は、

$$U_0 = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(mc^2)^3} \frac{E_0^4}{\rho_0} \quad (3.1)$$

または、

$$U_0 \text{ [keV]} = 88.5 E_0^4 \text{ [GeV]} / \rho_0 \text{ [m]} \quad (3.2)$$

で与えられる。(ここで下つきの添字ゼロは中心のエネルギーをもつ電子または synchronous electron を表わすものとする)。

example

P F-ring の場合 $E_0 = 2.5 \text{ GeV}$, $\rho \approx 8.66 \text{ m}$ であるので

$$U_0 \approx 400 \text{ keV}$$

となり、一周でおよそ電子の静止エネルギー分ぐらいのエネルギー損失がある。しかし、 2.5 GeV は静止エネルギーの約 5000 倍であるので損失はわずかともいえる。

一方、トリスタンのMRで $E_0 = 30 \text{ GeV}$, $\rho \approx 250 \text{ m}$ とすると、

$$U_0 \sim 0.3 \text{ GeV}$$

となり、これは E_0 の約 1% にもなる。リングの 4ヶ所の長い直線部にある加速空洞でエネルギーを補っても、一つの曲線部の入口と出口でエネルギーが 0.25% ちがうことになる。

(問 もし、 $E_0 = 50 \text{ GeV}$ とすると、 U_0 は E_0 の何% になるか)

さて、この項と次の項で次の性質を使う。単位時間あたりの放射のパワーは

$$P_r \propto E^2 B^2 \quad (3.3)$$

であり、中心のエネルギーに対しては、

$$P_{r0} \propto \frac{E_0^4}{\rho_0^2} \propto \frac{1}{\rho_0^2} \quad (3.4)$$

であり、これを一周にわたって積分すると

$$\int P_{r0} dt = \int P_{r0} \frac{ds}{c} = U_0 \quad (3.5)$$

となる。これから $f(s)$ を任意の s の関数とすると、

$$\frac{1}{c U_0} \int P_{r0} f(s) ds = \frac{\int \frac{f(s)}{\rho^2} ds}{\int \frac{ds}{\rho^2}} \quad (3.6)$$

とかける。

ではまず初めにシンクロトロン振動の radiation damping を、次にベータロン振動のそれを、細かいことはぬきにして、説明する。通常の場合はこちらで得られる結果で十分である(数値の精度も十分である)。

さて、電子のエネルギー E が、中心のエネルギーより大きいと、(3.3) から放射損失は E^2 に比例して大きくなるのがわかる。これから 1 周あたりの放射損失 U は

$$U \propto E^2 \quad (3.7)$$

となる。(注. これと、 $U_0 \propto E_0^4$ を混合しないこと) これから

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{2 \Delta E}{E_0}, \quad \left(\frac{dU}{dE}\right)_0 = 2 \frac{U_0}{E_0} \quad (3.8)$$

となり、エネルギーのずれ ΔE の一次までの近似で

$$U = U_0 + 2 \frac{U_0}{E_0} \Delta E \quad (3.9)$$

となることがわかる。 U は一周あたりのエネルギー損失であることに注意するとシンクロトロン振動の方程式は次のようになる。

$$\frac{d \Delta \tau}{dt} = -\alpha \frac{\Delta E}{E_0} \quad (3.10)$$

$$\frac{d \Delta E}{dt} = \frac{1}{T} (e \dot{V}_0 \Delta \tau - 2 \frac{U_0}{E_0} \Delta E) \quad (3.11)$$

これより、

$$\frac{d^2 \Delta \tau}{dt^2} = -\frac{\alpha e \dot{V}_0}{T E_0} \Delta \tau + 2\alpha \frac{U_0}{E_0^2 T} \Delta E \quad (3.12)$$

となり、これはまた

$$\frac{d^2 \Delta\tau}{dt^2} + \frac{2U_0}{E_0 T} \frac{d\Delta\tau}{dt} + \Omega^2 \Delta\tau = 0 \quad (3.13)$$

ともかける (問 これを示せ)。これは減衰力の働く調和振動子の式と全く同じであり、この振動は、

$$\left(\frac{2U_0}{E_0 T} \ll \Omega \text{ であるので} \right)$$

$$\Delta\tau \propto e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\pm i\Omega t} \quad (3.14)$$

で減衰する。減衰の時定数を τ_e とかいて、

$$\tau_e = \frac{E_0 T}{U_0} \quad (3.15)$$

(問 これを示せ) これを、シンクロトロン振動の radiation damping time という。ここで U_0/T は電子がエネルギーを補給されない場合の一周あたりのエネルギーの減衰を表わすことに注意すると、 τ_e を次のように象徴的にかくこともできる。

$$1/\tau_e = \frac{1}{E_0} \frac{dE_0}{dt} \quad (3.16)$$

これを使うと、(3.13) は

$$\frac{d^2 \Delta\tau}{dt^2} + \frac{2}{E_0} \frac{dE_0}{dt} \frac{d\Delta\tau}{dt} + \Omega^2 \Delta\tau = 0 \quad (3.17)$$

とかける。これは第2章のシンクロトロン振動の断熱減衰の式と因子2を除くとよく似ている。しかし、断熱減衰の場合はエネルギーが時間とともに変化したので $\Delta\tau$ はEのべき乗で変わったが radiation damping の場合はそうではないことに注意しよう。

example

PF-ring の場合、 $E_0 = 2.5 \text{ GeV}$ 、 $U_0 \approx 400 \text{ keV}$ 、 $T = 0.624 \mu\text{sec}$ であるので $\tau_e \approx 4 \text{ m sec}$ となる。

トリスタンのMRの場合 $E_0 = 30 \text{ GeV}$ 、 $U_0 \approx 0.3 \text{ GeV}$ 、 $f_{\text{rev}} = 99 \text{ kHz}$ とすると、 $\tau_e \approx 1 \text{ m sec}$ となる。また τ_e は

$$\tau_e \propto 1/E_0^3$$

というエネルギー依存性をもっている。

(問 では、トリスタンのMRで $E_0 = 10 \text{ GeV}$ のとき τ_e はいくらか)

では次にベータトロン振動の radiation damping についてのべる。

シンクロトロン放射光は、電子の進行方向に放出されるので、図3.1からわかるように、光が出る前後で電子の位置と傾きは変化しないと考えられる。

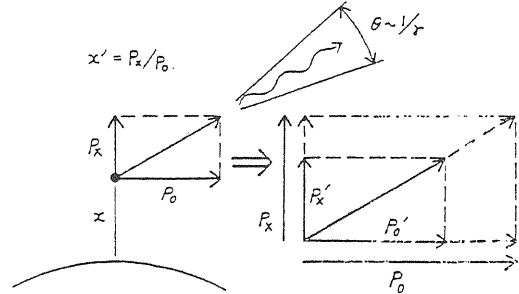


図 3 - 1.

このことから (以下でのべる細かいことを無視すれば)、ベータトロン振動はシンクロトロン放射光によって変化を受けないと考えてよい。(ただし、光がつぶつぶの光子で放出されるということはここでは考えない)

では減衰はどこからくるのかということ、それはシンクロトロン光によって失われたエネルギーを補給するための加速空胴によって引き起こされる。

そしてこの radiation damping は断熱減衰と同じ機構による damping である。ただちがうのは、エミッタンスの一周あたりの縮少率 $\Delta p/p$ が、

$$\Delta p/p = \frac{\Delta E}{E_0} = \frac{U_0}{E_0} = \text{const.} \quad (3.18)$$

となることだけである。上の式で最初の等号は、電子の速度が光速であることから、そして次の等号は加速空胴で得られるエネルギーは、ちょうど放射損失を捕うことからできたものである。そしてこれが定数であることからベータトロン振動の radiation damping はシンクロトロン振動の場合と同じようになり、エミッタンスは

$$\epsilon \propto e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.19)$$

のように減衰する。この τ は (そしてエミッタンスがこのようになることは)、 ϵ が

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{U_0}{E_0 T} \epsilon \quad (3.20)$$

となる (問 これを示せ) ことから求まり、 τ は、

$$\tau = \frac{E_0 T}{U_0} \quad (3.21)$$

与えられる。ベータトロンの振巾（またはビームサイズは）

$$\sqrt{\epsilon \beta}$$

であったので、振巾の damping time τ_β は

$$\tau_\beta = \frac{2 E_0 T}{U_0} \quad (3.22)$$

となる（問 これを示せ）。この τ_β をベータatron 振動の damping time といい、水平方向のベータatron 振動に対して τ_x 、たて方向は τ_y がよく使われる。そして上の導出では

$$\tau_x = \tau_y = \tau_\beta = 2 \tau_\epsilon \quad (3.23)$$

となる。

example

P F-ring の場合、 $\tau_\epsilon \approx 4$ msec より $\tau_x = \tau_y \approx 8$ msec となり、トリスタンのMRで $E = 30$ GeV の場合、 $\tau_\epsilon \approx 1$ msec より $\tau_x = \tau_y \approx 2$ msec となる。

では次に radiation damping の細かい議論をすることにしよう（通常は以下のことは細かい話と考えることができるが、そうでない場合もあるので重要でないということではない）。

まず初めにシンクロtron 振動の damping であるが、その damping はエネルギー損失が電子のエネルギーに依存すること、つまりエネルギーが高いと損失が大きくエネルギーが低いと損失が小さいことからできた。ここでは dU/dE をもうすこしちゃんと計算してみよう。

$$U = \int P_r \frac{d\ell}{c} \quad (3.24)$$

であったが、エネルギーがずれていると、第2章の結果から

$$\begin{aligned} d\ell &= \left(1 + \frac{\eta}{\rho} \frac{d\rho}{\rho}\right) ds \\ &= \left(1 + \frac{\eta}{\rho} \frac{dE}{E_0}\right) ds \end{aligned} \quad (3.25)$$

であるので、

$$U = \frac{1}{c} \int P_r \left(1 + \frac{\eta}{\rho} \frac{dE}{E_0}\right) ds \quad (3.26)$$

となる。これから

$$\begin{aligned} (dU/dE)_0 &= \frac{1}{c} \int P_{r0} \left[\frac{\eta}{\rho} \frac{1}{E_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{P_r} \frac{dP_r}{dE} \right]_0 ds \end{aligned} \quad (3.27)$$

となることがわかる。

先ほどは dP_r/dE （または dU/dE ）の計算では P_r が E^2 に比例するとしたが、エネルギーがずれていると感じる磁場もちがう（dispersion 関数による）ので P_r が B^2 によることも考える必要がある。（3.3）から

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{P_r} \frac{dP_r}{dE}\right)_0 &= \frac{2}{E_0} + \left(\frac{2}{B} \frac{dB}{dx_\epsilon} \frac{dx_\epsilon}{dE}\right)_0 \\ &= \frac{2}{E_0} + \frac{2}{B_0} \left(\frac{dB}{dx}\right)_0 \frac{\eta}{E_0} \end{aligned} \quad (3.28)$$

となり、これより、（3.6）を使うと

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{U_0} \left(\frac{dU}{dE}\right)_0 &= \\ &= \frac{\int \frac{1}{\rho^2} (2 + \frac{\eta}{\rho} + 2\rho\eta K)}{\int \frac{ds}{\rho^2}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

となる。ただし、 K は

$$K = \frac{1}{(B\rho)_0} \left(\frac{dB}{dx}\right) \quad (3.30)$$

である。（3.29）を整理すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{dU}{dE}\right)_0 &= (2 + D) \frac{U_0}{E_0} \\ D &= \int \eta (1/\rho^3 + 2K/\rho) ds / \int \frac{ds}{\rho^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

となる。（ dU/dE ）₀ が求まったのであとは先ほどと同様の手続きにより τ_ϵ が求まる。これを

$$\tau_\epsilon = \frac{2 E_0 T}{J_\epsilon U} \quad (3.32)$$

$$J_\epsilon = 2 + D$$

とかいて (問 これを示せ), J_e をシンクロトロン振動の damping partition number という。さてここで D について二, 三のコメントをしておく。序論でのべた separate 型の bending magnet でかつ ρ がすべての bending magnet で同じ場合には, D は

$$D = \int \frac{\eta}{\rho^3} ds / \int \frac{ds}{\rho^2} \\ = \frac{2\pi R}{\rho^2} \frac{1}{C} \int \frac{\eta}{\rho} ds / \cdot \frac{2\pi\rho}{\rho^2}$$

となる (問 これを示せ)。これから

$$D = \alpha R / \rho \approx \frac{R}{\nu_x^2 \rho} \ll 1 \quad (3.33)$$

となり, D は小さい値になる。しかし, ここでは詳しくのべないが, この bending magnet が rectangular magnet のときは, さらに

$$D \approx 0 \quad (3.34)$$

となる。これは D を導びいた過程をみればわかるように, D はエネルギーがずれた電子が bending magnet の中を走る道のりと, 中心のエネルギーをもつ電子のそれとの差であったが, これは rectangular magnet ではほとんどゼロであることが容易に予想できるからである (問 η が定数であるとして, それを示せ)。

また bending magnet が combined 型の場合には,

$$\eta \approx R / \nu_x^2, \quad K \approx \left(\frac{\nu_x}{R}\right)^2, \quad \rho \approx R$$

として荒い評価をすると

$$D \sim \frac{1}{\nu_x^2} + 2 \quad (3.35)$$

となる (問 これを示せ)。この場合には D は無視できなくなるばかりでなく, あとで示すように D が 1 より大きくなるとベータトロン振動は damping でなくて anti-damping となることがわかるので, 電子ストレージリングを combined 型の bending magnet で作ると電子を蓄積することが不可能になる。

しかしながら bending magnet が separate 型であっても, 電子ビームの中心のエネルギーがストレージリングの電磁石の強さから決まるエネルギー (design energy) にあっていない場合には D の値が変化する。まず電子ビームの中心のエネルギー (E_e) が電磁石の強さから決まるエネルギー (E_r) にあっていないとはどういう意味であるかを説明する。

電子ストレージリングの場合, damping があるのでたとえビームの中心のエネルギーがずれても, E_r に等しくなろうとする。たとえばビームのエネルギーをゆっくり上げようとする場合には, (もし加速電圧が十分あるならば) リングの電磁石の磁場を上げるだけで, ビームのエネルギー E_e を高くすることができる。しかし E_e と E_r が等しくなるためには, 加速周波数が E_r のエネルギーをもつ電子の revolution frequency のある整数倍の関係があるときである。もし加速周波数を Δf_{rf} だけずらしたとすると,

$$\frac{\Delta f_{rf}}{f_{rf}} = \frac{\Delta f_{rev}}{f_{rev}} = -\frac{\Delta t}{t} = -\alpha \frac{\Delta p}{p} \\ = -\alpha \frac{\Delta E}{E} \quad (3.36)$$

よりわかるように, $\Delta E = E_e - E_r$ だけずれたエネルギーが, ビームの中心のエネルギー (synchronous particle のエネルギー) となる。

このように加速周波数をずらすと, E_e が E_r からずれ, 実効的に $\Delta p/p$ が生じて, ビーム中心の閉軌道が $\eta \Delta p/p$ だけゆがむ。すると, 四極電磁石の中でこの閉軌道上の電子は磁場を感じることにになり, このようなビームに対しては四極電磁石は combined 型の (rectangular) magnet となる。そしてこの中心軌道の磁場 B_q は,

$$B_q = \left(\frac{dB}{dx}\right)_0 \eta \Delta p/p \quad (3.37)$$

と与えられる。この磁場による軌道の曲率半径 ρ_q は

$$P = e (B\rho)_0 = e B_q \rho_q \quad (3.38)$$

より,

$$\frac{1}{\rho_q} = \frac{1}{(B\rho)_0} \left(\frac{dB}{dx}\right)_0 \eta \Delta p/p = K \eta \Delta p/p \quad (3.39)$$

となる。これと, magnet が rectangular であることを使うと, D は

$$D \approx D_0 + \frac{\int 2 K^2 \eta^2 ds}{\int \frac{ds}{\rho_0^2}} \Delta p/p \quad (3.40)$$

となる。これより

$$\partial D / \partial (\Delta p / p) = 2 \int K^2 \eta^2 ds / \int \frac{ds}{\rho_0^2} \quad (3.41)$$

となる。また、

$$\partial J_\epsilon / \partial (\Delta p / p) = \partial D / \partial (\Delta p / p) \quad (3.42)$$

であり、のちに示すように、ベータトロン振動の damping time を

$$\tau_x = \frac{2 E_0 T}{J_x U_0} \quad (3.43)$$

とかいたとき、

$$J_x = 1 - D \quad (3.44)$$

と与えられるので

$$\partial J_x / \partial (\Delta p / p) = -\partial D / \partial (\Delta p / p) \quad (3.45)$$

となる。

example

トリスタンのMRで $E = 30 \text{ GeV}$ のとき、

$$\partial D / \partial (\Delta p / p) \sim 300$$

である。また

$$\frac{\Delta p}{p} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\Delta f_{rf}}{f_{rf}}$$

であるから、 $\alpha \sim 1.5 \times 10^{-3}$ 、 $f_{rf} \sim 500 \text{ MHz}$ を使うと、

$$J_\epsilon \approx 2 - 0.4 \Delta f_{rf} \text{ [kHz]}$$

$$J_x \approx 1 + 0.4 \Delta f_{rf} \text{ [kHz]}$$

となる。これから、 Δf_{rf} を約 5 kHz 上げるとシンクロトロン振動が anti-damping になり、 Δf_{rf} を約 2.5 kHz 下げるとベータトロン振動が anti-damping となるということがわかる。これは、逆に言えば、このくらいの範囲には少なくとも、加速周波数と revolution frequency (の整数倍) との差が入っている必要がある。このように damping time が変わると、次項でのべるようにエミッタンスも変化する。(第 4 章

でのべるように) ルミノシティを上げるためにはエミッタンスを大きくする必要があるが、このために上の性質を使うことも可能である。また容易にわかるように (大きな) C.O.D. がある場合にも、 D の値が大きくなり、振動が anti-damping になる可能性が大型リングではあるので、この意味でも C.O.D. correction は重要である。

では次にベータトロン振動の radiation damping の細かい議論をすることにしよう。その前にあとの項でも使う次の簡単なことがらに注意しよう。それはある量 A が ΔA だけ変化したとすると、 A^2 は次のようになるということである。

$$A^2 \rightarrow (A + \Delta A)^2 = A^2 + 2A \Delta A + (\Delta A)^2 \quad (3.46)$$

これの統計的平均をとると、

$$\langle (A + \Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle + 2 \langle A \Delta A \rangle + \langle (\Delta A)^2 \rangle \quad (3.47)$$

となる。今 ΔA の変化が Δt の時間内に起ったものと考えると、

$$\frac{\Delta \langle A^2 \rangle}{\Delta t} = 2 \left\langle \frac{A \Delta A}{\Delta t} \right\rangle + \left\langle \frac{(\Delta A)^2}{\Delta t} \right\rangle \quad (3.48)$$

となる。ここでもし ΔA の変化が時間的になめらかでないとする、右辺の第 2 項は Δt を小さくしても省略することができないことに注意しよう。そして、これが radiation excitation を引き起こすのであるがそれについては次の項でのべる。右辺の第 1 項でもし A と ΔA とが相関がないとすると、これは平均すると消えてしまう。そこでこの項を計算するのに、 A と ΔA の中で互いに相関のあるもののみをとってくればよいことがわかる。このことを念頭において以下でベータトロン radiation damping を計算してみよう。上の A^2 に相当するものとして、エミッタンスを考える。

$$\epsilon = r x_\beta^2 + 2\alpha x_\beta x'_\beta + \beta x_\beta'^2$$

この加速空洞による変化はわかっているので、他の場所 (bending magnet の場所) で光を出すときの変化を求めてみよう。図 3.1 から光を出す前後で位置と傾き (x, x') は変化しないことがわかるが、(x_β, x'_β) は次のように変化する (前のときはそれは無視した)。

$$0 = \Delta x = \Delta x_\beta + \Delta x_\epsilon = \Delta x_\beta + \eta \Delta E / E$$

$$0 = \Delta x' = \Delta x_{\beta}' + \Delta x_{\epsilon}' = \Delta x_{\beta}' + \eta' \Delta E / E \quad (3.49)$$

つまり,

$$\Delta x_{\beta} = -\eta \Delta E / E \quad (3.50)$$

$$\Delta x_{\beta}' = -\eta' \Delta E / E$$

のように変化する。ここで ΔE は光を出すことによるエネルギー変化である。

そして ΔE は

$$\Delta E = -\frac{P_r}{c} \Delta \ell \quad \Delta \ell = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) ds \quad (3.51)$$

と与えられる。これより $2 A \Delta A$ に相当するものは

$$\frac{2 P_r}{E_0} \left(r x_{\beta} \eta + \alpha x_{\beta} \eta' + \alpha \eta x_{\beta}' + \beta x_{\beta}' \eta' \right) \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{ds}{c} \quad (3.52)$$

となる。ここで、 $x = x_{\beta} + x_{\epsilon}$ であり,

$$P_r = P_{r0} + 2 \frac{P_{r0}}{B_0} \frac{dB}{dx} (x_{\beta} + x_{\epsilon}) \quad (3.53)$$

であることを使うと、(3.52) の平均は (これを $2 \langle A \Delta A \rangle$ とおこう)

$$\begin{aligned} 2 \langle A \Delta A \rangle &= \frac{2 P_{r0} ds}{c E_0} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{2 dB}{B_0 dx} \right) \left[r \eta \langle x_{\beta}^2 \rangle \right. \\ &\quad + \alpha \eta' \langle x_{\beta}^2 \rangle + \alpha \eta \langle x_{\beta} x_{\beta}' \rangle \\ &\quad \left. + \beta \eta' \langle x_{\beta} x_{\beta}' \rangle \right] + R \quad (3.54) \end{aligned}$$

となる。R は $\langle x_{\beta}^3 \rangle$ のような項を含む。

ここで第2章の (2.57) 式を使うと、

$$\langle x_{\beta}^2 \rangle = \langle \epsilon \rangle \beta / 2 \quad (3.55)$$

$$\langle x_{\beta} x_{\beta}' \rangle = -\langle \epsilon \rangle \alpha / 2$$

となり、またRの項は消えることがわかる。

これを (3.54) に代入すると、

$$2 \langle A \Delta A \rangle = \frac{P_{r0} ds}{c E_0} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{2}{B_0} \frac{dB}{dx} \right) \langle \epsilon \rangle \eta \quad (3.56)$$

となる。これをリング一周について積分すると、

$$\begin{aligned} 2 \langle A \Delta A \rangle &= \frac{U_0}{E_0} \int \frac{\eta}{\rho_0^2} \left(\frac{1}{\rho_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{B_0} \frac{dB}{dx} \right) ds \langle \epsilon \rangle / \\ &\quad \int \frac{ds}{\rho^2} = \frac{U_0}{E_0} D \langle \epsilon \rangle \quad (3.57) \end{aligned}$$

となる。これに加速空洞による減衰を加えると、エミッタンスは

$$\frac{d \langle \epsilon \rangle}{dt} = -\frac{U_0}{E_0 T} (1 - D) \langle \epsilon \rangle \quad (3.58)$$

なる方程式に従うことがわかり、エミッタンスの damping time τ は

$$\tau = \frac{E_0 T}{U_0 (1 - D)} \quad (3.59)$$

と与えられる。また、ビームサイズの damping time, すなわち、ベータatron振動の damping time τ_x は

$$\tau_x = \frac{2 E_0 T}{J_x U_0}, \quad J_x = 1 - D \quad (3.60)$$

となる。ここで上の計算は水平方向のベータatron振動について行なったので添字xを付けた。通常たて方向の dispersion 関数は (design の段階では) ゼロであるので、

$$\tau_y = \frac{2 E_0 T}{J_y U_0} \quad J_y = 1 \quad (3.61)$$

となる。

最後にシンクロtron振動の場合の A^2 としてどんなものがとれるかを示そう。まずシンクロtron振動は

$$\Delta E = a \cos(\Omega_s t + \delta) \quad (3.62)$$

であるので、 A^2 として a^2 を考えると、

$$A^2 = (\Delta E)^2 + \frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{d \Delta E}{dt} \right)^2 \quad (3.63)$$

と与えられるが、この式の右辺の第2項は、

$$\frac{d\Delta E}{dt} \propto \Delta \tau$$

であるので(注. $\Delta \tau$ は第2章のシンクロトロン振動の時間 $\Delta \tau$ である), 放射光を出すことによっては変化しない。このことから A^2 として (3.63) をとると, ベータトロンの damping と同様に,

$$\frac{d\langle A^2 \rangle}{dt} = -\frac{2\langle A^2 \rangle}{\tau_\epsilon}$$

となることがわかる。

3.3 放射励起 (radiation excitation)

シンクロトロン振動もベータトロンの場合も,

前項の (3.48) 式の $2\langle \frac{A \Delta A}{\Delta t} \rangle$ に相当するものが

$$-2\frac{\langle A^2 \rangle}{\tau}$$

という形になることがわかっているので, (3.48) を微分形でかくと

$$\frac{d}{dt}\langle A^2 \rangle = -2\frac{\langle A^2 \rangle}{\tau} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \frac{(\Delta A)^2}{\Delta t} \rangle \quad (3.64)$$

となる。右辺の第2項を形式的に

$$\langle \frac{(\Delta A)^2}{\Delta t} \rangle$$

とかくことにすると, 平衡状態では, (3.64) の左辺がゼロであるので, 平衡状態の $\langle A^2 \rangle$ は

$$\langle A^2 \rangle = \frac{\tau}{2} \langle \frac{(\Delta A)^2}{\Delta t} \rangle \quad (3.65)$$

と与えられる。では初めにシンクロトロン振動の場合に (3.65) の値を見積ってみよう。この項では, bending magnet の曲率 $1/\rho$ がすべての bending magnet に共通であると仮定する。これを一般に拡張することは容易であるが, ここでは省略する。

まず一個の光子のエネルギーを u とすると

$$(\Delta A)^2 = (\Delta E)^2 = u^2$$

となる。これから単位時間あたりに放出されるこの光子の数を N とし, リング全周で平均すると

$$\langle \frac{(\Delta A)^2}{\Delta t} \rangle = \overline{\langle N u^2 \rangle}$$

この値は Appendix B より,

$$\overline{\langle N u^2 \rangle} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{U_0}{T} u_c \approx 1.323 \frac{U_0}{T} u_c \quad (3.66)$$

と与えられる。ここで u_c は critical energy であり

$$u_c = \frac{3}{2} \frac{\hbar c}{\rho} r^3 = \frac{3}{2} \frac{\hbar E_0}{\rho m c} r^2 \quad (3.67)$$

である。

(3.66) のおおよその値は次のようにしても出すことができる。

まず光子のエネルギー u は u_c のオーダーであると考えられるので,

$$u \sim u_c$$

となり, また単位時間に放出される光子(エネルギーのオーダーが u_c の光子)の数は P_r が単位時間に放出される放射光のエネルギーであるので

$$N \sim P_r / u_c$$

と考えられる。これから

$$\overline{\langle N u^2 \rangle} \sim \frac{P_r u_c^2}{u_c} = \frac{U_0}{T_0} u_c$$

となり, 1に近い数因子を除けば (3.66) と一致する。さて, 以上より,

$$\tau_\epsilon = \frac{2 E_0 T}{J_\epsilon U_0} \quad (3.68)$$

であったので

$$\langle A^2 \rangle = \frac{E_0}{J_\epsilon} u_c \cdot \frac{55}{24\sqrt{3}} \quad (3.69)$$

となる。ここで

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = \sigma_\epsilon^2 \quad (3.70)$$

とおくと,

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{1}{2} \langle A^2 \rangle \quad (3.71)$$

であるので,

$$\left(\frac{\sigma_\epsilon}{E}\right)^2 = \frac{r^2}{J_\epsilon \rho} \cdot \frac{K}{m c} \cdot \frac{55}{32\sqrt{3}} \quad (3.72)$$

と与えられる。ここで $J_\epsilon = 2$ とおくと、

$$\left(\frac{\sigma_\epsilon}{E}\right)^2 \approx 0.5 \frac{r^2}{\rho} \cdot \frac{K}{m c} \quad (3.73)$$

これはまた

$$\frac{\sigma_\epsilon}{E} \approx 8.566 \times 10^{-4} E [\text{GeV}] / \sqrt{\rho [\text{m}]} \quad (3.74)$$

ともかける。

example

P F-ring の場合 $E = 2.5 \text{ GeV}$ $\rho \approx 8.66 \text{ m}$ とおくと $\sigma_\epsilon/E \approx 0.7 \times 10^{-3}$ となり、トリスタンのMRで $E = 30 \text{ GeV}$ $\rho \approx 250 \text{ m}$ とすると $\sigma_\epsilon/E \approx 1.6 \times 10^{-3}$ となる。

水平方向のベータatron振動の場合の $(\Delta A)^2$ は前項をみればただちに、光子のエネルギーを u として、

$$(\Delta A)^2 = \frac{1}{\beta} (\eta^2 + (\beta \eta' + \alpha \eta)^2) \left(\frac{u}{E}\right)^2 \quad (3.75)$$

と与えられることがわかる。これから

$$\left\langle \frac{(dA)^2}{dt} \right\rangle = \frac{\langle H N u^2 \rangle}{E_0^2} \quad (3.76)$$

となる。ここで H は

$$H = \frac{1}{\beta} (\eta^2 + (\beta \eta' + \alpha \eta)^2)$$

であり、 η を x_β と思うと H はベータatron振動のエミッタンスである。しかし、実際は H はベータatron振動のエミッタンスではないので不変ではなく、場所の関数である。ところで光子の放出される確率は（光が bending magnet の中で発生するというだけで）、場所の関数ではない。そこで (3.76) の右辺の平均は、

$$\langle H N u^2 \rangle = \overline{\langle H \rangle \langle N u^2 \rangle} \quad (3.77)$$

と分離される（確率の独立事象）。ただしここで H の平均は bending magnet の中でのみ行なう必要があり、

$$\overline{\langle H \rangle} = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\text{BM}} H ds \quad (3.78)$$

となる（以下では H の上つきの棒はとる）。 $2\pi\rho$ は全 bending magnet の長さで積分は bending magnet について行なうものとする。以上よりシンクロトロン振動の場合と同様、 $\langle A^2 \rangle$ の平衡状態の値、すなわちエミッタンス $\langle \epsilon \rangle$ は、

$$\langle A^2 \rangle = \langle \epsilon \rangle = \frac{r_x}{2} \frac{\langle H \rangle}{E_0^2} \overline{\langle N u^2 \rangle} \quad (3.79)$$

となる。ここで前項の結果、

$$\langle x_\beta^2 \rangle = \langle \epsilon \rangle \beta / 2 \quad (3.80)$$

を使うと、 $\langle x_\beta^2 \rangle = \sigma_{x\beta}^2$ とおいて、

$$\sigma_{x\beta}^2 / \beta = \frac{r_x}{4} \frac{\langle H \rangle}{E_0^2} \overline{\langle N u^2 \rangle} \quad (3.81)$$

となるが、

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{r_\epsilon}{4} \overline{\langle N u^2 \rangle} \quad (3.82)$$

とかけることを使うと、

$$\sigma_{x\beta}^2 / \beta = \frac{J_\epsilon}{J_x} \langle H \rangle \left(\frac{\sigma_\epsilon}{E}\right)^2 \quad (3.83)$$

となる。電子ストレージリングの場合、通常この式の左辺を平衡状態のエミッタンスという。（注。上で出てきた $\langle \epsilon \rangle$ とこのエミッタンスでは因子2だけちがう）

さて、次に $\langle H \rangle$ の大きさを見積ってみよう。第2章の次の結果、

$$\eta \approx \beta^{1/2} \left(\frac{R}{\nu^3}\right)^{1/2} \quad (3.84)$$

を使うと、

$$\beta \eta' + \alpha \eta \approx 0 \quad (3.85)$$

となり、

$$\langle H \rangle \approx \frac{R}{\nu^3} \quad (3.86)$$

となる。これより、

$$\sigma_{x\beta}^2/\beta \approx \frac{J_\epsilon}{J_x} \frac{R}{\nu^3} \left(\frac{\sigma_\epsilon}{E}\right)^2 \quad (3.87)$$

となる。ここで $J_x \approx 1$ とおき、 (σ_ϵ/E) の値を代入すると

$$\sigma_{x\beta}^2/\beta \approx \frac{R}{\rho \nu_x^3} \tau^2 \cdot \frac{\hbar}{mc} \cdot \frac{55}{32\sqrt{3}} \quad (3.88)$$

となる。これはまた

$$\sigma_{x\beta}^2/\beta \text{ [mrad]} \approx 1.467 \frac{R}{\rho \nu_x^3} E^2 \text{ [GeV]} \quad (3.89)$$

ともかける。

example

トリスタンのMRの場合、長い直線部があるので第2章の η の近似式で行なったようにすると、(3.89)のRと ν_x として、曲線部の値をとる必要があることがわかる。そこで、

$$R \approx 350 \text{ m}, \quad \rho \approx 250 \text{ m}, \quad \nu_x \approx 24, \\ E = 30 \text{ GeV}$$

とすると、 $\sigma_{x\beta}^2/\beta \sim 0.134 \text{ mrad}$ となり、正確な値 0.179 mrad とあまりあっていないが、ビームサイズにすれば15%位の精度であっている。また $\nu_x \approx 24$ は曲線部のベータatron振動数であるが、この曲線部から直線部に移るところで η がだんだん小さくなっていることを考慮して、 $\nu_x \approx 22$ ぐらいにとると、 $\sigma_{x\beta}^2/\beta \sim 0.17$ ぐらいになり、正確な値にかなり近くなる。

さて、では実際のビームサイズはどうなるであろうか。

$$x = x_\beta + \eta \Delta p/p \quad (3.90)$$

であるので、 x^2 の統計的平均をとると、

$$\langle x^2 \rangle = \langle x_\beta^2 \rangle + \langle x_\beta \eta \Delta p/p \rangle + \eta^2 \langle \Delta p/p \rangle^2$$

となるが、第2項の x_β と $\Delta p/p$ は互いに相関がないので消える。よって $\langle x^2 \rangle = \sigma_x^2$ とおくと、

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x\beta}^2 + \eta^2 \left(\frac{\sigma_\epsilon}{E}\right)^2 \quad (3.91)$$

と与えられる。ここで、

$$\eta^2 \approx \beta \cdot \frac{R}{\nu^3} \quad (3.92)$$

と近似すると、

$$\eta^2 \left(\frac{\sigma_\epsilon}{E}\right)^2 \approx \frac{\sigma_{x\beta}^2}{2} \quad (3.93)$$

となる。これより、

$$\sigma_x^2 \approx \frac{3}{2} \sigma_{x\beta}^2 \quad (3.94)$$

または、

$$\sigma_x \approx 1.2 \sigma_{x\beta} \quad (3.95)$$

となる。(ただし、これはたとえばトリスタンのMRの曲線部のみに適用できるものである)。

今までたて方向のエミッタンス、またはビームサイズについて何ものべてこなかったが、前の議論から明らかのように(シンクロtron放射の光は $1/\tau$ 程度に広がっているという非常に細かい話を別にすれば)、たて方向に dispersion 関数がないかぎりたて方向のエミッタンスは設計上はゼロである。しかし実際にはたて方向のビームサイズは有限である。これが生じる主な要因は次の2つである。

- ① 水平方向とたて方向のベータatron振動の coupling
- ② 磁場の error から生じるたて方向の dispersion 関数

①の要因の中には、difference resonance を意図的に起こして、水平方向のエミッタンス ϵ_x とたて方向のエミッタンス ϵ_y の配分を制御するものも含まれる。この場合には、couplingがない場合のエミッタンスを ϵ_{x0} 、 ϵ_{y0} とすると、 ϵ_{y0} は通常小さいのでゼロと考えることができるので、

$$\epsilon_x + \epsilon_y = \text{const.} = \epsilon_{x0} \quad (3.96)$$

となる。ここで ϵ_{x0} は(3.83)で与えられるものである。そこで、

$$\kappa = \epsilon_y / \epsilon_x$$

とおくと、

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_{x0}}{1 + \kappa}, \quad \epsilon_y = \frac{\kappa \epsilon_{x0}}{1 + \kappa} \quad (3.97)$$

となる。そして κ のことを coupling constant というのであった (第2章参照)。(注: $\kappa = k^2$ として, k を coupling constant という場合もある)

②の要因があると2つのことがたて方向の beam size に寄与する。一つは水平方向のエミッタンスを生じるのと同じことが起きる。もう一つは $\eta_y \Delta p/p$ による寄与である。

3.4 lifetime

前項で示したように, 電子のベータトロン振動とシンクロトロン振動は確率的なものである (ただし, 比較的短い時間では調和振動子的振動をしている) ので, 容易に想像できるように, ある確率では大きな振幅をもつことができる。そうすると大きなベータトロン振幅をもつ電子は真空チェンバーにあってしまったり, または (磁場分布の悪い所等の) 狭い aperture の所から失なわれたりしてしまう可能性がある (図 3.2)。また電子のシンクロトロン振動が大きくなると rf-bucket からこぼれてしまったりすることになる (図 3.3)。

このようにシンクロトロン放射が光子という形で放出されるために, ある確率で電子ビームの中の電子がだんだんへってくる。このことから決まってくる電子 (ビーム) の寿命を quantum lifetime という。いま一個の電子が単位時間にある確率 P で死んでしまう (つまりチェンバーにあたりたりまたは rf のバケツからこぼれてしまう) とすると, ビーム中に N 個の電子が存在する場合には単位時間に ($N \gg 1$ としよう) PN 個失なわれると考えられる。このことから

$$\frac{dN}{dt} = -PN$$

となるが, これを

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau_q} \quad (3.98)$$

という形にかくと, その解は

$$N = N_0 e^{-t/\tau_q} \quad (3.99)$$

と与えられる。そしてこの τ_q をもって通常 quantum lifetime という。つまり, 時間が τ_q だけたつと, 電子の数 (または電流) が $1/e$ になる。

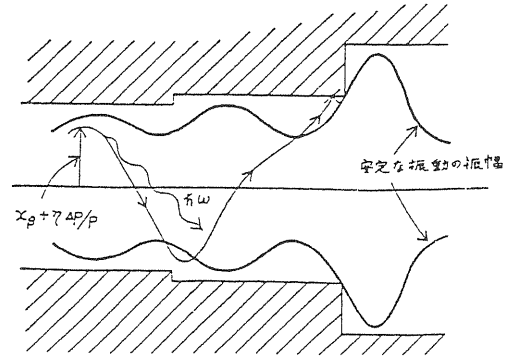


図 3-2.

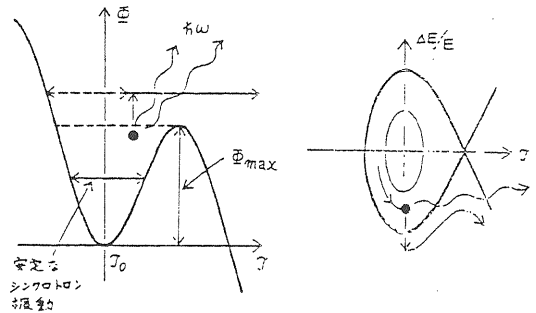


図 3-3.

さて, 前項では振幅の確率的二乗平均を求めたが, 寿命を求めるためには振幅の確率的分布を (境界条件等ちゃんと考えて) 求める必要があるが, ここではそれを以下のように荒く見積ることしよう。そして実際にもそれで十分である。それは安定かつ十分な寿命を得ようとすればある程度余裕をみるのが普通であり, あとでわかるようにすこし余裕をとると, 寿命が急激に増大するからである。

ところで, ある確率に従うある量 x の次の平均

$$X = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N) \quad (3.100)$$

は x_i の確率分布のいかんにかかわらず, X はガウス分布になる (中心極限定理) ことはよく知られている。ここではのべないが (詳しい話は S. Chandrasekhar, Rev. Mod. Phys. Vol. 15, No 1, 1943), 上と同様に (減衰力のある) 調和振動子にある確率的な外力が働く場合にもその振幅 x および速度がガウス分布になり, 平衡状態では

$$f(x, v) dx dv \propto e^{-\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right)} dx dv \quad (3.101)$$

となることが知られている。これを極座標

$$r^2 = \frac{m v^2}{2} + \frac{k x^2}{2}$$

$$\frac{k x^2}{2} = r^2 \cos^2 \theta, \quad \frac{m v^2}{2} = r^2 \sin^2 \theta$$

で表わせば

$$f(r^2) r dr d\theta \propto e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} r dr d\theta$$

となり、 r^2 が調和振動子のエネルギー E であることを使うと、

$$f(E) dE \propto e^{-\frac{E}{\sigma^2}} dE$$

となる。これは統計力学におけるエネルギー分布 $f(E)$

$$f(E) \propto e^{-E/\langle E \rangle} \quad (3.102)$$

と同形である。そしてこの平衡状態の分布は統計力学の「無差別平等主義」に基づけば次のようにして出すことができる。(ただしここでは詳しくはのべない)。

まず(電子という)互いに独立な(統計力学ではほぼ独立であるとするのが普通である)振動子を N 個もってきた(カノニカル分布)とし、ある振動子のエネルギーを E_i とすると、前項で示したように $N \gg 1$ のもとで

$$\sum E_i / N = \langle A^2 \rangle = \text{const.}$$

となる。そして振動子のエネルギーをある十分小さな単位 ϵ_0 で測ることにすると、全エネルギーはその何倍 (M とする) かである。次に統計力学の「平等主義」を使って、ある振動子が $n\epsilon_0$ のエネルギーをもつ確率を $\langle A^2 \rangle$ 一定の条件のもとで求めると、その確率 P

(n) は

$$P(n) \propto e^{-\frac{n\epsilon_0}{\theta}}$$

となる。

このようにエネルギーの分布が、(3.102) のようになっているとすると、前項ではこのエネルギーに相当するものが A^2 であつたので、

$$f(A^2) dA^2 = C \exp[-A^2/\langle E \rangle] dA^2 \quad (3.103)$$

となることがわかる。ここで C はある定数である。そして上のことから

$$\langle E \rangle = \langle A^2 \rangle \quad (3.104)$$

であることがわかるが、これは $f(A^2)$ の関数形が、(3.103) のようになっていることがわかっていれば次のようにして導びくことができる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(A^2) dA^2 &= C \int_0^1 \exp[-A^2/\langle E \rangle] dA^2 = 1 \\ \int_0^1 A^2 f(A^2) dA^2 &= C \int_0^1 A^2 \exp[-A^2/\langle E \rangle] dA^2 = \langle A^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.105)$$

より、

$$\begin{aligned} C \langle E \rangle &= 1 \\ C \langle E \rangle^2 &= \langle A^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.106)$$

となつて、

$$\langle E \rangle = \langle A^2 \rangle, \quad C = 1/\langle A^2 \rangle \quad (3.107)$$

となることがわかる。以上より、

$$f(A^2) dA^2 = \frac{1}{\langle A^2 \rangle} \exp[-A^2/\langle A^2 \rangle] dA^2 \quad (3.108)$$

となる。そして N 個の電子がビーム中に存在する場合には、

$$f(A^2) dA^2 = \frac{N}{\langle A^2 \rangle} \exp[-A^2/\langle A^2 \rangle] dA^2 \quad (3.109)$$

となる。さて、 A^2 と $\langle A^2 \rangle$ はシンクロトロン振動の場合には、

$$A^2 = 2(\Delta E)^2, \quad \langle A^2 \rangle = 2\sigma_e^2 \quad (3.110)$$

であり、ベータトロン振動の場合には、

$$A^2 = \varepsilon = \hat{x}^2 / \beta, \quad \langle A^2 \rangle = \frac{2 \sigma_x^2 \beta}{\beta} \quad (3.111)$$

であった。ここで $\hat{x} = \sqrt{\varepsilon \beta}$ である。

今、大振幅の電子に着目すると、その電子の運動は主に damping によって決まっていると考えられる。それは前項の方程式

$$\frac{d \langle A^2 \rangle}{d t} = - \frac{2 \langle A^2 \rangle}{\tau} + \left\langle \frac{d A^2}{d t} \right\rangle$$

で右辺の第二項は $\langle A^2 \rangle$ によらない量であり、第一項は $\langle A^2 \rangle$ に比例する項であることからわかる。このことから大振幅の電子の運動は

$$\frac{d A^2}{d t} = - \frac{2 A^2}{\tau} \quad (3.112)$$

に従っていると考えることができる。これより、ある大振幅 A^2 のところに着目していると、内側に（つまり A^2 の小さい方に）向っている電子の流れ J_{in} は

$$J_{in} = + \frac{2 A^2}{\tau} f(A^2) \quad (3.113)$$

となることがわかる。そこで次のトリックを使う。それは平衡状態では、 A^2 の所で内側に向う流れ J_{in} と外側に向う流れ J_{out} が等しく、

$$J_{in} = J_{out} \quad (3.114)$$

であるはずであるということである。そして、 A^2 として最大許される値、つまり、それ以上大きいと電子が死んでしまう値を \hat{A}^2 とすると、そこでの J_{out}

$$\hat{J}_{out} = \frac{2 \hat{A}^2}{\tau} f(\hat{A}^2) \quad (3.115)$$

が失われる電子の流れ、つまり単位時間に何個電子が死んでしまうかを表わしていると考えることができる。しかし実際の分布は \hat{A}^2 の付近ではゼロであるはずであるので、これもトリックまたは概算である（図 3.4 をみよ）。

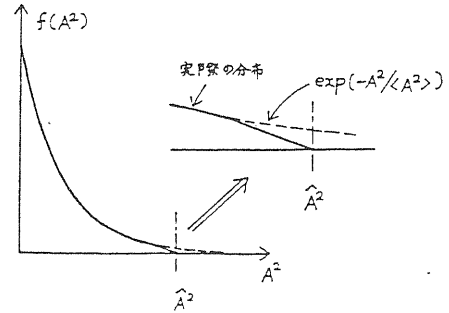


図 3 - 4.

さして以上より

$$\frac{d N}{d t} = - \hat{J}_{out} = \frac{2 \hat{A}^2 N}{\tau \langle A^2 \rangle} \exp \left[- \hat{A}^2 / \langle A^2 \rangle \right] \quad (3.116)$$

となるので、quantum lifetime τ_q が

$$\tau_q = \frac{\tau}{2} \frac{\langle A^2 \rangle}{\hat{A}^2} \exp \left[\hat{A}^2 / \langle A^2 \rangle \right] \quad (3.117)$$

または、

$$\tau_q = \frac{\tau}{2} \frac{e^\xi}{\xi}, \quad \xi = \hat{A}^2 / \langle A^2 \rangle \quad (3.118)$$

と与えられる。

\hat{A} はシンクロトロン振動の場合許される最大の ΔE であるので、それは図 3.3 の ϕ_{max} に相当する（第 2 章を参照）bucket height ΔE_{max} となり、シンクロトロン振動の lifetime は

$$\tau_q = \frac{\tau_\varepsilon}{2} \frac{e^{\xi_\varepsilon}}{\xi_\varepsilon}, \quad \xi_\varepsilon = \frac{\Delta E_{max}^2}{2 \sigma_\varepsilon^2} \quad (3.119)$$

となる。また ξ_ε は

$$\xi_\varepsilon = \frac{1}{2 \pi \alpha h} \left(\frac{U_0}{E} \right) F(q) / \left(\sigma_\varepsilon / E \right)^2 \quad (3.120)$$

ともかける。ベータトロン振動の場合には、次の注意が必要である。

A^2 は \hat{x}^2 / β であったので、許される最大の A は単に真空チャンバーの一番狭い所で決まるのではなく、 β 関数も含めて考える必要がある（図 3.2 をみよ）。そして ε を変数として $\sqrt{\varepsilon \beta}$ の図をリング一周について描き、許される最大の $\sqrt{\varepsilon \beta}$ をもって \hat{x}_{max} として

$$\widehat{A}^2 = \widehat{x}_{\max}^2 / \beta = \epsilon_{\max} \quad (3.121)$$

とする必要がある。つまり、 \widehat{A} を大きくするためには、 β の値が大きい所はチェンバーを大きくしなければならないが、一方 β の値が小さい所はそれほど大きくしなくても \widehat{A} は小さくならない。ところがこのようにして決めた \widehat{A} では実際は不十分である。それは、ビームサイズが x_β と x_ϵ という二つの量で決まっているからである。そこで通常は、

$$\xi = \widehat{A}^2 / \langle A^2 \rangle = \frac{\widehat{x}_{\max}^2}{2\sigma_{x\beta}^2} \quad (3.122)$$

で $\sigma_{x\beta}^2$ を $\sigma_x^2 (= \sigma_{x\beta}^2 + \eta^2 (\Delta p/p)^2)$ におきかえて、(水平方向の) ベータatron振動によるlifetimeを

$$\tau_{\beta x} = \frac{\tau_x}{2} \frac{e^{\xi_x}}{\xi_x} \quad \xi_x = \frac{\widehat{x}_{\max}^2}{2\sigma_x^2} \quad (3.123)$$

とする。たて方向のベータatron振動によるlifetimeは普通、安全をとって、たて方向のエミッタンスが最大になる状態を仮定して計算する。そのような状態は($\epsilon_{y0} = 0$ とすると)、たて方向のエミッタンスがよこ方向のエミッタンスの半分になるときでfull couplingの状態と呼ばれている。それはcoupling constantが $\kappa = 1$ のときで、

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_{x0}}{1 + \kappa} = \frac{\epsilon_{x0}}{2} \quad (3.124)$$

$$\epsilon_y = \frac{\kappa \epsilon_{x0}}{1 + \kappa} = \frac{\epsilon_{x0}}{2}$$

のときである。そしてそのときのビームサイズ σ_v をとって、lifetimeを

$$\tau_{\beta y} = \frac{\tau_y}{2} \frac{e^{\xi_y}}{\xi_y} \quad \xi_y = \frac{\widehat{y}_{\max}^2}{2\sigma_y^2} \quad (3.125)$$

とする。

さて、シンクロtron振動の場合も、ベータatron振動の場合も、 ξ が e^ξ という形でlifetimeの式に入っているため(十分lifetimeが大きいとき)、 ξ がほんのすこし大きくなるだけでlifetimeは急に長くなることがわかる。

example

lifetime τ は

$$\begin{aligned} \log_{10} \tau &= \xi \log_{10} e - \log_{10} \xi + \log_{10} \tau - \log_{10} 2 \\ &= 0.434 \xi - \log_{10} \xi + \log_{10} \tau - 0.301 \end{aligned}$$

となる。PF-ringの場合、 $\tau_e \approx 4$ m sec であるので $\Delta E_{\max} = 8\sigma_e$ とすると $\xi = 32 \log_{10} \tau$ [sec] ~ 9.7 となり十分のlifetimeがあることがわかる。

ベータatron振動の場合も $8\sigma_x$ ぐらいあれば計算上は十分であるが、普通は余裕をとって $10\sigma_x$ を考え、さらにC.O.D.の評価(ある程度までcorrectionできるとする場合もある)を加えてapertureを決める。(注: これは片幅であるのでapertureの全幅としてはこの2倍必要である)

付記 (平衡状態の) バンチの長さ

$$\frac{d\Delta\tau}{dt} = i\Omega\Delta\tau = -\alpha \frac{\Delta E}{E}$$

より平衡状態の $\langle (\Delta\tau)^2 \rangle = \sigma_\tau^2$ は

$$\sigma_\tau^2 = \left(\frac{\alpha}{\Omega}\right)^2 \left(\frac{\sigma_E}{E}\right)^2$$

と与えられる。 τ は時間の進みを表すものであ

たので、 σ_τ に相当するバンチの長さ σ_ℓ は

$$\sigma_\ell = c\sigma_\tau = \frac{c\alpha}{\Omega} \frac{\sigma_E}{E} = \frac{c\alpha}{2\pi\nu_s/T} \frac{\sigma_E}{E}$$

となり、これはまた

$$\sigma_\ell = \frac{R\alpha}{v_s} \frac{\sigma_E}{E}$$

とかける。

PF-ringの場合、

$$R \sim 30 \text{ m}, \sigma_E/E \sim 0.7 \times 10^{-3}$$

$\alpha \sim 0.04$, $v_s \sim 0.04$ を使うと、

$$\sigma_\ell \sim 2 \text{ cm}$$

となる。

第四章 衝突型リング (colliding beam machine)

4.1 序

この章では、高エネルギー実験用の衝突型リングについて概説する。しかしここでは電子・陽電子衝突型リングのみを取り上げて話をすることにする。衝突型リングとは互いに反対方向に回わる粒子（電子と陽電子）を正面衝突させて、止まっているままと（固定ターゲット、静止している粒子）に加速された粒子をぶつけるより、高い反応エネルギーを得ようとするものである。しかしながら容易に想像できるように、固定ターゲットの中の粒子より、リングを回わっている粒子の数が少ないので（実際は粒子の密度の高低、さらに単位時間に何回ぶつけようとするかということと比較しなければいけないが）、1秒間にどのくらいぶつかるかということが関心事となってくる。この目安を与えるものがルミノシティ L とよばれる量である。これは次のように定義される。

$$R = L \sigma \quad (4.1)$$

ここで σ はまとの大きさで面積の次元 (cm^2) をもっており、また R は単位時間に何回ままとぶつかるを表す量で event rate といわれ、($1/\text{sec}$) の次元をもつ。これからルミノシティ L の次元は

$$[L] = 1 / \text{cm}^2 \cdot \text{sec} \quad (4.2)$$

となることがわかる（問 これを示せ）。 σ はまた反応の断面積 (cross section) と呼ばれるものであるが、これは高尚な高エネルギー物理学の興味の対象であり、加速器には直接は関係のない量である。しかしながら(4.1)の意味を知っていても悪くはない（と筆者は思う）。それは、1つの粒子を100%の精度でままとに当たることが高エネルギー実験（加速器も(?)）では全然できないどころか、へたな鉄砲も数打ちゃ当たるといふ高エネルギー実験の大原理(?)を使って(4.1)がでてきたということである。

さて、たとえば $\sigma \approx 10^{-34} \text{cm}^2$ とし、 $R \approx 10^2 / \text{day}$ が要求されるとすると、 L の値として、

$$L \sim 10^{31} \text{cm}^2 / \text{sec}$$

という天文学的数値が必要となる。これは非常識な数値である（何も高エネルギー実験家が非常識という意

味ではない）。そして高エネルギー実験(家)の加速器への関心事はこのルミノシティとエネルギーのたった二つのみである（と思う）。

さて、なぜルミノシティの数値が非常識かという、加速器に関する他の数値は（日常の次元 MKSA, cgs ガウス等を使うと）すべて常識の範囲に入るものばかりであるからである。たとえば、エネルギーにしても $\sim 10^{10} \text{eV}$ とかの大きさであるが（ 1eV は 1V をかけたとき電子の得るエネルギーであるので日常的単位と考えられる）、 10^{10} とはたった 100 億であり、日常見聞きする数値である（日本国の予算、または大蔵官僚のあつかう数値からしたら、ずっと小さい）。なのに、高エネルギー実験(家)はルミノシティについては（そのうちエネルギーについてもであろうが）加速器に対して非常識なまたは高尚な数値を要求している。

さて、この章の以下の構成は、初めにルミノシティを加速器のパラメータで表わすことをし、次にビームとビームが衝突するときに引き起こされるビームへの影響を考え、最後にこの非常識な数値の大きさにはある限界というものがあるということを説明する。

（問 仮に 1.5V の乾電池をいくら直列につないでもその数だけの電圧が出るものとしよう。30 GeV の電子を得るには、何個乾電池が必要か。また1個の乾電池の値段を 100 円とすると、トリスタン計画は乾電池より安いことを示せ）

さて、最後になぜ正面衝突が必要なのかを示そう。序論でのべた式

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

は一粒子の式であったが、これはまた粒子の集団からなる系にも適用でき、

$$E^2 - P^2 c^2 = M^2 c^4 = s \quad (4.3)$$

となる。ここで E , P は系のもつ全エネルギー、全運動量であり、 M は静止座標系での質量であるが、これは単なる粒子の静質量の和ではなく、系が全体として止まっている座標系からみた、系のエネルギーを c^2 で割ったものであり、粒子がその系内で運動している場合には静止質量より大きくなる。さて電子・陽電子正面衝突の場合、それぞれのエネルギー、運動量を E_1 , p_1 , E_2 , p_2 とすると、

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0, \quad E_1 = E_2$$

であるので、

$$s = M^2 c^4 = (E_1 + E_2)^2 = 4 E_1^2$$

となり、これから

$$\sqrt{s} = M c^2 = 2 E_1 \quad (4.4)$$

となる。 $\mathbf{p} = 0$ であるから、この座標系つまり実験室系は静止系(重心系)である。しかし通常は $r \gg 1$ であるからこの質量は単なる電子・陽電子の質量を加えたよりはるかに大きい。そのため大きな質量をもった粒子に変換できる可能性がある。一方、片方の粒子が止まっているとすると、(たとえば、 $E_2 = m c^2$, $\mathbf{p}_2 = 0$ とおくと)

$$\begin{aligned} s &= (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2 \\ &= E_1^2 - \mathbf{p}_1^2 c^2 + E_2^2 - \mathbf{p}_2^2 c^2 + 2(E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 c^2) \\ &= (m_1^2 + m_2^2) c^4 + 2 E_1 m_2 c^2 \end{aligned}$$

となり $r \gg 1$ とすると

$$\sqrt{s} = M c^2 = \sqrt{2 m_2 c^2 E_1} \quad (4.5)$$

となって、質量Mは上の場合に比べて、小さくなる。
(問 $m_1 = m_2 = 0.5 \text{ MeV}$, $E_1 = 30 \text{ GeV}$ として、両者を比較せよ)

4.2 ルミノシティ (luminosity)

ここではルミノシティを加速器のパラメータで表わすこととするが最初に図4.1に示すような簡単な場合を考えてみよう。図4.1で N_1 , N_2 は2つのビームに含まれる粒子数を表わす。またビームの断面の面積をAとして、ビームの密度は一様であると仮定する。

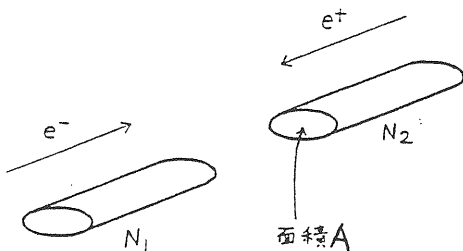


図4-1.

さて、まとの大きさ (cross section) を σ とすると、 e^+ ビームのまとの大きさは全部で $N_2 \sigma$ である (σ は非常に小さいので重なる心配はない)。よって単位面積あたりにまとがしめる割合は、

$$N_2 \sigma / A \quad (4.6)$$

で与えられる。これはまた、ねらいを定めないとんでくる電子がまとに衝突する確率である (図4.2をみよ)。

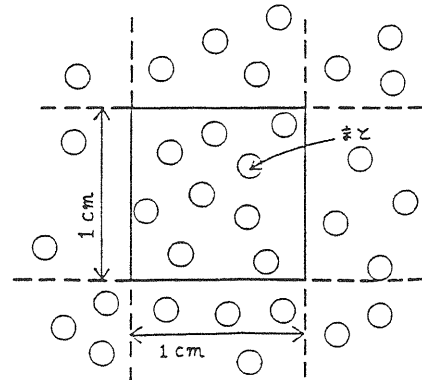


図4-2.

電子ビームは N_1 個の電子を含むので、この1回の衝突で、電子と陽電子が衝突する確率は、

$$\frac{N_1 N_2 \sigma}{A} \quad (4.7)$$

となる。ビームがリングを1周する周波数を f とすると、1秒間に図4.1の衝突を f 回行なうことになるので、1秒間に電子・陽電子衝突を起こす確率、つまり event rate R は

$$R = \frac{f N_1 N_2 \sigma}{A} \quad (4.8)$$

と与えられる。これからルミノシティ L は、

$$L = \frac{f N_1 N_2}{A} \quad (4.9)$$

となる。ここでルミノシティはリングのパラメータのみで決まり、高尚な高エネルギー物理の量は入っていないことに注意しよう。

さて、上の計算は一つのビームに一個のバンチがある場合であるが、一つのビームに k 個のバンチがある場合には、1秒間に、図4.1の衝突を kf 回やることになるので、

$$L = \frac{k f N_1 N_2}{A} \quad (4.10)$$

となる。ただし、 N_1 、 N_2 は一個のバンチ内の粒子の数である。(問 一つのビームに k 個のバンチがあると、リングの何ヶ所で衝突するか。またリングを4等分した場所で(図4.3をみよ)衝突させるためには、2つのビームのバンチをどのようにしてリング内で回したらよいか)

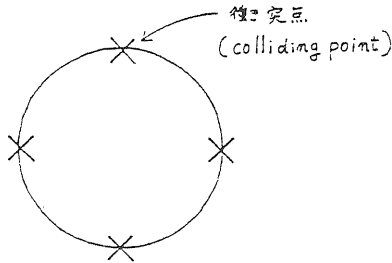


図 4 - 3.

(4.10) からルミノシティをあげるためには、 N_1 、 N_2 を大きくする、つまり電流を増す、また A を小さくすればよいように思われるが、実際はあとの項でのべるように、話はそれほど単純ではない。

さて、 A のオーダーは前章の結果を使えば

$$A \sim \sigma_x \sigma_y$$

となることがわかるが、通常衝突点では dispersion 関数 η がゼロ (これを dispersion less という) になっている (またはなるように加速器を作る)。トリスタンの lattice をみればわかるように加速空洞がおかれる長い直線部は dispersion less になっている (これはある種の resonance (synchro-beta resonance, $j\nu_x + k\nu_y + \ell\nu_s = n$) をさけるためである)。このためその真中にある衝突点でわざわざ η を生じさせる理由はないが、もし η があると上の A が大きくなり、ルミノシティが下がる (しかし、のちにのべるように A がベータトロン振動のビームサイズで決まっているときは A が大きい方がルミノシティが上がる場合がある)。また η があるとある種の resonance が起こりやすいということも知られている。そこで以下では dispersion less を仮定する。

さて、電子・陽電子ストレージリングでは、実際のビームはガウス分布しているので、図4.1とはちがっているが、この場合のルミノシティはどうなるであろうか。

この場合にも以下のように図4.1と同様に計算できる(図4.4をみよ)。図4.4で示した $dx dy$ の面積内の粒子の数 dN_2 は

$$dN_2 = \frac{N_2}{2\pi ab} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}\right) dx dy \quad (4.11)$$

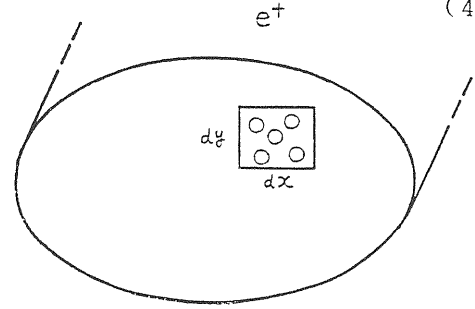


図 4 - 4.

である(前章の分布関数を dx' 、 dy' で積分してしまうとこれが出る)。ここで、

$$a = \sigma_x = \sigma_{x\beta}, \quad b = \sigma_y = \sigma_{y\beta}$$

とおいた。よってこの領域内のまとのしめる大きさは σdN_2 であり、 $dx dy$ の面積にしめる割合、つまり一個の電子が衝突する確率は

$$\frac{\sigma dN_2}{dx dy} \quad (4.12)$$

で与えられる。ところが、この領域に入ってくる電子の数 dN_1 は

$$dN_1 = \frac{N_1}{2\pi ab} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}\right) dx dy \quad (4.13)$$

で与えられるのでこの領域で衝突する割合 dR は

$$dR = \frac{f \sigma dN_1 dN_2}{dx dy} \quad (4.14)$$

である。これよりこの領域に対するルミノシティ dL は

$$\begin{aligned} dL &= \frac{f dN_1 dN_2}{dx dy} \\ &= \frac{f N_1 N_2}{4\pi^2 a^2 b^2} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy \end{aligned} \quad (4.15)$$

となり、全ルミノシティ L は

$$\begin{aligned} L &= \frac{f N_1 N_2}{4\pi^2 a^2 b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{b^2}} dy \\ &= \left(\frac{f N_1 N_2}{4\pi^2 a b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-X^2} dX \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Y^2} dY \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{f N_1 N_2}{4 \pi a b} \quad (4.16)$$

と与えられる (問 これを示せ)。これはまた

$$L = \frac{f N_1 N_2}{4 \pi \sigma_x \sigma_y} \quad (4.17)$$

とかける。

また、 k 個のバンチが一つのビームにある場合には、

$$L = \frac{k f N_1 N_2}{4 \pi \sigma_x \sigma_y} \quad (4.18)$$

である。このルミノシティは電流を使って表わすと、次のように表わすことができる。一つのビームの電流は、

$$I = qf = ekNf$$

であるので、

$$L = \frac{1}{4 \pi k f} \left(\frac{I_1 I_2}{e^2} \right) \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4.19)$$

となる。また衝突点の β 関数を β_x^* 、 β_y^* とすると、

$$L = \frac{1}{4 \pi k f} \left(\frac{I_1 I_2}{e^2} \right) \frac{1}{\sqrt{\beta_x^* \beta_y^*} \sqrt{\epsilon_x \epsilon_y}} \quad (4.20)$$

ともかける。(問 トリスタンMRのパラメータ、 $\epsilon_x = 0.168$ mmmrad, $\epsilon_y = 0.0105$ mmmrad, $\beta_x^* = 0.8$ m, $\beta_y^* = 0.05$ を使って衝突点のビームサイズ $\sigma_x = 0.367$ mm, $\sigma_y = 0.023$ mm を出せ。また、 $k = 2$, $f = 99.33$ kHz, 電流を $I_1 = I_2 = 20$ mA としてルミノシティが約 $7.4 \times 10^{31} / \text{cm}^2 \cdot \text{sec}$ となることを示せ)

この問でもわかるように、衝突点ではビームサイズ、特に y 方向のビームサイズが非常に小さいことに注意しよう (周長は 3 km もあるのに)。

4.3 beam-beam tune shift

電子・陽電子衝突型リングの場合、電子は反対方向からやってくる陽電子ビームの電荷によって運動に影響を受けるが、このようなビームとビームが衝突することによる効果をビーム・ビームの効果 (beam-beam effect) といっている。この効果は一見単純に見えるが、加速器で起こるいろいろな現象の中で、最も複雑な現象であり、最も解明されていない現象であ

る。それはこの効果が非線型でかつリングの内で局在しているばかりでなく、粒子の運動を2次元 (または3次元) で考える必要があるためである。そしてさらに互いのビームが影響しあうという集団的效果も考慮することが、二つのビーム電流がほぼ等しい場合には必要であるためである。

ここでは、beam-beam effect の目安としてよく使われる、beam-beam tune shift なる量について説明する。

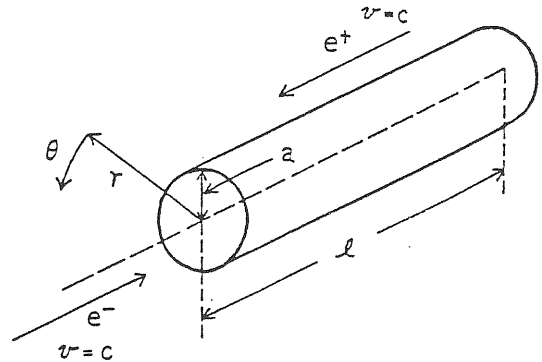


図 4 - 5.

まず初めに図 4.5 のような簡単な場合について考えてみよう。ここで陽電子の密度は一律であると仮定する。さて、図のように電子が陽電子ビームとすれちがうときに受ける力を計算するのであるが、ここでは簡単のために次のよく知られた事実を使うことにしよう。それはほぼ光速で走っている荷電粒子 (またはその集団としてのビーム) の作る電場は進行方向に対して図 4.6 のようにほぼ垂直になっているという事実である。

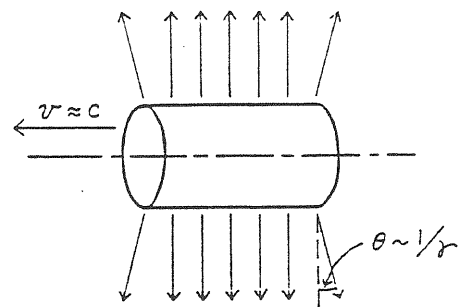


図 4 - 6.

これは相対論を使えばすぐにわかることであるが、次のようにいいかげん考えても納得できる。走っている荷電粒子はすなわち電流であるので、その電流は磁場を生じる。あとですぐわかるようにこの磁場は荷電粒子が光速で走っているとすると、(cgs ガウス単位系では) それを作る電場と強さは同じで、方向は互いに垂直になる。つまり電磁波が荷電粒子の進行方向に進

むのと同じように見える。電磁波は横波であるので、荷電粒子のつくる電場は進行方向に垂直になっていると考えられる。

さて、図 4.5 で陽電子ビーム中の半径 r ($< a$) の位置での電場は、(以下では真空の誘電率及び透磁率を夫々 ϵ , μ とする。また $\epsilon\mu = \frac{1}{c^2}$) (図 4.6 を参照)

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon$$

より、(ここで ρ は陽電子の電荷密度)

$$E_r = \frac{\pi r^2 \rho}{2 \pi r \epsilon} = \rho r / 2 \epsilon \quad (4.21)$$

となる。また陽電子の電流密度 \mathbf{j} は

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho c \quad (4.22)$$

であるので、磁場 \mathbf{H} は、

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (4.23)$$

より、

$$H_\theta = \frac{\rho c \cdot \pi r^2}{2 \pi r} = \rho r c / 2 = \rho r / 2 c \mu \epsilon \quad (4.24)$$

となり、 $E_r = c \mu H_\theta$ が導かれる。

ローレンツ力は、

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

であるので、電子の運動方程式は陽電子ビーム中では、

$$\frac{d p_x}{d t} = - e \rho x / \epsilon \quad (4.25)$$

となる (y 方向も同様) (問 これを示せ)。

よって電子が陽電子とすれちがう間に受ける運動量の変化は、

$$\Delta p_x = - e \int \rho x d t / \epsilon \quad (4.26)$$

となるが、電子がすれちがうのにかかる時間 Δt は

$$\Delta t = l / 2 c \quad (4.27)$$

であり (問 これを示せ)、またその間に、電子の位置 x はほとんど動かないと考えることができるので、

$$\Delta p_x = \frac{- e \rho l}{2 c \epsilon} x \quad (4.28)$$

となる。ここで、

$$\rho = \frac{e N_2}{\pi a^2 l} \quad (4.29)$$

であることを使うと (問 これを示せ)、

$$\Delta x' = \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{- e^2 N_2}{2 p c \pi a^2 \epsilon} x = \frac{- 2 r_e N_2}{r a^2} x \quad (4.30)$$

となる。ここで r_e は電子の古典半径で

$$m c^2 = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon r^2} \quad (4.31)$$

である。(4.30) の右辺はリングに、ある収束力が加わったと考えることができるので、これによる tune shift つまり、beam-beam tune shift は

$$\Delta \nu_x = \frac{r_e N_2 \beta_x^*}{2 \pi r a^2} \quad (4.32)$$

となる。ここで β_x^* は衝突点での β 関数である。

全く同様にして、

$$\Delta \nu_y = \frac{r_e N_2 \beta_y^*}{2 \pi r a^2} \quad (4.33)$$

となる (問 以上を示せ)。

この例の場合 (図 4.5) には半径 r が $r \leq a$ であるかぎり、力は線型 (linear) であり、その範囲にある電子に対しては、上の tune shift が使えるが、その範囲の外では力は非線型となり (問 力はどんな形をしている)、(4.32)、(4.33) の式が適用できない。そして実際の電子・陽電子の密度はガウス分布であり、力はどの場所でも非線型である。そこで微小振幅の電子に働く力を考え、これによる tune shift を linear tune shift といって、beam-beam の効果の目安としている。そしてそれは、

$$\Delta \nu_x = \frac{r_e \beta_x N_2}{2 \pi r \sigma_x (\sigma_x + \sigma_y)} \quad (4.34)$$

$$\Delta \nu_y = \frac{r_e \beta_y N_2}{2 \pi r \sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)}$$

と与えられる。以下でこれを求めるが、ここでは次のような事実を使う。電場は図 4.6 のように進行方向に

対して垂直になっている。また磁場の効果は電場の効果と同じである。このことから電場のみ計算すればよい。

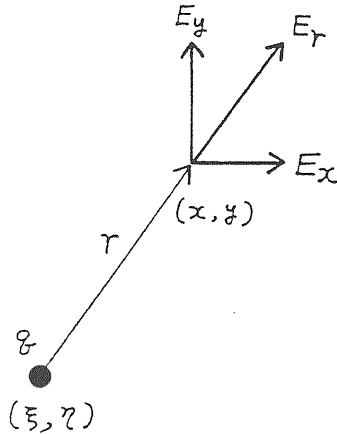


図 4 - 7.

図 4.6 の事実を使うと、図 4.7 の電場は

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon$$

より、

$$E_r = \frac{q}{2\pi r \epsilon} = \frac{q}{2\pi \epsilon \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \quad (4.35)$$

となり (問 これを示せ)、 E_x は

$$E_x = \frac{q(x-\xi)}{2\pi \epsilon r^2} = \frac{q(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \times \frac{1}{2\pi \epsilon} \quad (4.36)$$

となる。これより、電荷分布のある場合には、

$$E_x = \int \frac{\rho(x-\xi) d\xi d\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \frac{1}{2\pi \epsilon} \quad (4.37)$$

と与えられる。陽電子の電荷分布は、

$$\rho(x, y, z) = \frac{eN}{2\pi ab} \exp\left[-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}\right] \rho(z) \quad (4.38)$$

である。ここで

$$N = N_2, \quad a = \sigma_x, \quad b = \sigma_y$$

とおいた。また $\rho(z)$ は

$$\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right] \quad (4.39)$$

であるが、あとで

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(z) dz = 1$$

となることのみをつかう ($E_x \rightarrow \int E_x dz$ として以下考えてもよい)。

これから

$$E_x = \frac{\rho(z) eN}{2\pi \epsilon \cdot 2\pi ab} \int \frac{\exp\left[-\frac{\xi^2}{2a^2} - \frac{\eta^2}{2b^2}\right] \cdot (x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta \quad (4.40)$$

となるが、これはまた、

$$E_x = \frac{-\rho(z) eN}{2\pi \epsilon \cdot 2\pi ab} \int \frac{\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{2a^2} - \frac{(y+\eta)^2}{2b^2}\right]}{\xi^2 + \eta^2} \xi d\xi d\eta \quad (4.41)$$

とかける (問 これを示せ)。 x, y を微小とすると、

$$E_x = \frac{\rho(z) eN}{2\pi \epsilon \cdot 2\pi ab} \left[\int \frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2a^2} - \frac{\eta^2}{2b^2}\right] d\xi d\eta \cdot \frac{x}{a^2} + \int \frac{\xi \eta}{\xi^2 + \eta^2} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2a^2} - \frac{\eta^2}{2b^2}\right] d\xi d\eta \cdot \frac{y}{b^2} + \dots \right] \quad (4.42)$$

となるが、第 2 項は被積分関数の対称性よりゼロとなることがわかる (問 これを示せ) ので第 1 項の積分がわかればよい。

$$I = \int \frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2a^2} - \frac{\eta^2}{2b^2}\right] d\xi d\eta \quad (4.43)$$

とすると、 I はまた、

$$I = \int \frac{a^2 x^2}{a^2 x^2 + b^2 y^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \cdot ab dx dy \quad (4.44)$$

ともかける (問 これを示せ)。 x, y を極座標表示すれば、

$$I = a^3 b \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\cos^2 \theta e^{-\frac{r^2}{2}}}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} r dr d\theta = a^3 b \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \quad (4.45)$$

となる (問 これを示せ)。これはまた、

$$I = a^3 b \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos \theta}{(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) \cos \theta} d\theta \quad (4.46)$$

ともかける (問 これを示せ)。これから

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{c + d \cos \theta} \quad (4.47)$$

が求まれば、 $c = a^2 + b^2$ 、 $d = a^2 - b^2$ として

$$I = a^3 b \left[\frac{2\pi}{d} + \left(1 - \frac{c}{d}\right) J \right] \quad (4.48)$$

となる。Jの積分は、 $c > d$ であるので、

$$J = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - d^2}} \quad (4.49)$$

で与えられる。これは初等積分であるが、積素積分を使うと簡単に次のように求まる。 $z = e^{i\theta}$ として

$$\begin{aligned} J &= \oint \frac{1}{c + d \left(\frac{z + 1/z}{2} \right)} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{2}{i} \oint \frac{dz}{dz^2 + 2cz + d} \quad (4.50) \end{aligned}$$

被積分関数の極 z_1 、 z_2 は、

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-c + \sqrt{c^2 - d^2}}{d} = \frac{-d}{c + \sqrt{c^2 - d^2}} \\ z_2 &= \frac{-c - \sqrt{c^2 - d^2}}{d} \end{aligned}$$

であるので図4.8から

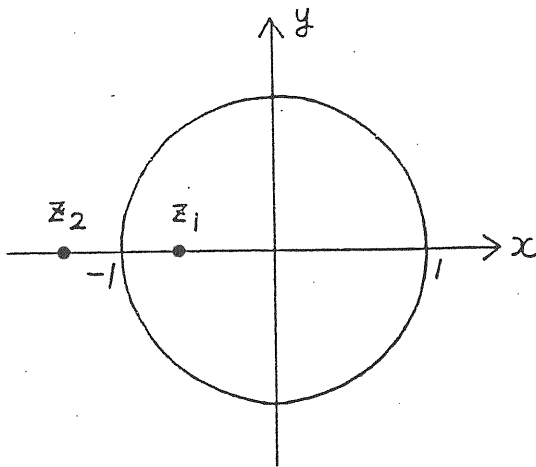


図4-8.

$$J = 2\pi i \frac{2}{i} \frac{1}{d} \frac{1}{(z_1 - z_2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - d^2}} \quad (4.51)$$

となる (図4.8では $d > 0$ としたが、つまり $\sigma_x > \sigma_y$ としたが、これは本質的でない)。

以上より、Iは、

$$I = \frac{2\pi a^2 b}{a + b} \quad (4.52)$$

となり (問 これを示せ)。

$$E_x = \frac{\rho(z) e N}{2\pi \epsilon a (a + b)} x = \frac{\partial E_x}{\partial x} x \quad (4.53)$$

となることがわかる (問 これを示せ)。これから、磁場の効果を含めて、

$$\frac{d p_x}{dt} = -2e \frac{\partial E_x}{\partial x} x \quad (4.54)$$

となり、

$$\Delta p_x = -2e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial E_x}{\partial x} x dt \quad (4.55)$$

となるが、(4.27)と同じく、

$$dt = \frac{dz}{2c}$$

であり、また x は衝突の間に動かないと考えると、

$$\Delta p_x = -\frac{2e^2 N}{a(a+b)} \frac{1}{4\pi \epsilon c} x \quad (4.56)$$

となる (問 これを示せ)。これから、

$$\Delta x' = -\frac{2r_e N}{r a (a+b)} x \quad (4.57)$$

であることがわかる。これより

$$\Delta \nu_x = \frac{r_e \beta_x N}{2\pi r a (a+b)} \quad (4.58)$$

となり、また $\Delta \nu_y$ は

$$\Delta \nu_y = \frac{r_e \beta_y N}{2\pi r b (a+b)} \quad (4.59)$$

となる (問 これを示せ)。これは(4.34)と同じ結果である。通常は $\sigma_y < \sigma_x$ であるので(4.58)、(4.59)

からもし $\Delta\nu_x \approx \Delta\nu_y$ であるようにしようと思うと $\beta_y < \beta_x$ である必要がある。そして $\Delta\nu_x = \Delta\nu_y$ のときは

$$b/a = \beta_y/\beta_x \quad (4.60)$$

となる。さてここで求めた $\Delta\nu_x, \Delta\nu_y$ なる量は衝突点1ヶ所あたりの量であることに注意しよう。そして通常 beam-beam tune shift というとき、この1ヶ所あたりの量をいう。

4.4 ルミノシティの限界 (luminosity limit)

ここでは、前項までの結果を使って、ルミノシティの限界について、定性的に説明する。それはルミノシティの限界を決める因子がいろいろとあり、その因子のうちのいくつかは、加速器の原理というこの講義の範囲を越えるからである。

前項でのべたようにビーム・ビームの効果はよく理解されていないが、今までにいろいろな電子・陽電子衝突型リングでの経験から beam-beam tune shift $\Delta\nu$ にある限界があるということがわかっている。その値はリングごとに、また日々異なる量であるが、普通は1ヶ所の衝突点あたりの $\Delta\nu$ の最大値は

$$0.02 \lesssim \Delta\nu_{\max} \lesssim 0.06$$

ぐらいの間に入っている。トリスタンでは $\Delta\nu_{\max} = 0.03$ と仮定している。電子の $\Delta\nu_1$ は

$$\Delta\nu_1 \propto N_2 \propto I_2$$

であるので、陽電子の電流に比例し、一方、陽電子の tune shift は電子の電流に比例する。tune shift に限界があるとすると、ルミノシティは電子・陽電子ビームの電流の積に比例するので、その最大値は電子と陽電子の tune shift がともに $\Delta\nu_{\max}$ となるような電流のとき最大となる。このとき電子と陽電子ビームの電流は等しいので、以下では互いの電流値は等しいとして話を進めることにする。また、この tune shift には、x方向とy方向があるが、それらのとり得る最大値は等しい(はっきりした根拠はないが)として、それを以下簡単のために $\delta\nu$ とする。まず初めに、衝突点での β 関数 β_x^*, β_y^* とエミッタンス ϵ_x, ϵ_y の関係、つまりこれらをどのようにとったらルミノシティが最大になるかを考えてみよう。

ルミノシティ L は

$$L = \frac{C}{ab}$$

とかける。ここで C は β やエミッタンスによらない量であり、

$$a = \sigma_x, \quad b = \sigma_y$$

である。また tune shift は、

$$\Delta\nu_x = \frac{A\beta_x}{a(a+b)} \quad (4.62)$$

$$\Delta\nu_y = \frac{A\beta_y}{b(a+b)}$$

であり、 A は β やエミッタンスによらない量である。ここで、

$$z = b/a \quad (4.63)$$

とおくと、

$$\Delta\nu_x = \frac{A\beta_x^*}{ab(1+\frac{a}{b})} = \frac{A L \beta_x^*}{C(1+\frac{1}{z})} \leq \delta\nu \quad (4.64)$$

である。同様にして、

$$\Delta\nu_y = \frac{A}{C} \frac{L \beta_y^*}{(1+z)} \leq \delta\nu \quad (4.65)$$

となる。これらから、

$$L \leq \frac{C\delta\nu}{A} \frac{1+z}{\beta_y^*}, \quad L \leq \frac{C}{A} \Delta\nu \frac{1+z}{\beta_x^* z} \quad (4.66)$$

となるが、これを図示すると、図4.9のようになる。

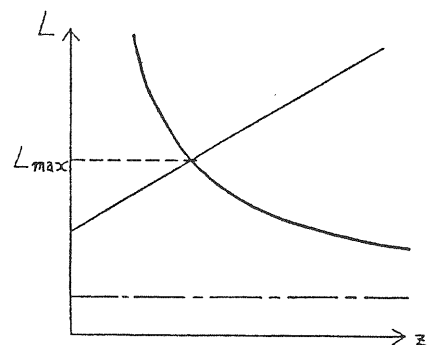


図4-9.

上の両方の条件を満足する領域は、図の斜線部の部分であるが、これからルミノシティが最大になるのは、

$$\frac{1+z}{\beta_y^*} = \frac{1+z}{\beta_x^* z} \quad (4.67)$$

を満足する z であることがわかる (問 これを示せ)。これから

$$z = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{\epsilon_y \beta_y^*}}{\sqrt{\epsilon_x \beta_x^*}} = \frac{\beta_y^*}{\beta_x^*} \quad (4.68)$$

となり、

$$\frac{\beta_y^*}{\beta_x^*} = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \kappa \quad (4.69)$$

のときルミノシティが最大になるということがわかる。この κ は第 2.3 章でのべた coupling constant であり、通常 1 よりかなり小さい。(これはある程度は変えることができるが、 $\kappa \approx 1$ にするには ν_x と ν_y を特別な関係 (difference resonance 上) に選ばなければならないのでリングの運転上得策ではない)。そのため

$$\beta_y^* \ll \beta_x^* \quad (4.70)$$

となるように通常選ばれる。

example

トリスタンのある運転モードでは、

$$\beta_x^* = 0.8, \quad \beta_y^* = 0.05$$

である。

さて、ルミノシティを最大にするような κ を最適結合定数 (optimum-coupling constant) というが上の例では、

$$\kappa = \frac{0.05}{0.8} \approx 0.06 = 6\%$$

である。

さてこのようにルミノシティ最大の場合には、(当然予測されたことであるが)

$$\Delta \nu_x = \Delta \nu_y (= \delta \nu)$$

となっているが、 $\beta_y^* \ll \beta_x^*$ を使うと、

$$\delta \nu = \Delta \nu_y \approx \frac{A \beta_y^*}{ab} = \frac{r_e N \beta_y^*}{2 \pi r a b} \quad (4.71)$$

となる。また

$$ab = \sqrt{\epsilon_x \beta_x^* \epsilon_y \beta_y^*} = \epsilon_x \beta_y^* \approx \epsilon \beta_y^* \quad (4.72)$$

である。

これを使うと、最大ルミノシティ L_{\max} は

$$\begin{aligned} L_{\max} &\propto \frac{N^2}{ab} \propto r^2 (\delta \nu)^2 \frac{ab}{\beta_y^{*2}} \\ &= (\delta \nu)^2 r^2 \epsilon / \beta_y^* \end{aligned} \quad (4.73)$$

となる (問 これを示せ)。または係数を含めると、

$$L_{\max} \approx \frac{\pi k f}{r_e^2} (\delta \nu)^2 r^2 \epsilon / \beta_y^* \quad (4.74)$$

となる。これは、

$$L_{\max} [\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}] \approx 1.5 \times 10^{29} \cdot$$

$$\frac{k \cdot f [\text{kHz}] \cdot (\delta \nu)^2 \cdot E^2 [\text{GeV}] \cdot \epsilon [\text{mm rad}]}{\beta_y [\text{m}]}$$

(4.75)

ともかける。

example

トリスタンのパラメータ、 $\beta_y = 0.05$, $k = 2$, $f = 99.33 \text{ kHz}$, $E = 30 \text{ GeV}$, $\epsilon = 0.179 \text{ mmrad}$ とし、 $\delta \nu = 0.03$ とおくと、

$$L_{\max} \approx 9 \times 10^{31} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$$

となる。

さて (4.73) からルミノシティを上げるためには次のことがいえる。

- (a) β_y^* をできるだけ小さく
- (b) エネルギーを高く
- (c) エミッタンスを大きく (または小さく)
- (d) tune shift の限界を高く

ただし上の (a) から (d) はあくまで標語的に言ったときにそうなるのであって、ことはルミノシティの式から予想されるほどには単純ではなく、いろいろなことがルミノシティを上げるために関係してくる。たとえば高いエネルギーでは電子ビームのシンクロトロン放射のエネルギーを補うために必要な加速電力がばく大

になり、この電力の上限がルミノシティを決める要因になる。この上限があると、さらに高いエネルギーでは一個の電子を回すのさえ不可能になってくる。

以下でルミノシティにきいてくるいろいろな要因を簡単に説明するが、(d)の tune shift の限界については省略し、以下 $\Delta\nu$ はどんなものにも依存しない定数であると仮定する。それは、これについてはいままでによくわかっておらず、またリングのオペレータの腕一つというようなところがあったりするからである。

(注. $\delta\nu$ がエネルギーに依存するのではないかという話もある)

最初に(a)について考えてみよう。 β_y^* を小さくすると、これにともなって(4.69)から β_x^* も小さくする必要がある。 β_y^* を小さくするために考えられたのが、low β insertion と呼ばれるものである。これは、図4.10に示すように defocusing quadrupole magnet(y 方向に収束力がある) と focusing quadrupole を並べた doublet といわれるもので作られている。

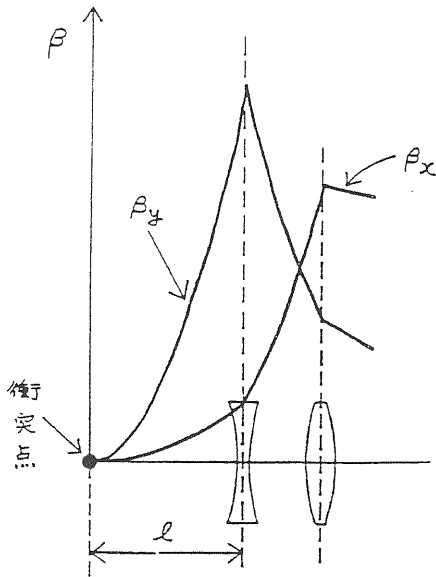


図 4 - 10.

第2章図2.15で示したように、 β_y^* が小さいと衝突点から離れるにつれ、 β_y は急激に大きくなる。 β は

$$\beta = \beta_0 + \frac{\ell^2}{\beta_0} \approx \frac{\ell^2}{\beta_0} \quad (s \gg \beta_0)$$

であるので、たとえば $\beta_y^* = 0.05 \text{ m}$, $\ell = 5 \text{ m}$ とすると、

$$\beta_y \approx 500 \text{ m}$$

となり、ビームサイズが急激に太くなる。x 方向も $\beta_x^* \gg \beta_y^*$ とはいえかなり太くなる。また、 $\epsilon_y \ll \epsilon_x$ ではあるが、実際にはビームが衝突すると、y 方向の

エミッタンスがルミノシティ最大の近くで大きくなるのがよくあるので、設計上は $\epsilon_y \approx \epsilon_x$ としてリングの aperture を考える必要がある。これらのことと、図4.9の ℓ (free space の長さ) が実験の detector をおくためにある程度必要であることを考えると、 β_y^* は小さいほどよいといっても限界がある。さらにあまり β_y^* が小さく、バンチの長さより小さくなると衝突している区間で β_y^* が大きくなることになり、ルミノシティが大きくなるならない ($\beta_y^* \geq \sigma_z$ である必要がある)。

以上、 β_y^* は極端に小さくできないとのべてきたが、これに関するあと2, 3の問題点について簡単にふれておこう。

1つは、 β がリングの中であまり大きくなると運転上いろいろ問題がでてくる。それは第2章でのべたように C.O.D. や η が大きくなったり、 β のゆらぎが大きくなり、運転がやりにくくなるということである。

もう1つは、 β_y が図4.10のDの所で大きくなるからといって、 β_y^* を小さくしたまま、 ℓ を短くすると、Dの focusing 力が強い、つまり磁場が強いことが要求されるということである。この様子をおおざっぱにみるには次のようにすればよい。Dの入口の場所で

$$\beta \approx \frac{\ell^2}{\beta_0}$$

$$\alpha \approx -\frac{\ell}{\beta_0}$$

であるので(問 これを示せ)、Dで図4.9のように β_y を変化させるためには、Dの出口で、 $\alpha_y > 0$ であることが必要である。Dを thin lens 近似すると、

Dの出口での α_y は ($k = -k_D$ として)

$$\alpha_y = k \frac{\ell^2}{\beta_y^*} - \frac{\ell}{\beta_y^*}$$

であるので、少なくとも

$$k > 1/\ell$$

である必要がある。

そして、3つ目の問題点は chromaticity が大きくなるということである。それはDによって生じる chromaticity $\xi_y(D)$ は

$$\xi_y(D) = -\frac{k\beta_D}{4\pi} \approx -\frac{k}{4\pi} \frac{\ell^2}{\beta_y^*}$$

であるので

$$-\xi_y(D) > \frac{\ell}{4\pi\beta_y^*} \quad (4.76)$$

となり、 β_y^* が小さいと chromaticity が大きくなってその補正がむづかしくなる。

さて、上で指摘したように、low β insertion といえどもあまり、 β_y^* を小さくすることができないが、もう一つ defocusing quadrupole を (またはもう一つ doublet を)、detector (また detector の作る磁場を補正するための coil) の space をさいて加え、そして、 β_y^* を小さくしてその他の場所での β があまり大きくならないようにした insertion を mini β insertion という。

次に (b) の エネルギーを高くした場合にルミノシティがどのようになるかをみてみよう。また lattice は固定されているとしよう。すると第3章の結果から、エミッタンスは

$$\varepsilon \propto \gamma^2 \propto E^2 \quad (4.77)$$

のように変化する。これを (4.73) に代入すると

$$L \propto E^4 \quad (4.78)$$

のように変化することがわかる。(図4.11)

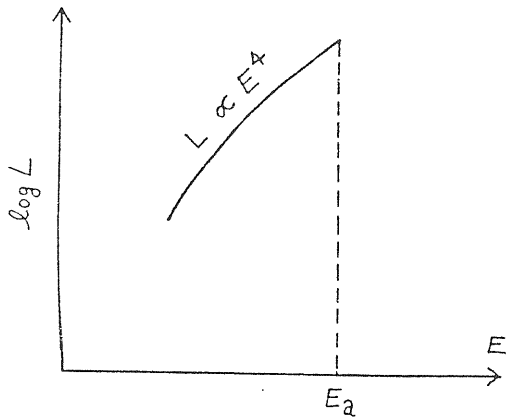


図4-11.

ところがエミッタンスは (4.77) のように変化するので、あまりエネルギーが高くなるとビームサイズが大きくなって quantum lifetime が短くなる。そしてこれは前章で示したように、ビームサイズに大きく依存しているので、実際にはエネルギーをあるエネルギー (図の E_a) より大きくすることができない。しかし、ルミノシティは E^4 に比例するので、エネルギーを E_a に近い所、つまり aperture limit に近い

所にもってきた方が得である。また E_a を大きくしようとすると aperture を大きくしなければいけないのでこれは電磁石の設計に影響を与える。ところで、シンクロトン放射は E^4 に比例するので、これを補うための高周波電力 P_{cav} は

$$P_{cav} \propto E^4 N \propto E^4 I \quad (4.79)$$

となる。このためエネルギーが高くなると、必要な P_{cav} が急激に増大する。そこで P_{cav} に限界があるとすると、電流または電子の数 N をエネルギーとともに

$$N \propto E^{-4} \quad (4.80)$$

のように減少させる必要がある。そして $\Delta\nu$ は (4.71), (4.72) からわかるように

$$\Delta\nu \propto E^{-3} \quad (4.81)$$

であったので、(4.80) のようになると $\Delta\nu$ を $\delta\nu$ に維持することができなくなる。そしてルミノシティは (4.80) で決まることになる。ルミノシティは

$$L \propto \frac{N^2}{\varepsilon} \quad (4.82)$$

であるから (4.77), (4.80) をこれに代入すると

$$L \propto E^{-10} \quad (4.83)$$

となり、エネルギーとともに急激に減少する (図4.11)。

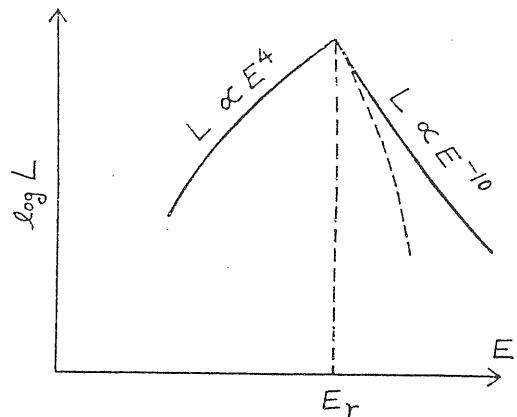


図4-12.

ところが必要とされる高周波電力は (4.79) だけでなく、シンクロトン振動による quantum lifetime を下げないように、 E^8 に比例する電力を余分に必要とする。これはシンクロトン放射によるエネルギー損失が E^4 に比例するため、高周波電圧 eV が

$$eV \propto E^4 \quad (4.84)$$

となる必要があるが、高周波空洞の壁での電力損失が

$$V^2 \propto E^8 \quad (4.85)$$

に比例するためである。このことを考慮するとルミノシティは図 4.11 の点線のようにさらに減少して、あるエネルギーのところでゼロになる。

次に (c) のエミッタンスを lattice を変化させて大きく (または小さく) したときのルミノシティへの影響を考えてみよう。第 3 章で示したように、エミッタンスは ν_x を変えることによって、つまり lattice を変化させることによって変化させることができる。高いエネルギーでエミッタンスを大きくすることは、先にのべたように、lattice を変化させなくても、エミッタンスは増大し、aperture limit になるので得策でないが、低いエネルギーではエミッタンスを増大させるとルミノシティを上げることができる。ただし、次のことに注意する必要がある。

$$\Delta\nu \propto \frac{N}{\epsilon} \quad (4.86)$$

であるので、いま、電流を $\Delta\nu$ が $\delta\nu$ になるように維持しようとする (4.86) から

$$N \propto \epsilon \quad (4.87)$$

となり、エミッタンスを増大してルミノシティを上げようとする、そのために必要な電流が増大するということである。(注。またエネルギーを高くしてルミノシティを上げようとする場合にもそのようになる)

さて逆にエミッタンスを小さくすると、aperture limit になるエネルギーが上がる。また $\Delta\nu = \delta\nu$ とするための必要な電流も少なくすむ。この場合には、図 4.13 でエネルギーが E_r より低いときは、エミッタンスが大きい場合よりルミノシティが低い、エネルギーが E_r よりある程度大きくなるとエミッタンスが小さい方がルミノシティが上がる。

もし自由に ν_x (実は曲線部の ν_x) を変えることができる、広いエネルギー範囲でルミノシティを最大にするためには、高周波電力の限界に到達する前には aperture limit になるようにエミッタンスを変えればよい。エミッタンスは

$$\epsilon \propto E^2 / \nu_x^3 \quad (4.88)$$

であったので、 ϵ が aperture limit のエミッタンスになっているとすると

$$\nu_x \propto E^{2/3} \quad (4.89)$$

のように変化させればよい。また電力の限界に到達してしまっただけでは、(4.80) と (4.87) から

$$\epsilon \propto E^{-4} \quad (4.90)$$

とする必要がある。そして (4.83) を使うと

$$\nu_x \propto E^2 \quad (4.91)$$

のようにエネルギーとともに大きく変える必要がある。このように ν_x を変化させたとき、(4.73) からわかるように電力の限界前ではルミノシティが

$$L \propto E^2$$

となり電力の限界あとでは、

$$L \propto E^{-4}$$

になるが、ここでもまたエネルギーがさらに高くなると (4.85) の影響がきいてくる。これらを図示すると図 4.14 のようになる。図で点線部が (4.85) の影響を含めた場合である。

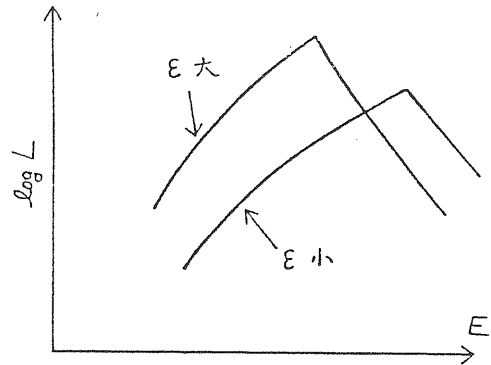


図 4-13.

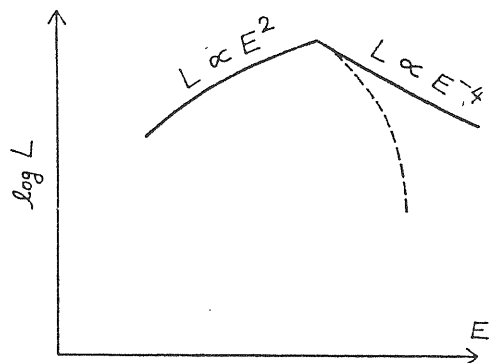


図 4-14.

しかしながら実際にはそんなに大幅に ν を変化させることには困難がある。そのようにしようとするときの大きな問題として chromaticity correction がある。この補正は衝突型リングではそんなに簡単なものではなく、 ν を変化させるとそれまでうまくいっていた補正が全然だめになってしまうということもありえる。また新しい補正も見つけるのが非常に困難か不可能である場合さえある。そして現在の段階では図 4.14 を完全に実現すること、そしてさらにそれより高いルミノシティを得ることはむつかしく、またそれだけにそれは「加速器の原理」への挑戦と考えられなくもない。

参考文献

加速器の参考書、参考文献といっても、山ほどあるようであるが、読んでもいないのに上げるわけにもいかないし、加速器の原理を一応理解するのに、次から次と本や文献を読む必要もないと思われる。筆者の経験では（他の人もたぶんそうであろう）たった二つ読めば、加速器の原理というようなものは理解できると思う。また、この講義ノートでも大部分はこの二つのみを参考にした。そこで次の三つを参考文献として上げる。

最後のものは、公式集のようなもので小冊子であるが、たいへん便利なので、筆者はこれだけはどこにあるかを気にとめている。

- 1) E. D. Courant and H. S. Snyder, Theory of the alternating - gradient synchrotron, Ann. Phys. 3, 1-48, 1958
これは軌道理論のバイブルである。
- 2) M. Sands, The Physics of Electron Storage Rings, in Proceedings of International School of Physics " Enrico Fermi ", Course 46 " Physics with Intersecting Storage Ring ", edited by B. Touschek, Academic Press, 1971.
- 3) C. Bovet and et al., A selection of formulae and data useful for the design of AG synchrotrons, CERN/MPS-SI/Int. DL/70/4

Appendix A ふり子の運動

(a) ふり子の運動方程式

ふり子の運動 (図A・1) は, 次の式で与えられる。

$$m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin\theta} \quad (\text{A-1})$$

θ が十分小さいとすると,

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \theta = -\omega^2 \theta, \quad \omega^2 = g/\ell$$

となり, これは調和振動子の運動方程式

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \quad (\text{A-2})$$

と同じ形である。

この方程式の解は, 一般に,

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

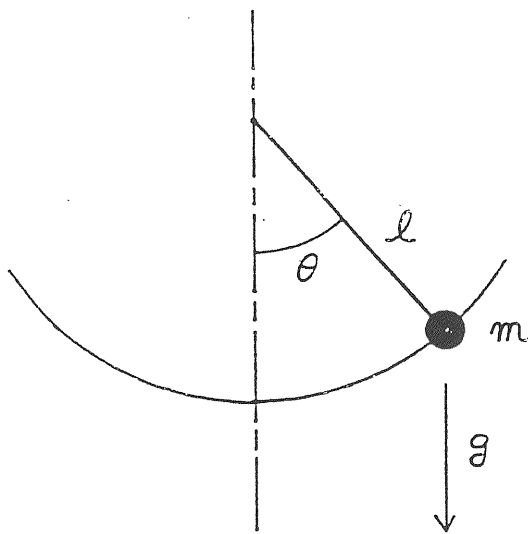
と書ける。

初期条件, $t=0$ のとき, $x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$ を考えると,

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$\dot{x} = -\omega x_0 \sin \omega t + \dot{x}_0 \cos \omega t$$

となる。



これはまた, マトリックスを使うと次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}_{t=t} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}_{t=0}$$

重要な関係式

(A-3)

この式を理解すれば, 加速器の軌道理論の50%ぐらいは理解したと思ってよいと思う。(それほど軌道理論は単純明快である。simple is best!!)

上の式は,

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x}/\omega \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x}/\omega \end{bmatrix}_0$$

($\theta = \omega t$) (A-4)

とも書ける。

これは, ベクトル $(x_0, x_0/\omega)$ を θ だけ時計方向に回転する式と同じである。図A.2のような $(x, \dot{x}/\omega)$ 平面, または (x, \dot{x}) 平面を位相空間 (phase space) という。

つまり, 位置 (x) と速度 (\dot{x}) を図示したものが, phase space である。

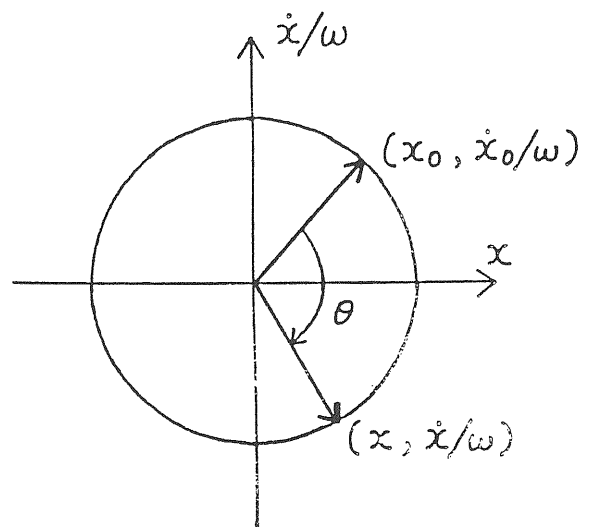


図 A-2.

(b) 強制力のある場合

次に調和振動子に力が働く場合 (forced oscillation) を考える。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_x^2 x = f = f_0 e^{i\omega_0 t}$$

(または $f_0 \cos \omega_0 t$)

この一般解は、 $f = 0$ としたときの一般解と、 $f \neq 0$ のときのある解 (特殊解) との和で書ける。

特殊解はただちに、

$$x_s = \frac{f_0 e^{i\omega_0 t}}{\omega_x^2 - \omega_0^2} \quad (A-5)$$

と求められる (問, 上の式を導びけ)。

よって

$$x = A \cos \omega_x t + B \sin \omega_x t + \frac{f_0 e^{i\omega_0 t}}{\omega_x^2 - \omega_0^2}$$

となる。 (A-6)

(うるさいことをいえば、最後の項は real part をとる必要がある)。

もうすこし、一般化して、 f が周期関数であるとす。つまり、

$$f(t+T) = f(t)$$

T を上の関係を満す (絶対値が) 最小のものであるとすると、 f は $1/T$ を基本周波数とするフーリエ級数に展開できる。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\omega_0 t} \quad (\omega_0 = \frac{2\pi}{T}) \quad (A-7)$$

よってこの場合の特殊解は、

$$x_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n e^{in\omega_0 t}}{\omega_x^2 - (n\omega_0)^2} \quad (A-8)$$

となる。

上の式から ω_x が ω_0 の整数倍に近くなると、 x が大きくなるのがわかる (共振現象)。

また、上の特殊解は、

$$x_s(t + \ell T) = x_s(t)$$

なる関係を満し、この解も周期 T をもつ関数である。

今度はフーリエ級数を使わずに、直接特殊解を求めてみよう。(定数変化法)

(1) $f = 0$ のときの解は、

$$x = A \cos \omega_x t + B \sin \omega_x t$$

$$\dot{x} = -\omega_x A \sin \omega_x t + \omega_x B \cos \omega_x t$$

である。ここで A, B は定数である。

(2) $f \neq 0$ のときの解として、

$$x = A(t) \cos \omega_x t + B(t) \sin \omega_x t$$

$$\dot{x} = -\omega_x A(t) \sin \omega_x t + \omega_x B(t) \cos \omega_x t$$

の形を考えると、第一式を t で微分して第二式と等しいとおくと、

$$\dot{A} \cos \omega_x t + \dot{B} \sin \omega_x t = 0$$

となる。また、運動方程式より、

$$-\omega_x \dot{A} \sin \omega_x t + \omega_x \dot{B} \cos \omega_x t = f(t)$$

となることがわかる。

以上より、

$$\dot{A} = -\frac{f(t)}{\omega_x} \sin \omega_x t$$

$$\rightarrow A = -\frac{1}{\omega_x} \int_0^t f(s) \sin \omega_x s ds \text{ とかける}$$

$$\dot{B} = \frac{f(t)}{\omega_x} \cos \omega_x t \rightarrow B = \frac{1}{\omega_x} \int_0^t f(s) \cos \omega_x s ds$$

となる。よって、ある特殊解として、

$$x_s = -\frac{1}{\omega_x} \int_0^t f(s) \sin \omega_x s ds \cos \omega_x t$$

$$+ \frac{1}{\omega_x} \int_0^t f(s) \cos \omega_x s ds \sin \omega_x t$$

または、

$$x_s = \frac{1}{\omega_x} \int_0^t f(s) \sin \omega_x (t-s) ds \quad (A-9)$$

が求まる。この特殊解は一般には、周期 T をもたない。

そこで、これを周期 T をもつ関数にしよう。($f = 0$ の場合のある解を加えても、それは依然として、ある特殊解である。)

そこで、

$$x = (a + A(t)) \cos \omega_x t + (b + B(t)) \sin \omega_x t$$

$$\dot{x} = -\omega_x (a + A(t)) \sin \omega_x t$$

$$+ \omega_x (b + B(t)) \cos \omega_x t \quad (A-10)$$

とおくと、

$$x(T) = x(0), \dot{x}(T) = \dot{x}(0) \text{ の条件より、}$$

$$(a + A) \cos \theta + (b + B) \sin \theta = a$$

$$-(a + A) \sin \theta + (b + B) \cos \theta = b$$

となる。ここで、 $A = A(T), B = B(T), \theta = \omega_x T$ と

おいた。

よって、

$$\cos \theta a - \sin \theta b = a + A$$

$$\sin \theta a + \cos \theta b = b + B$$

となる。

これを解いて、

$$a = \frac{A (\cos \theta - 1) + B \sin \theta}{2 (1 - \cos \theta)}$$

$$b = \frac{B (\cos \theta - 1) - A \sin \theta}{2 (1 - \cos \theta)}$$

となる。これを (A-10) に代入すると、

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2 (1 - \cos \theta)} \left[A \cos (\omega_x t + \theta) \right. \\
&\quad + B \sin (\omega_x t + \theta) - A \cos \omega_x t - B \sin \omega_x t \\
&\quad \left. + 2 (1 - \cos \theta) (A(t) \cos \omega_x t + B(t) \sin \omega_x t) \right] \\
&= \frac{1}{2 \omega_x (1 - \cos \theta)} \left[\int_0^T f(s) \sin \omega_x \right. \\
&\quad \left. (t+T-s) ds - \int_0^T f(s) \sin \omega_x (t-s) ds \right. \\
&\quad \left. + 2 (1 - \cos \theta) \int_0^t f(s) \sin \omega_x (t-s) ds \right] \\
&= \frac{2 \sin \frac{\omega_x T}{2}}{2 \omega_x (1 - \cos \theta)} \left[\int_0^T f(s) \cos \omega_x \left(t-s + \frac{T}{2} \right) ds \right. \\
&\quad \left. + 2 \sin \frac{\omega_x T}{2} \int_0^t f(s) \sin \omega_x (t-s) ds \right]
\end{aligned}$$

また、第二項目の積分は、

$$\begin{aligned}
&\int_0^t f(s) \sin \omega_x (t-s) ds \\
&= \int_T^{t+T} f(s) \sin \omega_x (t-s+T) ds
\end{aligned}$$

と書ける (問、これを示せ)。

よって第二項は、

$$\begin{aligned}
&-\int_T^{t+T} f(s) \cos \omega_x \left(t-s + \frac{3}{2} T \right) ds \\
&+ \int_0^{t+T} f(s) \cos \omega_x \left(t-s + \frac{T}{2} \right) ds
\end{aligned}$$

となるが、この一番目の式は、

$$-\int_0^t f(s) \cos \omega_x \left(t-s + \frac{T}{2} \right) ds$$

ともかける。

そして、

$$\int_0^T -\int_0^t + \int_T^{t+T} = \int_t^{t+T} \text{より、}$$

$$\boxed{
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2 \omega_x \sin \frac{\omega_x T}{2}} \\
&\int_t^{t+T} f(s) \cos \omega_x \left(t-s + \frac{T}{2} \right) ds \quad (A-11)
\end{aligned}
}$$

と求まる。

(問 もっと効率のよい計算を考えよ)。

(問 (A-11) は周期を T に基づく周期関数であることを示せ)。

(c) (A-8) と (A-11) とは同じものである。

初めに、(A-11) から (A-8) を出そう。

(A-11) は、

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2 \omega_x \sin \frac{\omega_x T}{2}} \\
&\int_0^T f(t+y) \cos \omega_x \left(y - \frac{T}{2} \right) dy
\end{aligned}$$

と変形できる (問、これを示せ)。これから

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{4 \omega_x \sin \frac{\omega_x T}{2}} \int_0^T f(t+y) \left. \begin{aligned} &e^{i \omega_x \left(y - \frac{T}{2} \right)} \\ &+ e^{-i \omega_x \left(y - \frac{T}{2} \right)} \end{aligned} \right\} dy \text{となる。}
\end{aligned}$$

$$f(t+y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\omega_0(t+y)} \text{である}$$

ので、これを上の式に代入して、y について積分すると、(A-8) が得られる (問、これを示せ)。

次に (A-8) から (A-11) を出そう。

上の逆をやればよいが、それはおもしろくないので、直接 (A-8) から (A-11) を出すことをやろう。

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) e^{-in\omega_0 s} ds$$

であるので,

$$x_s = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{in\omega_0(t-s)}}{\omega_x^2 - (n\omega_0)^2} ds$$

よって,

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{in\omega_0(t-s)}}{\omega_x^2 - (n\omega_0)^2} \quad \text{なる和 } S \text{ が求ま}$$

ればよい。

以下にこの種の級数が簡単に求まる方法を示す
(複素積分のテクニック)。

上の式は,

$$\omega_0^2 S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) e^{in\theta}$$

とかける。ただし, $g(n) = \frac{1}{a^2 - n^2}$, $a = \omega_x / \omega_0$,

$$\theta = \omega_0(t-s)$$

そこで,

$$I_m = \oint_{C_m} \frac{g(z) e^{iz\theta}}{e^{2\pi iz} - 1} dz \quad (0 \leq \theta < 2\pi \text{ と}$$

する)。

なる積分を考えると, 留数をかぞえて,

$$I_m = \sum_{n=-m}^{+m} g(n) e^{in\theta} + 2\pi i (g(z) \text{の留数の和})$$

となる。

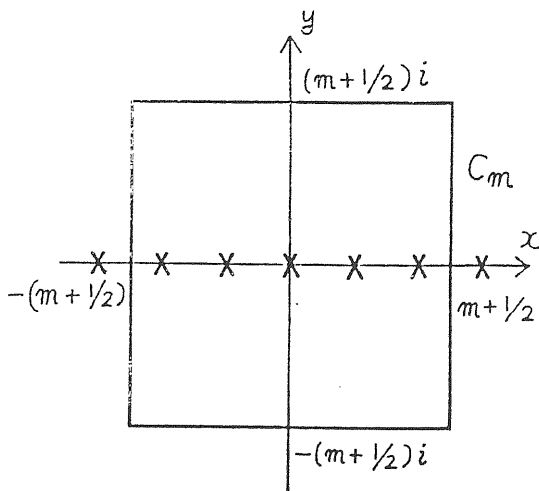


図 A - 3.

ところが, $m \rightarrow \infty$ とすると, $I_m \rightarrow 0$ となる

(問, これを示せ, $0 \leq \theta < 2\pi$ を使う)。

$$g(z) \text{の留数和} = -\frac{1}{2a} \frac{e^{ia\theta}}{e^{2\pi ia} - 1}$$

$$+ \frac{1}{2a} \frac{e^{-ia\theta}}{e^{-2\pi ia} - 1}$$

$$= -\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{i \sin \pi a} \cos a(\theta - \pi)$$

これより,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) e^{in\theta} = \frac{\pi}{a \sin \pi a} \cos a(\theta - \pi) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

(A-12)

と求まる。

$-2\pi \leq \theta \leq 0$ のときは, $g(n)$ が偶関数であることを
使おうと,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) e^{in\theta} = \frac{\pi}{a \sin \pi a} \cos a(\theta + \pi)$$

となる。

以上より,

$$x_s = \frac{1}{2\omega_x \sin \frac{\omega_x T}{2}} \left[\int_0^t f(s) \cos \omega_x$$

$$(t-s-T/2) ds + \int_0^T f(s) \cos \omega_x$$

$$(t-s+T/2) ds \right] \text{ となる。}$$

第1項目の積分は変形すると,

$$\int_T^{t+T} f(s) \cos \omega_x (t-s+T/2) ds$$

となるので(問 これを示せ),

(A-11) が導びかれる。

以上は暗に $0 \leq t < T$ を仮定していたが, この条件
をはずすことは容易である。(問, これを示せ。)

このような級数和を求めるテクニックを使うと, ②
の後半のような計算は不用である。

(d) 調和振動子の運動方程式を計算機で解く

(数値解析=軌道理論?)

調和振動子のような運動を表わす式を計算機で解く
ことができたなら, 軌道理論のかんりの部分を理解した
と思ってよいと思う(しかし, このことは実際にプロ
グラムを作って, 計算機で計算することを意味してい
ない)。

さて, 調和振動子

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

で $y = \frac{dx}{dt}$ とおくと,

$$\frac{d}{dt} y = -\omega^2 x \quad \frac{dx}{dt} = y \quad (\text{A-13})$$

となる。まずこれを次のように差分化してみよう。

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = -\omega^2 x_n,$$

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = y_n \quad (\text{A-14})$$

ここで, x_n 等は $x(n\Delta t)$ 等とする。

すると,

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t y_n$$

$$y_{n+1} = y_n - \omega^2 \Delta t x_n$$

となり, マトリックスで表わすと

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_n$$

となる。このマトリックスの固有値を λ_1, λ_2 とすると,

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 + \omega^2 \Delta t^2$$

となり, 少なくとも一つの固有値の絶対値は1より大きくなる。上の方程式を解くことは上のマトリックスを次々とかけることであるので, x がだんだん大きくなってしまふことがわかる。これでは, 明らかに調和振動子を計算機で解いたことにはならない。

次に, (A-14) の第二式で y_n を y_{n+1} としてみよう。するとこの差分方程式は, 次の差分方程式と同じになる。

$$\tilde{x} = x_n \quad \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x} + \Delta t \tilde{y}$$

$$\tilde{y} = y_n - \omega^2 \Delta t x_n \quad y_{n+1} = \tilde{y}$$

これをマトリックスで表わすと,

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}_{n+1} = M \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}_n$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 \Delta t & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-15})$$

となる。これからただちに,

$$\det M = 1$$

であることがわかる。つまり $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ である。 $\det M = 1$ であるから, この差分はさっきのより良いように思われる。では本当にだいじょうぶであろうか。 M は,

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \omega^2 \Delta t^2 & \Delta t \\ -\omega^2 \Delta t & 1 \end{pmatrix}$$

であり, $\det M = 1$ であるので, 軌道理論が使える。(第2章参照)

$$\cos \mu = 1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2}$$

であるので,

$$\omega \Delta t < 2, \quad \Delta t < 2/\omega$$

であれば, 固有値 λ_1, λ_2 の絶対値はちょうど1であるので, x はどんどん大きくなったり, また小さくなったりしないで, 調和振動子的に振動することがわかる。しかしそうはいっても, $\Delta t \sim 2/\omega$ ではたぶん調和振動子とはあまり似ていないのではないかと予想されるが, それをみるのに β 関数を求めてみよう。

すると,

$$\beta = \frac{\Delta t}{\sin \mu} = \frac{1}{\omega \sqrt{1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4}}}$$

となる。調和振動子の β は, $1/\omega$ であるから因子

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4}}}$$

がそのずれを表わすことになる。また, α は

$$\alpha = -\omega \Delta t / 2 \sqrt{1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4}}$$

となる。これから phase ellipse を図示すると図A. 4のようになる。

さて, 初期値 $x = x_0, y = 0$ をとって数値積分してみると, 図A. 4からそのうちに, $x_n > x_0$ となることがわかる。このように, $\omega \Delta t$ が大きいと調和振動子からはずれてくることになる。

さて (A-15) は図A. 5のように解釈することができ, これは収束力が周期的に配列されている lattice と全く同じになる。(図A. 6を参照)

このように軌道理論における安定性と数値不安定性は非常に似ているが, 上の数値不安定性の応用例(実

際には起こらないが) を示そう。図 A. 7 のように加速空胴がリングに 1 個おかれているとしよう。

通常、シンクロトロン振動は、

$$\ddot{\phi} + \omega_s^2 \phi = 0$$

とかかれるが、実際はこの微分方程式は差分方程式であったのを平均化してでてきたものである (第 2 章参照)。そしてもとの差分方程式は、調和振動子の差分式と同形であり、

$$\cos \mu = 1 - \frac{\omega_s^2 T^2}{2}$$

となる。これから

$$\omega_s T < 2$$

でないと不安定になることがわかる。これはまた、

$$\omega_s = 2\pi\nu_s/T$$

から

$$\nu_s < 1/\pi \approx 0.32$$

となり、(微分方程式で求めた) シンクロトロン振動数が、0.32 より大きいと実際にはこのシンクロトロン振動は不安定になることがわかる。しかし、現実のリングではこのような大きなシンクロトロン振動数をもつことはないので心配はない。(注、図で加速空胴のある場所で dispersion 関数がゼロであるなら、いくら加速空胴が長くても上のことがあてはまる)。

最後に上で求めた調和振動子を数値的に解くとき安定であった方法は、実は

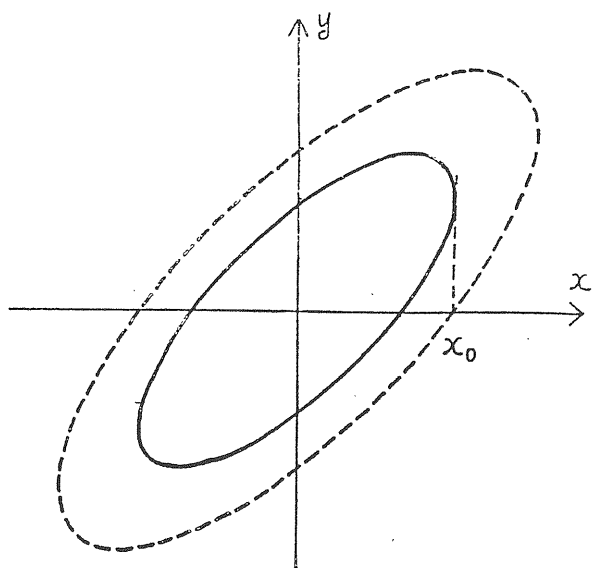


図 A - 4.

$$\frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{(\Delta t)^2} = -\omega^2 x_n$$

という単純な差分方程式であるということを指摘しておこう。

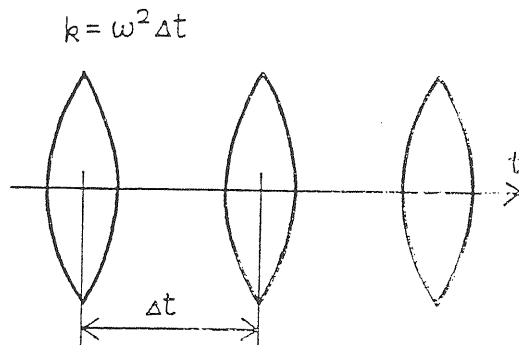


図 A - 5.

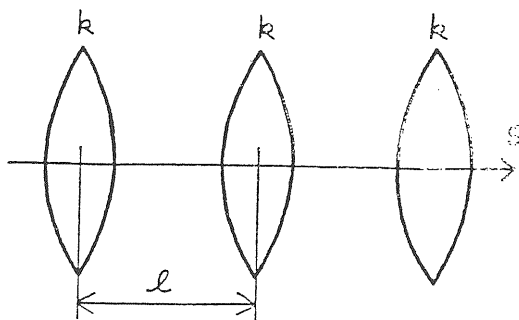


図 A - 6.

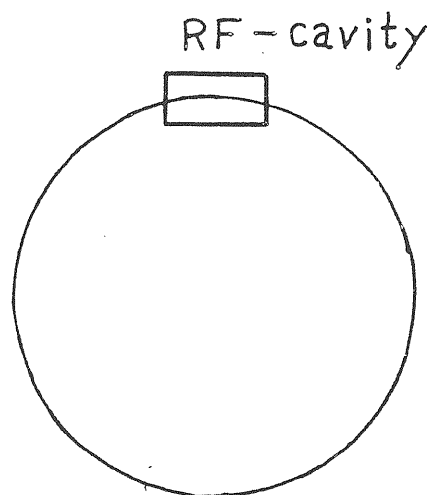


図 A - 7.

Appendix B シンクロトロン放射の性質

ここではシンクロトロン放射の性質を簡単に説明し、電子ストレージ・リングを考えると必要となる量を求める。以下ではいくつかの相対論、電磁気学、特殊関数の知識を必要とする。

(a) シンクロトロン放射の方向性 (角度 $\theta \sim 1/\gamma$)

ほとんど、光速に近い速度で走っている電子が磁場等によって、曲げられるとき放出する光はせまい角度にほとんど集中している。

その角度はおおよそ、

$$\theta \sim 1/\gamma \quad (\text{B-1})$$

で与えられる。ここで γ はローレンツ因子、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{B-2})$$

である。これは次のように考えれば簡単に出来る。まず電子が止ってみえる系 (ある時止っている系) に乗りうつってみると、力を受けて電子が放出する光の方向は、(力のベクトルの向きに依存するではあろうが)、まあいろいろな方向を向いていると考えてよい。特にある特別な方向のみに光が集中するということはない。たとえば、双極子放射 (dipole放射) などはそのようである。いま、仮に電子の静止系で図 B.1 のように光が放出されたとする。すると電子が動いている系では、図 B.2 のようになる。

これは次の関係式

$$p_{\parallel} = \frac{p'_{\parallel} + \beta \frac{E'}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_{\perp} = p'_{\perp}$$

$$E = \frac{E' + \beta c p'_{\parallel}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{B-3})$$

(ここで、 p_{\parallel} は電子の進む方向の momentum、 p_{\perp} はその方向に垂直な方向の momentum であり、ダッシュが付いているのは電子の静止系、ないのは動いている系に関する量をあらわす) より、この光について、

$$p_{\parallel} = \beta \gamma \frac{E'}{c} \quad (\text{B-4})$$

となる。ところが光は文字どおり光速で走っているので、

$$E' = c p' = c p'_{\perp} \quad (\text{B-5})$$

となる。(これは、 $p = \frac{E}{c^2} v$ よりでる)

これらから、動いている系での光の角度を θ とすると、

$$\tan \theta = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} = \frac{1}{\beta \gamma}$$

となり、 $\gamma \gg 1$ であることから、

$$\theta \sim 1/\gamma$$

となる。

また、静止系でみて、電子が動いている方向にでる光は、その反対方向にでる光とその系でエネルギーが等しくとも、動いている系ではエネルギーが非常に大きい ($\gamma \gg 1$ のとき) ことを注意しよう ((B-3) よりすぐにわかること)。これらのことから、ほとんどの放射のエネルギーは、 $\theta \sim 1/\gamma$ のせまい角度に集中していることがわかる。

(問 $E = 2.5 \text{ GeV}$ の電子の場合、この角度はどのくらいになるか)。

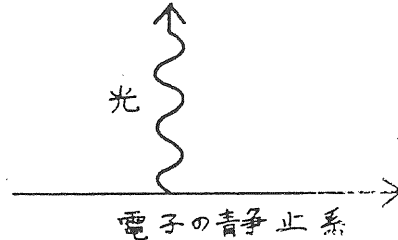


図 B-1.

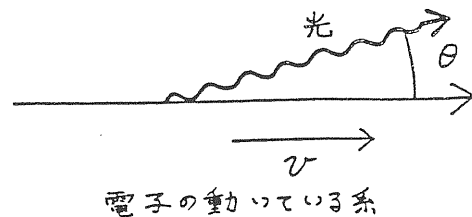


図 B-2.

(b) 光の周波数

次に、BMで放出された光を遠方で観測するという事について考えてみよう。

(a)の項でわかったように、相対論的電子 (光速に近い速度で走っている電子) は、角度 $\sim 1/\gamma$ の中に光を放出すると考えてよいので、遠方の観測者は、電子がBM中で角度 $\sim 1/\gamma$ だけ回転するのを見ているといつてよい (図 B.3 をみよ)。

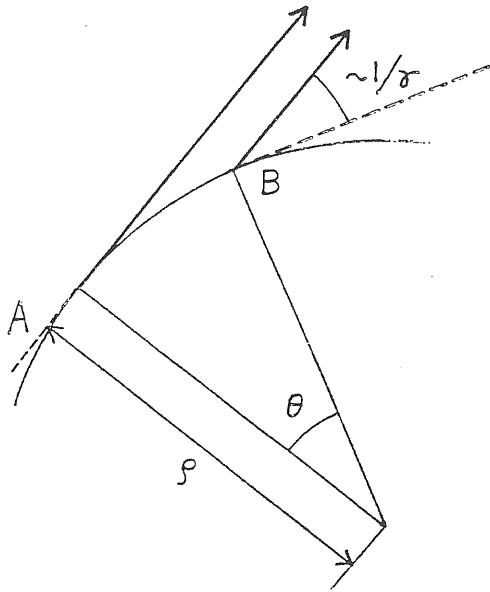


図 B - 3.

つまり電子が,

$$\Delta s = \rho \theta \sim \frac{\rho}{\gamma} \quad (\text{B-7})$$

の距離を走るのをみている(問 $\sigma = 8\text{m}$, 電子のエネルギーを 2.5GeV としたとき, その距離はいくらか)。

この距離を電子が走る時間 Δt は,

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{\rho}{\gamma v} = \frac{\rho}{\gamma \beta c} \quad (\text{B-8})$$

で与えられる。今, 図 B. 3 の A 点で光が放出されたとすると, この時間内に光は,

$$c \Delta t = \frac{\rho}{\gamma \beta} \quad (\text{B-9})$$

だけ A 点から進んでいる。そして光がそこまで来たとき, 電子は, Δs の距離曲がりながら進んで B 点にいる。この B 点でまた光が放出されたとすると, A 点で放出された光と B 点での光との位置の差 (観測者の方向について) Δl は, $\theta \ll 1$ より,

$$\begin{aligned} \Delta l &\approx \frac{\rho}{\gamma \beta} - \Delta s \cos \theta \approx \frac{\rho}{\gamma \beta} - \frac{\rho}{\gamma} \\ &\approx \frac{\rho}{\gamma} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \end{aligned}$$

で与えられる。これはまた,

$$\Delta l \approx \frac{\rho}{2\gamma^3} \quad (\text{B-10})$$

とかける。よって観測者はこれを光速でわった時間を

もつパルスを受けとることになる。

$$\delta t \sim \frac{\Delta l}{c} \sim \frac{\rho}{2c\gamma} \quad (\text{B-11})$$

パルスの時間幅の逆数が, このパルスの代表的な周波数であるので, それを ω_c とすると,

$$\omega_c \sim 2 \frac{c}{\rho} \gamma^3 \quad (\text{B-12})$$

となる。通常,

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c}{\rho} \gamma^3 \quad (\text{B-13})$$

なる周波数を臨界周波数 (critical frequency) という。

それに対応する光のエネルギー,

$$u_c = \hbar \omega_c = \frac{3}{2} \frac{\hbar c}{\rho} \gamma^3 \quad (\text{B-14})$$

を critical photon energy という。

(c) dipole radiation

非相対論的な双極子放射のパワー P は,

$$\begin{aligned} 4\pi \epsilon \cdot P &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{F^2}{m^2} \\ &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B-15})$$

と与えられる。これを以下で求めてみよう。

スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルは, ローレンツゲージ,

$$\text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

を使うと,

$$\Delta^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon \quad (\text{B-16})$$

$$\Delta^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j}$$

と与えられる (ただし単位系は MKS 単位系) (問, これを示せ)。

スカラーポテンシャルの解は (特解は),

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c})}{4\pi \epsilon r} \quad (\text{B-17})$$

と与えられる。ここで $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ である (問 (B-17) を直接微分することによって、または (B-16) を解くことによって (B-17) が解であることを示せ)。

(B-17) の物理的意味は明白である。それは、単にクーロンの法則に作用が光速で伝わることをくりこんだものになっているからである (問 これを示せ)。ベクトル・ポテンシャルの解は、成分ごとには、スカラー・ポテンシャルの場合と同じになるので、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c})}{r} \quad (\text{B-18})$$

となる。さて、 ϕ や \mathbf{A} を作る源から十分遠方では、

$$r = R - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' \quad (\text{B-19})$$

と近似できる。ここで、

$$R = |\mathbf{r}|, \quad \mathbf{n} = \mathbf{r}/R$$

である (問、これを示せ)。

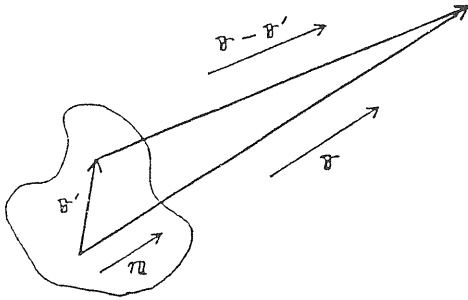


図 B-4.

よって (B-18) は遠方では、

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi R} \int d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}) \quad (\text{B-20})$$

となる。非相対論的な場合には、(B-20) は、

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi R} \int d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}) \quad (\text{B-21})$$

とすることができる。それは、

$$\Delta t \gg \frac{\Delta r'}{c} \approx \frac{v}{c} \Delta t \quad (\text{B-22})$$

となるからである (ここで v は源の代表的な速度)。

このように近似すると、源が電子 1 個の場合、

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = e\mathbf{v}\delta(t' - \mathbf{r}') \quad (\text{B-23})$$

であるから (\mathbf{r}_0 は電子の座標、 $e = -|e|$ とする)、

$$\mathbf{A} = \mu e \mathbf{v} (t - R/c) / 4\pi R \quad (\text{B-24})$$

と非常に簡単な式となる。

さて、電場 \mathbf{E} 、や磁場 \mathbf{H} を $1/R$ のべき乗で展開したとすると、十分遠方では $1/R$ の項のみが残ると考えてよいので、

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial R} \approx \mathbf{n} \times \frac{\mu}{4\pi R} \frac{\partial e\mathbf{v}(t - R/c)}{\partial R} \\ &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n} \end{aligned} \quad (\text{B-25})$$

となる。ただし、 $\dot{\mathbf{A}}$ は \mathbf{A} の時間微分で、

$$\dot{\mathbf{A}} = \mu e \dot{\mathbf{v}} (t - R/c) / 4\pi R \quad (\text{B-26})$$

である (問 これを示せ)。また、十分遠方では、局所的に平面波であると考えてよいので、

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n} = (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad (\text{B-27})$$

となる (問 これを示せ)。

さて、電磁場のエネルギーの流れは、ポインティングベクトル \mathbf{S} 、

$$\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{c}{\mu} \mathbf{B}^2 \mathbf{n} = \frac{1}{\mu c} \mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{n} \quad (\text{B-28})$$

と与えられるので、源から R 離れた場所のエネルギーのエネルギーの流れは、

$$\begin{aligned} dI &= S R^2 d\Omega = \frac{\mu e^2}{(4\pi)^2 c} (\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n})^2 d\Omega \\ &= \frac{\mu e^2}{(4\pi)^2 c} \dot{\mathbf{v}}^2 \sin^2 \theta d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B-29})$$

となる。ここで、 Ω は立体角、 θ は $\dot{\mathbf{v}}$ と \mathbf{n} とがなす角度である (問 これを示せ)。(B-29) を全立体角にわたって積分をすると、

$$I = \frac{\mu e^2}{6\pi c} \dot{\mathbf{v}}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{c^3} \quad (\text{B-30})$$

となる。(問 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ を使ってこれを示せ)。このエネルギーの流れは、すなわち、単位時間あたりに放射によって失われるエネルギー、つまり放射のパワーであるので、(B-15)がでる。さて、(B-29)より、ある方向とその反対方向では、エネルギーの流れが同じであるので、この dipole radiation によってエネルギーは失われるが、momentum は失われないことに注意しよう。

(d) シンクロトロン放射のパワー

ここでは、相対論的な速度で走っている荷電粒子(電子)が磁場中で曲げられるとき、放出する電磁場の全パワーを計算してみよう。これは前項の結果を使えば、以下のようにして簡単に得られる。まず、前項のおわりでのべたように、(B-15)を計算したときの座標系では、dipole radiation のもっている momentum はゼロである。(ある方向には momentum をもっているが、いろいろな方向をたし合わせるとゼロになる)。つまりこの座標系は、この radiation に対する固有座標系である。これはまた、電子の速度がゼロ(加速度はゼロでない)の系でもあるので、これは電子の固有座標系でもある。これより電子が走って見える系に乗りうつってみると、ある時間 $\Delta t'$ に radiation によって失われるエネルギーは $\Delta E'$ は固有座標系で失われるエネルギー ΔE を使って、

$$\Delta E' = r \Delta E$$

となる。ここで r は

$$r = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

で、 v は電子の速度である(問 これを示せ)。

また、 $\Delta t'$ は固有座標系での Δt と

$$\Delta t' = r \Delta t$$

の関係にあるので、

$$\frac{\Delta E'}{\Delta t'} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

となり、固有座標での放射のパワーは電子が走っている系でのそれと同じであることがわかる。つまりこのパワーは相対論的不変量であることがわかったということはまた(B-15)が相対論的に不変な形に掛けることを意味する。これを行なうには次のようにすればよい。

まず、(B-15)の dt は固有座標系での時間であるのでそのままよいが、これを $d\tau$ とかいて、固有座標系での時間を表わすものとする。ところが $(d\mathbf{p})^2$ は相対論的不変量ではない。つまり、(B-15)そのままでは、相対論に矛盾する。しかし相対論を信じるならば、不変量になるように(B-15)をかきかえる必要が、それはすぐに、

$$(d\mathbf{p})^2 \rightarrow (d\mathbf{p})^2 - (dE)^2/c^2$$

とすればよいことがわかる。そして以下で示すようにこれは非常に小さな補正にすぎない。こうすると、dipole radiation のパワー P は、

$$4\pi\epsilon P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2c^3} \left(\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 \right) \quad (\text{B-31})$$

と相対論的に不変な形に掛ける。そして $d\tau$ は電子の走っている系の dt と、

$$d\tau = (1-\beta^2)^{1/2} dt = \frac{dt}{\gamma} = \frac{mc^2}{E} dt$$

という関係にあるので、 P は

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon P &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2c^3} r^2 \left[\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{dt} \right)^2 \right] \\ &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2c^3} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \left[\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{dt} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B-32})$$

と掛ける。電子が磁場内で曲げられて出すシンクロトロン放射の場合には、第2項が無視できて、

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2c^3} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 / 4\pi\epsilon \quad (\text{B-33})$$

となる。この場合には、この P が電子の単位時間あたりに失なうエネルギーであるということを使って、また第2項が無視できると仮定すると、第1項と第2項との比は、

$$\left(\frac{dE}{cdt} \right)^2 / \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 \sim \frac{e^2}{m^2c^3} r^2 \frac{dE}{c^2 dt}$$

となる(問、これを示せ)。今相対論的電子を考えると、これはまた

$$r_e \frac{\gamma^2}{mc^2} \frac{dE}{dx}$$

となる(問 これを示せ)。ここで r_e は電子の古典半径 $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$ である。大きさの程度を見積るために、電子のエネルギーが距離 ℓ で全部失なわれたとすると、

$$\sim r_e r^3 / \ell$$

となる。これはたとえばトリスタンMRの場合、 $E=30$ GeVで1周するとエネルギーの損失が ~ 300 MeVであることを使うと、おおよそ、

$$\sim 3 \times 10^{-13} \text{ cm} \times (6 \times 10^4)^3 / (10^2 \times 3 \text{ km})$$

$$\sim 2 \times 10^{-6}$$

となり、第2項が無視できることがわかる。(ただし上の見積りは正しくはBM中のみで行なう必要があるので、よい評価ではないが第2項が小さいということを示す例として上げた。また上のことから高エネルギーでしかも短い距離でエネルギー損失が大きい場合には、第2項がきいてくるということがわかる)。

さて、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

を使い、相対論的電子を考えると、($v=c$)、(B-33)は、

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^4}{4\pi\epsilon_0 m^2 c} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 B^2$$

$$= \frac{2}{3} \frac{e^2 r_e c^3}{(mc^2)^3} E^2 B^2 \quad (\text{B-34})$$

となる。これはまた $P = \frac{E}{c} = eB\rho$ を使うと、

$$P = \frac{2}{3} \frac{c r_e}{(mc^2)^3} \frac{E^4}{\rho^2} \quad (\text{B-35})$$

と与えられる。これはbending magnet中で単位時間に放出される放射パワーであるので、リング一周での放射損失Uは、

$$U = \int P dt = \int P \frac{d\ell}{c} \quad (\text{B-36})$$

となる。ここで積分はリング一周についての積分をとるものとする。中心のエネルギーを持つ粒子に対するUを U_0 とおくと、

$$U_0 = \frac{2}{3} \frac{r_e E_0^4}{(mc^2)^3} \int \frac{ds}{\rho_0^2}$$

となり、曲率半径 ρ がすべてのbending magnetで共通の場合には、

$$U_0 = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(mc^2)^3} \frac{E_0^4}{\rho_0} \quad (\text{B-37})$$

となり、これはまた、

$$U_0 [\text{keV}] = 88.5 E_0^4 [\text{GeV}] / \rho_0 [\text{m}] \quad (\text{B-38})$$

と与えられる。

(e) 光子の放出のゆらぎ

ここでは電子の運動に関係のある光子の放出のゆらぎの二乗平均を計算してみよう。(ここでの計算は主に、H. Bruck, circular particle accelerators, LA-TR-72-10 Rev.による)(B-20)は次のようにかける。

$$A = \frac{\mu}{4\pi R} \int d\mathbf{r}' \int dt' j(\mathbf{r}', t') \delta\left(t' - t + \frac{R}{c} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right)$$

ここで δ はデルタ関数である。これから

$$A = \frac{\mu}{8\pi^2 R} \int d\mathbf{r}' dt' d\omega j(\mathbf{r}', t') e^{+i\omega(t' - t + \frac{R}{c} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c})}$$

となる。そこで

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(\omega) e^{-i\omega(t - \frac{R}{c})} d\omega$$

$$\tilde{A}(\omega) = \frac{\mu}{8\pi^2 R} \int d\mathbf{r}' dt' j(\mathbf{r}', t') e^{i\omega(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c})}$$

(B-39)

とおこう。すると非相対的な計算と同様にして、源からR離れた場所でのエネルギーの流れは、

$$dI = \frac{R^2}{\mu c} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}})|^2 d\Omega \quad (\text{B-40})$$

となる。

そしてこれを時間 t について $-\infty$ から $+\infty$ まで積分すると、その場所で受けとるエネルギーになる。これを dW とかくと、

$$dW = \int_{-\infty}^{+\infty} dI dt$$

となる。dI の式を展開すると、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{A}_i \dot{A}_j^* dt \quad (i, j = x, y, z)$$

という量がでてくるが、それは次のようになる。

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \omega' \tilde{A}_i(\omega) \tilde{A}_j^*(\omega') \\ &\times e^{-i(\omega - \omega')(t - \frac{R}{c})} d\omega d\omega' dt \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \omega' \tilde{A}_i(\omega) \tilde{A}_j^*(\omega') \\ &\times \delta(\omega - \omega') d\omega d\omega' \end{aligned}$$

$$= 4\pi \int_0^{\infty} \omega^2 \tilde{A}_i(\omega) \tilde{A}_j^*(\omega) d\omega$$

これより、

$$dW = \frac{4\pi R^2}{\mu c} \int_0^{\infty} \omega^2 |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{A}}(\omega))|^2 d\omega d\Omega \quad (\text{B-41})$$

となる。これと、(B-39) から

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} &= \frac{1}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| dt d\mathbf{r} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{j}) \right. \\ &\left. e^{i\omega(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/c)} \right|^2 \quad (\text{B-42}) \end{aligned}$$

となることがわかる。

ここで、

$$\mathbf{j} = ev \delta(\mathbf{r}_0(t) - \mathbf{r}) = ec \boldsymbol{\beta} \delta(\mathbf{r}_0(t) - \mathbf{r})$$

であるので、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} &= \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \cdot \frac{1}{4\pi \epsilon} \left| \int dt (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})) \right. \\ &\left. e^{i\omega(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t)/c)} \right|^2 \quad (\text{B-43}) \end{aligned}$$

となる。これは一般の放射光のスペクトルを求めると

きに基本となる式である。以下これを bending magnet からの放射光の場合に適用しよう。bending magnet からの光は水平方向に一様に放射されるので 図 B.5 のように \mathbf{n} ベクトルをとっても一般性を失わない。

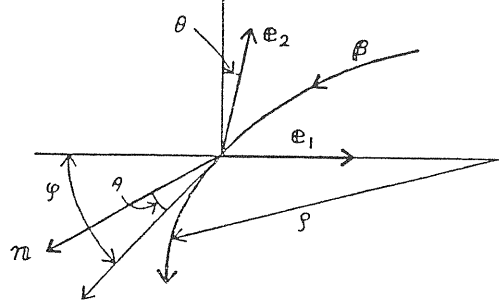


図 B-5.

これから

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) &= (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} \\ &= \boldsymbol{\beta} \left[-e_1 \sin\left(\frac{v}{\rho} t\right) + e_2 \cos\left(\frac{v}{\rho} t\right) \sin \theta \right] \end{aligned} \quad (\text{B-44})$$

となり、また

$$\omega \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t)}{c} \right) = \omega \left(t - \frac{\rho}{c} \sin\left(\frac{v}{\rho} t\right) \cos \theta \right)$$

となるが、これは次のように展開できる。

$$\approx \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{r^2} + \theta^2 \right) t - \frac{c^2}{3\rho^2} t^3 \right]$$

そして放射光が $\theta \sim 1/r$ の角度に放射されるということ、 $v \approx c$ であることを使うと高次の項は無視できることがわかる。また、(B-44) も、上のことと、非常に小さな t のときに放出された光のみが観測する場所に主にとどくことに注意して、

$$\approx \left[-e_1 \frac{c}{\rho} t + e_2 \theta \right]$$

と近似すると、(B-43) は、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} &= \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| -e_1 A_1(\omega) + e_2 A_2(\omega) \right|^2 \\ &\times \frac{1}{4\pi \epsilon} \end{aligned} \quad (\text{B-45})$$

$$A_1 = \frac{c}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{if(t)} dt,$$

$$A_2 = \theta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{if(t)} dt$$

$$f(t) = \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{r^2} + \theta^2 \right) t - \frac{c^2}{3\rho^2} t^3 \right]$$

となる。

ここで、

$$x = ct/\rho \left(\frac{1}{r^2} + \theta^2 \right)^{1/2}, \quad \xi = \frac{\omega\rho}{3c} \left(\frac{1}{r^2} + \theta^2 \right)^{3/2}$$

というちょっとごちゃごちゃした変換を行ない、また (B-45) のベクトルの内積を計算してやると、

$$\frac{d^2 w}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} (A_1^2(\omega) + A_2^2(\omega)) / 4\pi \epsilon \quad (\text{B-46})$$

となる。ここで A_1, A_2 は、

$$A_1 = \frac{\rho}{c} \left(\frac{1}{r^2} + \theta^2 \right) \int_0^{+\infty} x \sin \left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx$$

$$A_2 = \frac{\rho}{c} \theta \left(\frac{1}{r^2} + \theta^2 \right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \cos \left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx$$

である。これらの積分はエアリー-の積分 (Watson, Theory of Bessel function, section 6.4 を参照)

$$\int_0^{\infty} \cos(t^3 + xt) dt = \frac{\sqrt{x}}{3} K_{1/3} \left(\frac{2x\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \right)$$

と、この式の両辺を x で微分することによって、

$$\int_0^{\infty} \cos \left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \right] dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(\xi)$$

$$\int_0^{\infty} x \sin \left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \right] dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\xi)$$

と求まる。

これを (B-46) に代入すると、

$$\frac{d^2 w}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{e^2}{3\pi^2 c} \left(\frac{\omega\rho}{c} \right)^2 \left(\frac{1}{r^2} + \theta^2 \right)^2 \left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{1/r^2 + \theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right] \quad (\text{B-47})$$

となる。(ここで上の導出からわかるように、第一項は光の電場が水平方向に向いている項であり、第二項は垂直方向に向いている項である)

さて、 $d\Omega$ は図 B.5 から

$$d\Omega = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta d\varphi = \cos\theta d\theta d\varphi$$

となるので

$$\frac{d^2 w}{d\omega d\varphi} d\varphi = \left[\int d\theta \cos\theta \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} \right] d\varphi \quad (\text{B-48})$$

となるが、放射光は $\theta \sim 1/r \ll 1$ に集中しているので $\cos\theta = 1$ として θ の積分範囲を $-\infty$ から ∞ にとることができる。

また、

$$d\varphi = \frac{ds}{\rho} = \frac{v}{\rho} dt \approx \frac{c}{\rho} dt$$

であるので (B-48) は、

$$\frac{d^2 W}{d\omega dt} = \frac{c}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} \quad (\text{B-49})$$

ともかくことができる。

ところで (エネルギーの流れ I を P とおくと)

$$P = \frac{dW}{dt}$$

であったので

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{d^2 W}{d\omega dt} \quad (\text{B-50})$$

となる。さて第3章に出てきた $\langle Nu^2 \rangle$ は単位時間あたりの量であったので、

$$\langle Nu^2 \rangle = \int_0^{\infty} n(u) u^2 du \quad (\text{B-51})$$

となる。ここで $n(u)$ は u のエネルギーをもつ光子が単位時間に放出される割合 (確率密度) である。する

と、

$$u n(u) du = \frac{dP}{du} du = \frac{dP}{d\omega} d\omega \quad (u = \hbar\omega)$$

$$(B-52)$$

となるので、以上より、

$$\langle Nu^2 \rangle = \frac{\hbar c}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta \int_0^{\infty} \omega \frac{d^2 W}{d\omega d\varrho} d\omega$$

$$(B-53)$$

と求まる。まず ω についての積分であるが、変数を ξ にとると、

$$\int_0^{\infty} \omega \frac{d^2 W}{d\omega d\varrho} d\omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{27e^2}{\pi^2 c} \left(\frac{c}{\rho}\right)^2 \frac{1}{\alpha^4}$$

$$\left[\int_0^{\infty} \xi^3 K_{2/3}^2(\xi) d\xi + \frac{\theta^2}{\alpha} \int_0^{\infty} \xi^3 K_{1/3}^2(\xi) d\xi \right]$$

$$(\alpha = 1/r^2 + \theta^2) \quad (B-54)$$

この積分は以上のようにして求まる。(Watson, section 6.22 の)

$$K_{\nu}(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \cosh t} \cosh \nu t dt \quad (B-55)$$

をつかうと初等的計算により

$$K_{\nu}^2(z) = 2 \int_0^{\infty} K_{2\nu}(2z \cosh t) dt$$

となる (Watson, section 13.72)。これより、

$$\int_0^{\infty} z^n K_{\nu}^2(z) dz$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dz dt z^n K_{2\nu}(2z \cosh t)$$

$$= 2 \int_0^{\infty} dy y^n K_{2\nu}(y) \int_0^{\infty} \frac{dt}{(2 \cosh t)^{n+1}}$$

$$(B-56)$$

となる。二番目の積分は、 $x = e^{2t}$ とすると

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(2 \cosh t)^{n+1}} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(e^t + e^{-t})^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{x^{\frac{n+1}{2}-1}}{(1+x)^{n+1}} dx$$

となり、逆に $x = e^{-2t}$ とすると、

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n+1}{2}-1}}{(1+x)^{n+1}} dx$$

となる。これより

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(2 \cosh t)^{n+1}} = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{n+1}{2}-1}}{(1+x)^{n+1}} dx$$

となる。ここでベータ関数

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1} ds$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$$

を使うと、この積分は、

$$= \frac{1}{4} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \quad (B-57)$$

となることがわかる。また (B-56) の一番目の積分は (B-55) を使うと、

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dy y^n e^{-y \cosh t} \cosh \nu t dt$$

$$= \int_0^{\infty} dx x^n e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{\cosh \nu t dt}{(\cosh t)^{n+1}}$$

$$= n! \int_0^{\infty} \frac{\cosh \nu t dt}{(\cosh t)^{n+1}}$$

となるがこれも (B-57) を求めたときと全く同様に、 $(x = e^{2t}, x = e^{-2t})$ として2つの積分をつくると)

$$= 2^{n-1} n! B\left(\frac{n+1+\nu}{2}, \frac{n+1-\nu}{2}\right)$$

(ただし $n+1 > \nu$)

となる、Bをガンマ関数で表わすと、

$$= 2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+1+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1-\nu}{2}\right)$$

となる (Watson, Section 13.21)。

以上より、(B-56) は

$$\int_0^{\infty} z^n K_{\nu}^2(z) dz = 2^{n-2} \Gamma\left(\frac{n+1+\nu}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{n+1-\nu}{2}\right) B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

となる。これより、

$$\int_0^\infty z^3 K_{\nu}^2(z) dz = \frac{1}{3} \nu (1-\nu^2) \Gamma(\nu) \Gamma(1-\nu)$$

となる。ここでガンマ関数の (最も美しい) 性質

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

を使うと、

$$= \frac{\pi}{3} \nu (1-\nu^2) / \sin \pi \nu \quad (\text{B-58})$$

となることがわかる。

これより、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \xi^3 K_{3/3}^2(\xi) d\xi &= \frac{20\pi}{3^4 \sqrt{3}} \int_0^\infty \xi^3 K_{1/3}^2(\xi) d\xi \\ &= \frac{2^4 \pi}{3^4 \sqrt{3}} \quad (\text{B-59}) \end{aligned}$$

となる。次に (B-53) の θ に関する積分でくるものに、

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{(1/r^2 + \theta^2)^4}, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^2 d\theta}{(1/r^2 + \theta^2)^5}$$

があるが、これも次のようにして求まる。

$$I_1 = 2 \int_0^\infty \frac{d\theta}{(1/r^2 + \theta^2)^4} = r^7 \int_0^\infty \frac{x^{-1/2} dx}{(1+x)^4}$$

$$= r^7 B\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$I_2 = r^7 \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{(1+x)^5} = r^7 B\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

となり、

$$I_1 = \frac{5\pi r^7}{2^4}, \quad I_2 = \frac{5\pi r^7}{2^7} \quad (\text{B-60})$$

となる。(B-59) を (B-54) に代入し、(B-60) を (B-53) に代入すると、

$$\langle Nu^2 \rangle = \frac{\hbar e^2}{\rho} \left(\frac{c}{\rho}\right)^2 r^7 \cdot \frac{55}{2^3 3 \sqrt{3}} / 4\pi\epsilon \quad (\text{B-61})$$

と求まる。

これを P_r と u_c で表わすと、

$$\langle Nu^2 \rangle = P_r u_c \frac{55}{2^3 3 \sqrt{3}} \quad (\text{B-62})$$

となる。さらにこれをリング一周について平均すると、

$$\overline{\langle Nu^2 \rangle} = \frac{U_0 u_c}{T} \frac{55}{2^3 3 \sqrt{3}} \quad (\text{B-63})$$

となる。(ただし曲率半径 ρ はすべての bending magnet で同じとする)