

# A班 光速測定

8/25/2015

太田  
三野  
羽田野  
鮫島

加藤  
篠原  
石黒  
下村

# はじめに

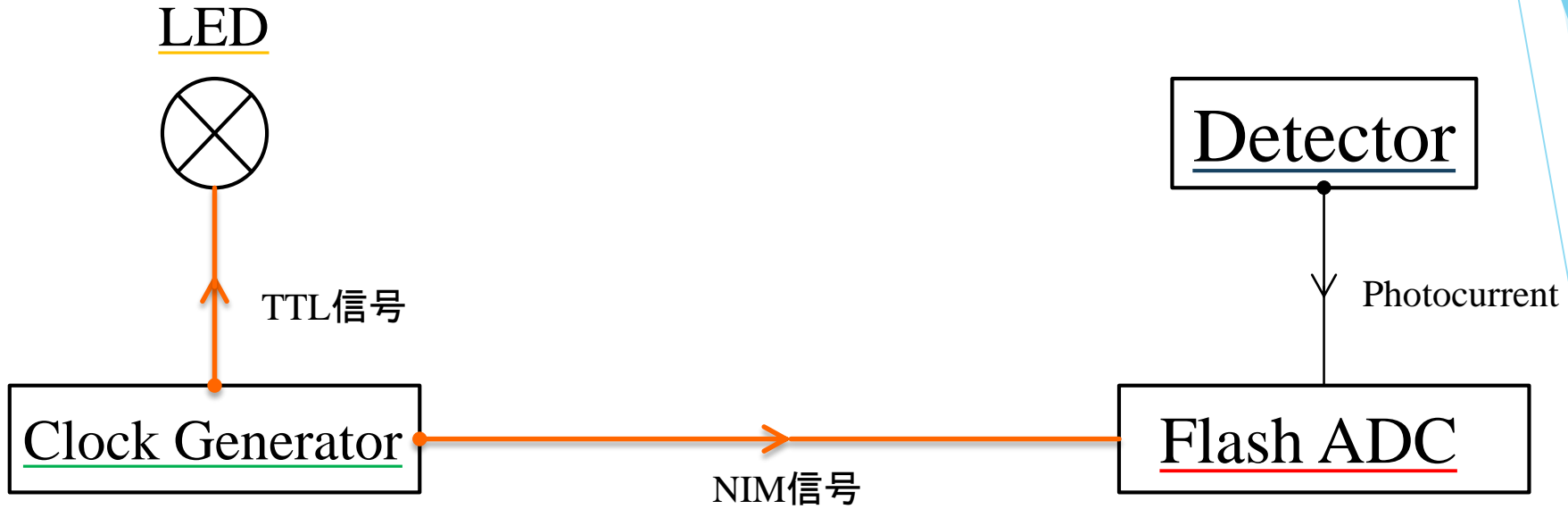
様々な距離について、光子の到達時間を測定し、  
飛行距離と飛行時間の関係から光速度を測定した。

# 実験原理

太田 寛明

# 実験原理

図1 実験装置略図1



上図のように実験装置を配置して光速の測定を行った

# 実験原理

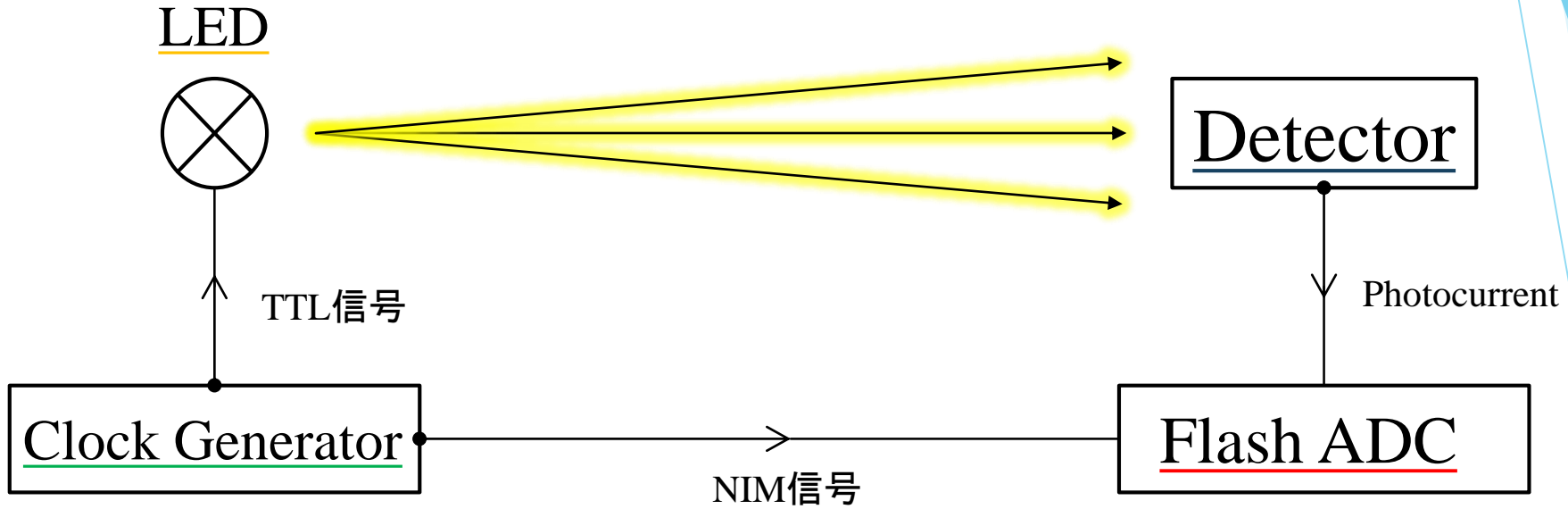
図1 実験装置略図1



1) Clock Generator より二つの信号が Flash ADC と LED にそれぞれ伝わる

# 実験原理

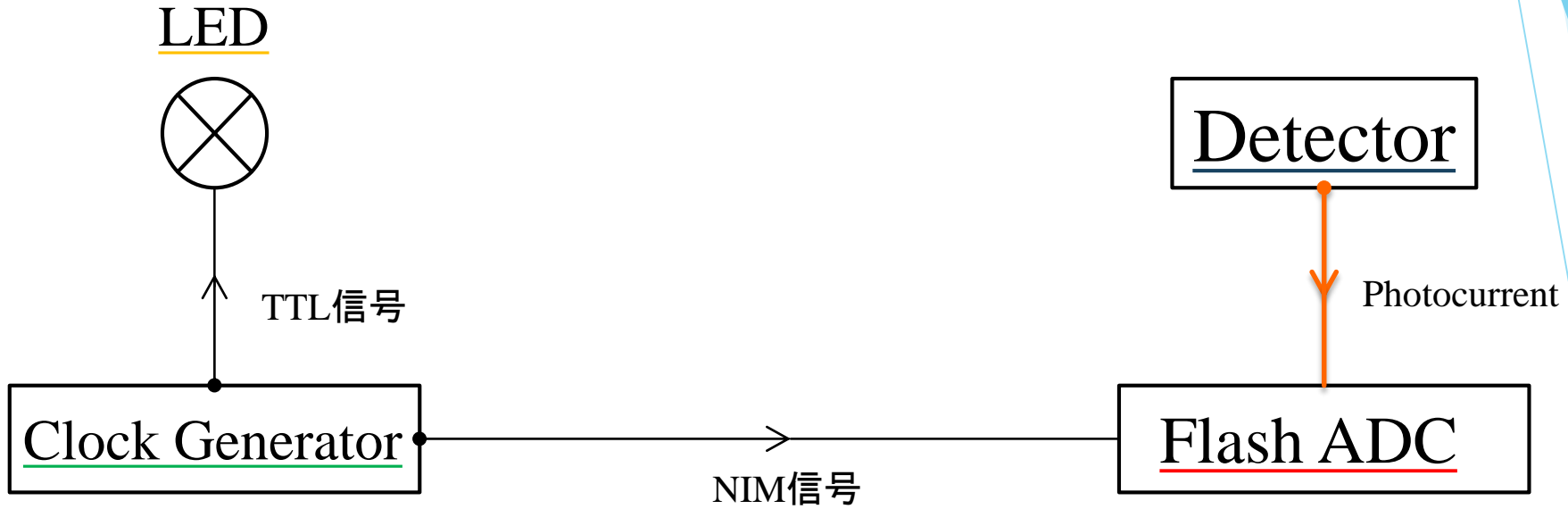
図2 実験装置略図2



2) LED から発せられた光を Detector が検出する

# 実験原理

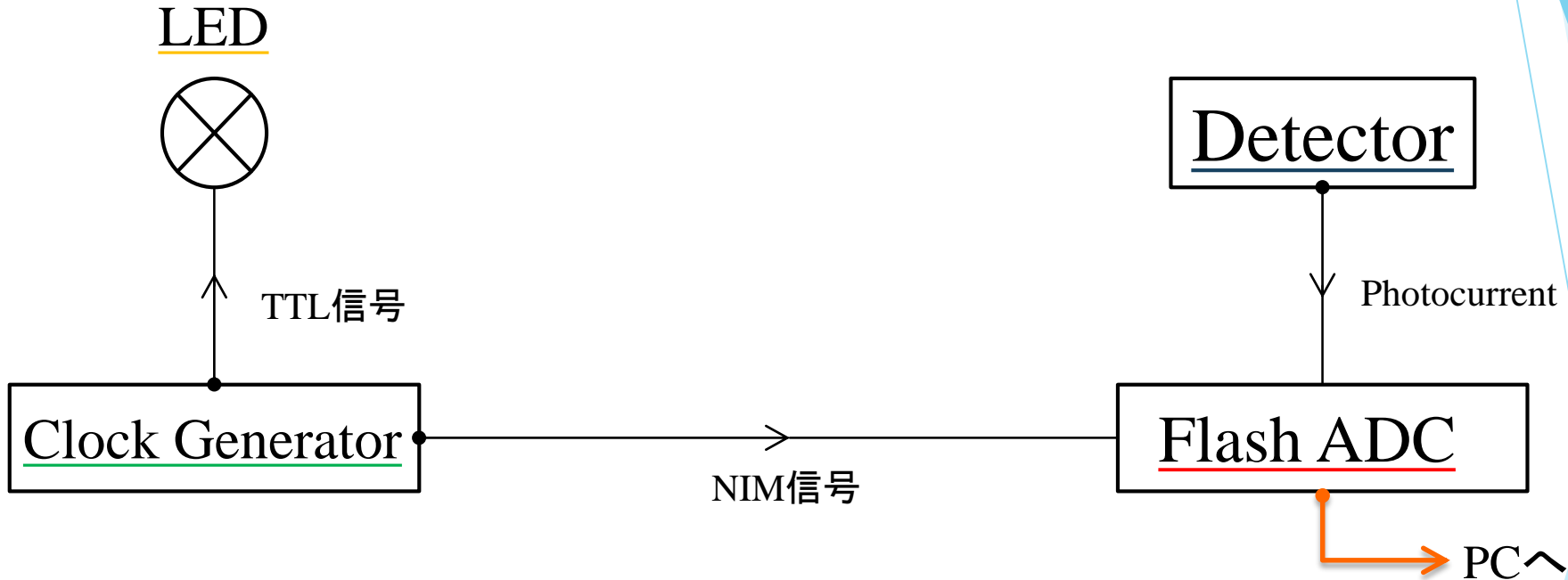
図3 実験装置略図3



3) 光を検出した Detector は光電流を発する

# 実験原理

図4 実験装置略図4

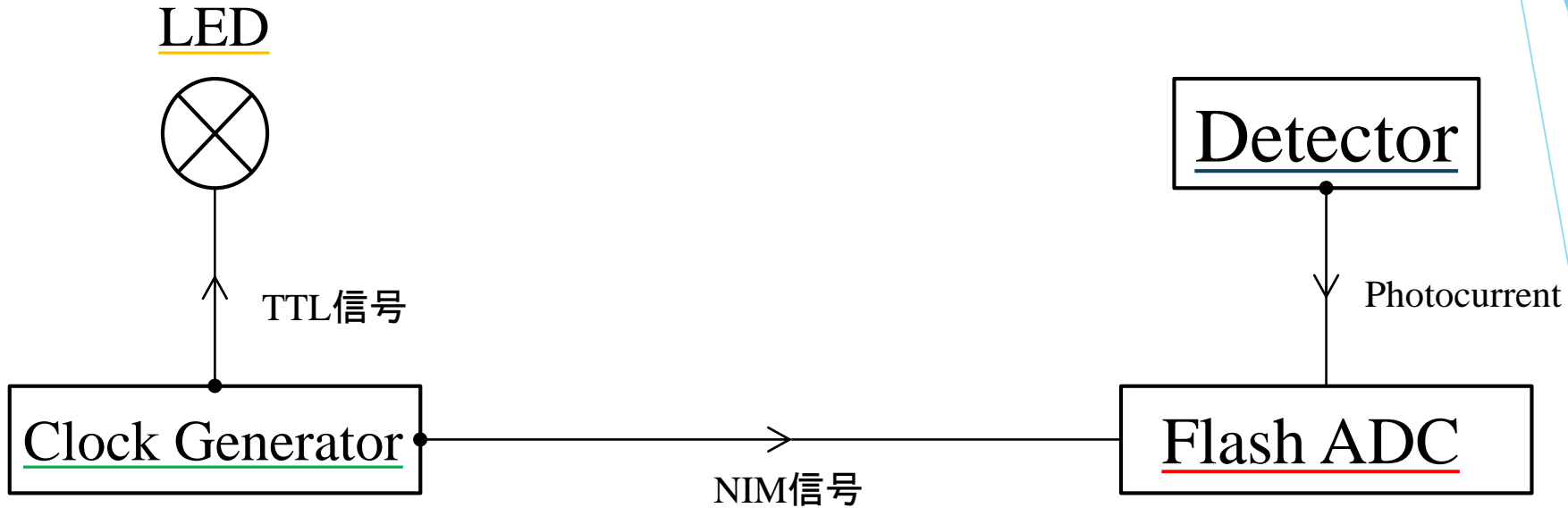


- 4) Flash ADC は、NIM信号をトリガーにして、光電流の波形を測定し、PCへデータを送る



# 実験原理

図4 実験装置略図4

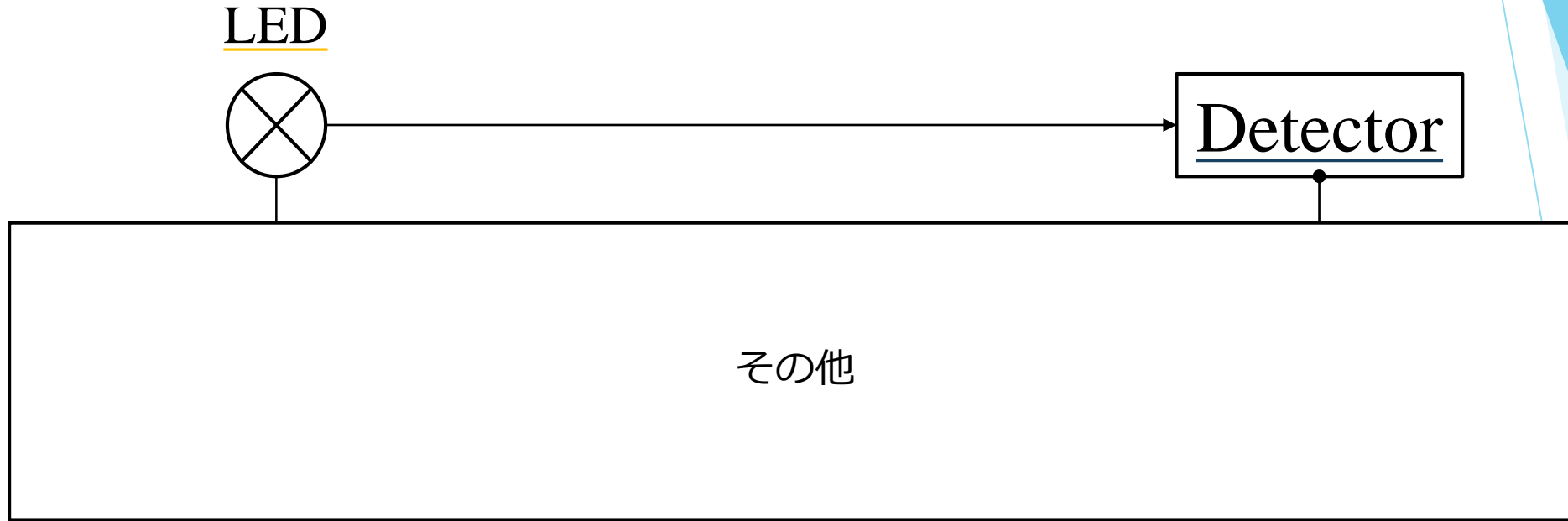


注) 以上の 1) ~ 4) のサイクルが数十nsで行われる

500Hzの信号を用いているため、各サイクルの間隔は数ms  
よって各々のサイクルで、独立に測定が行える

## 実験原理

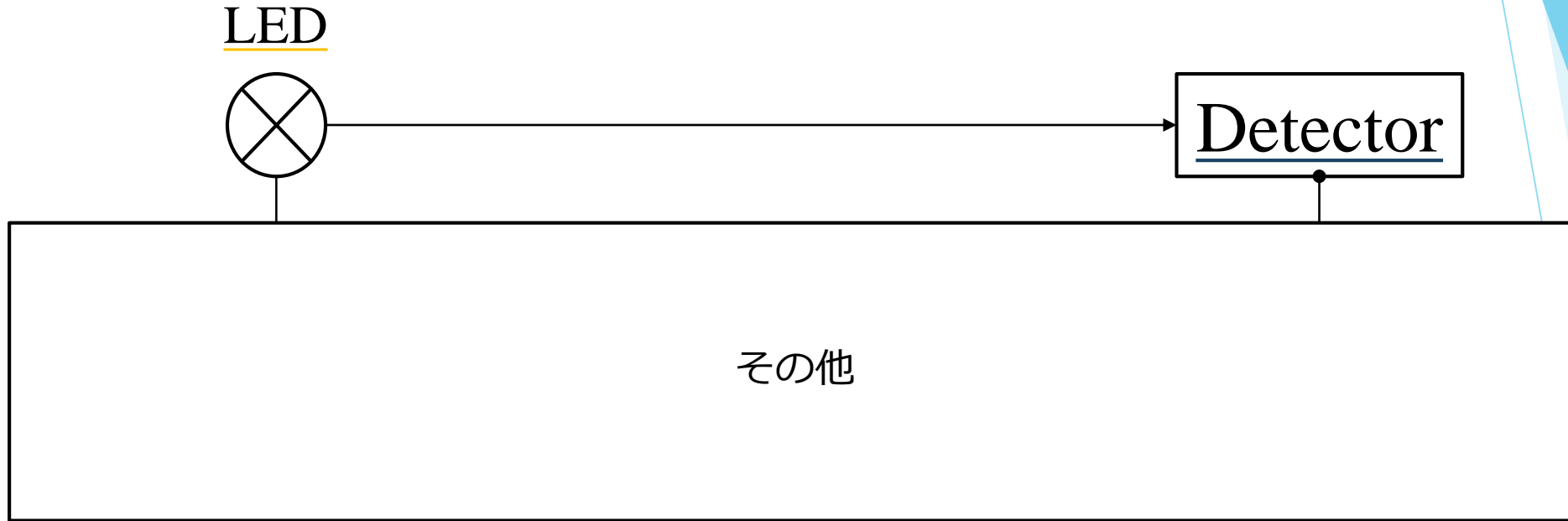
図5 実験装置略図5



光速度を正確に測定するため、任意の部分についてのタイムラグについて考慮したいので、LED, Detector間の部分とそれ以外の部分に分けて考える

# 実験原理

図5 実験装置略図5



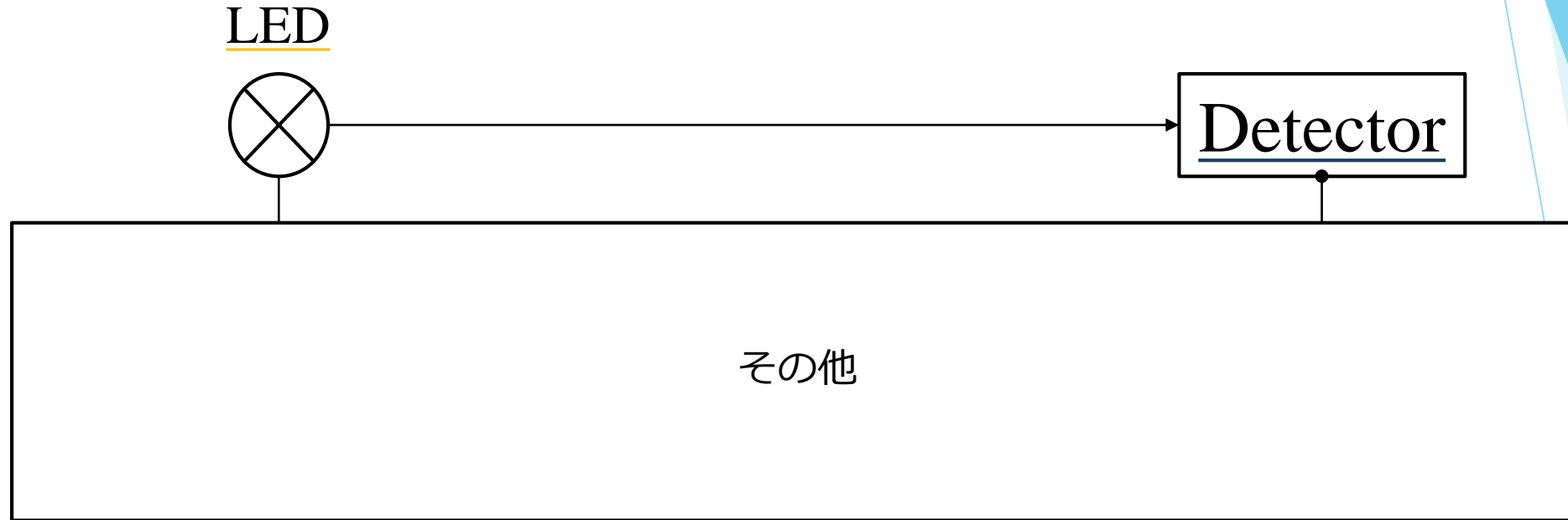
計測で得られる時間は、実際には、

LED, Detector間の光の通過時間+  
その他部分におけるタイムラグ

である

# 実験原理

図5 実験装置略図5



よってDetectorの地点 $i$ ( $=1,2,3,4,5$ )について、1サイクルの平均時間を $T_i$ とすると、

$$T_i = \text{LED, Detector間の光の通過時間} + \text{その他部分におけるタイムラグ}$$

## 実験原理

1 サイクルの平均時間が実際に測定される時間の平均であるから、測定する各々の距離に対する平均時間のグラフを書くと下図のようになる。

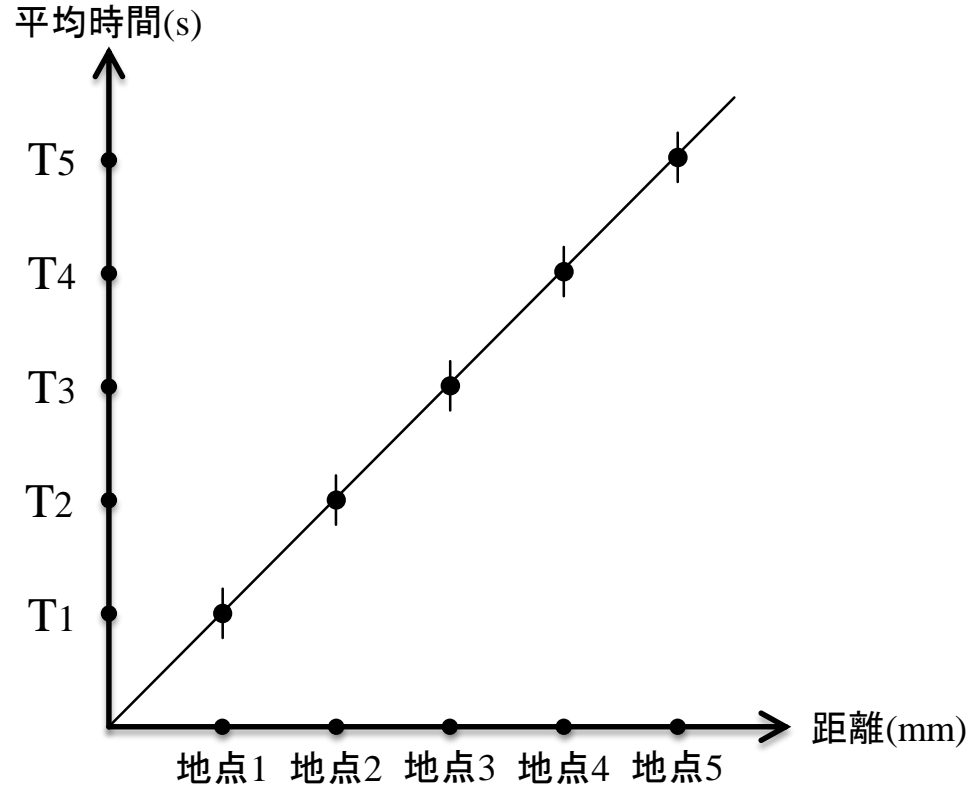


図6 光速度を求めるグラフ1

## 実験原理

複数地点で測定を行っているため、時間については、各々地点に対する時間の差を用いることになる

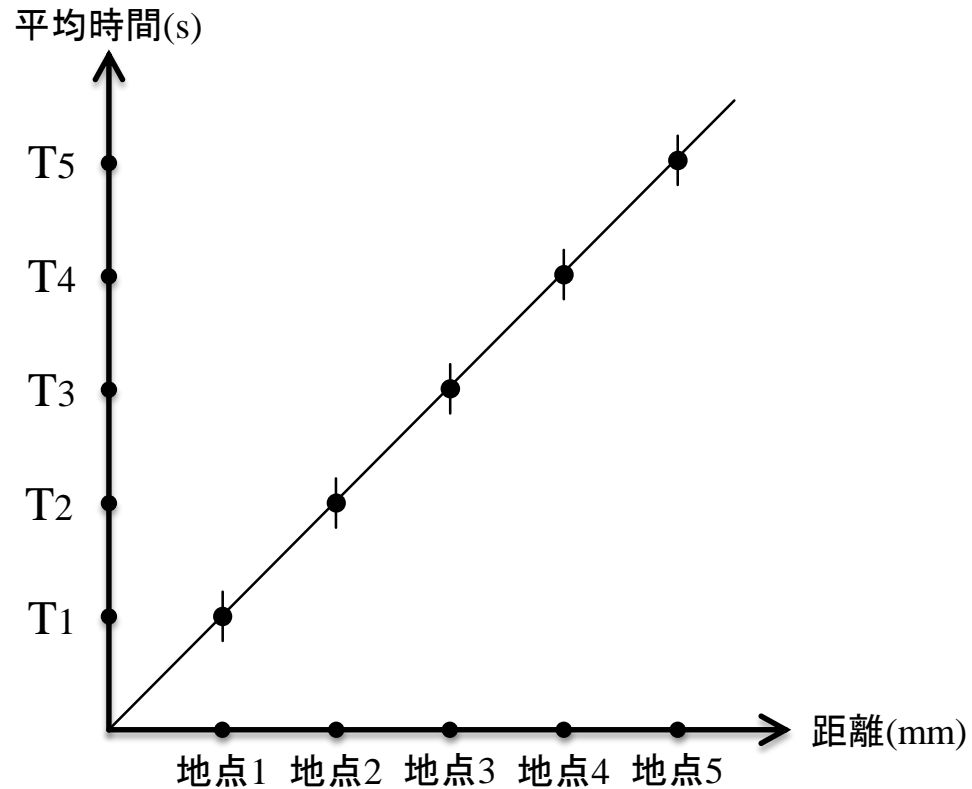


図6 光速度を求めるグラフ1

## 実験原理

よって実際には、LED,Detector間を光が通り過ぎる時間を測定していることになる。

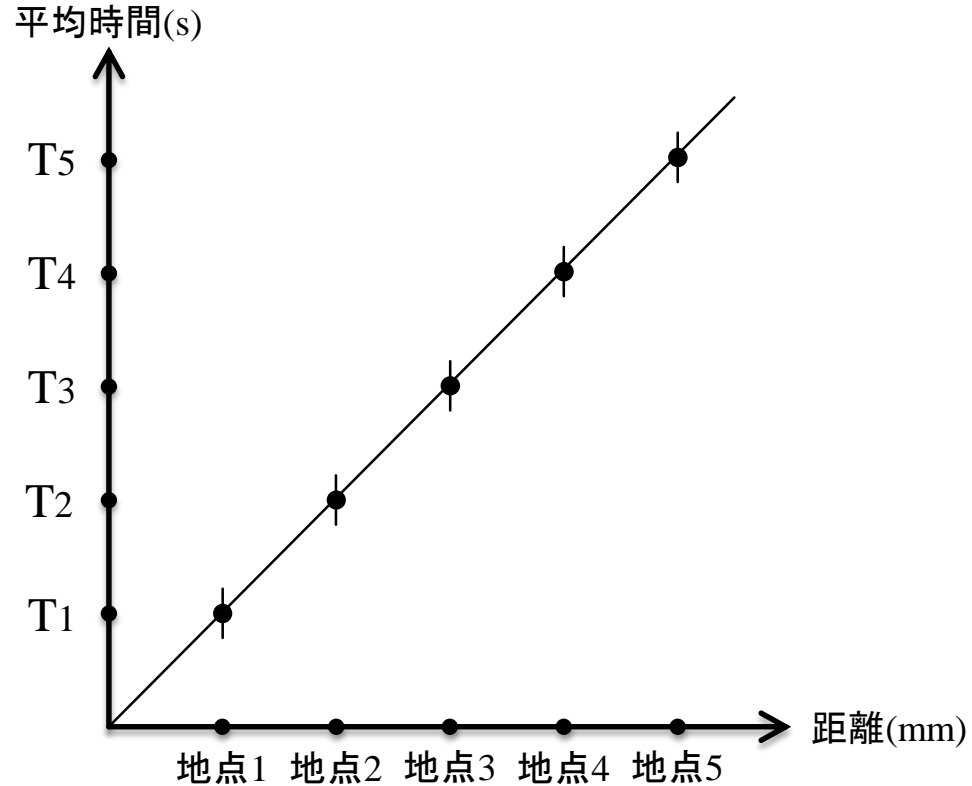


図6 光速を求めるグラフ1

## 実験原理

したがって下図の傾きの逆数が光速度になる

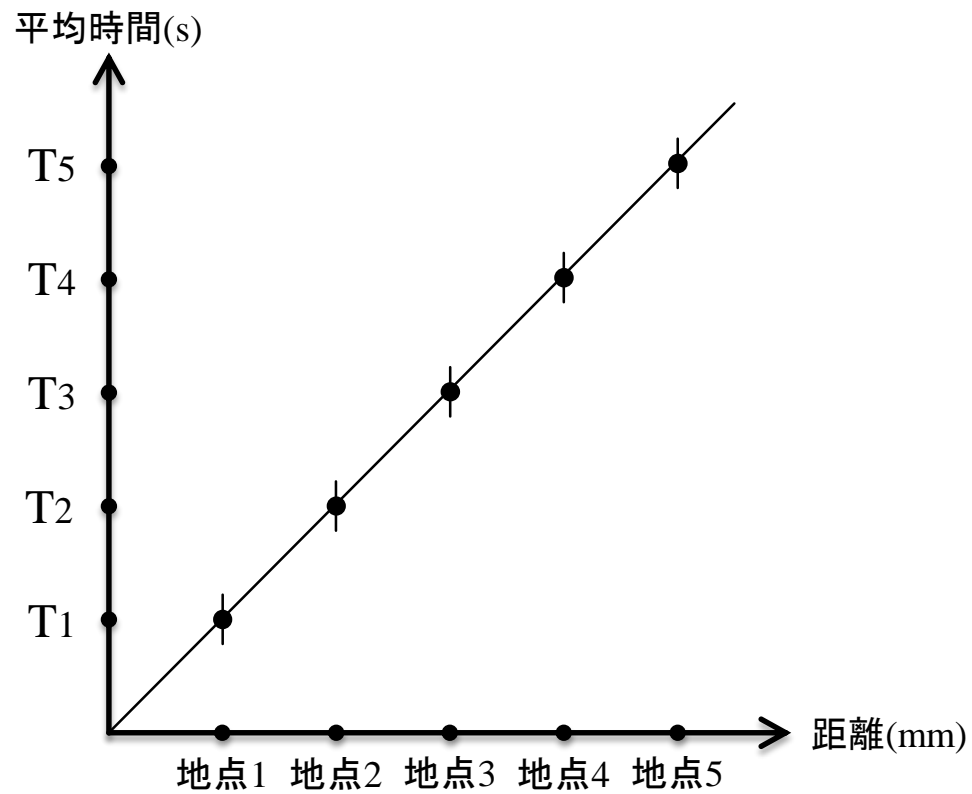


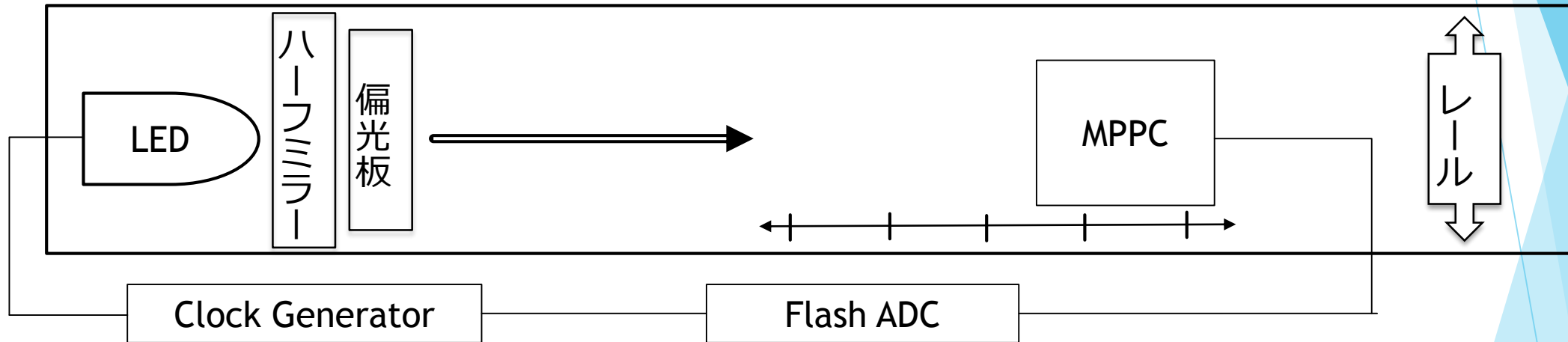
図6 光速度を求めるグラフ1



# 実験装置の説明

担当：石黒・三野

# 実験装置の全体図



# レール

レール



レール

- ▶ 2本の金属製のレールを用いて実験装置を作成。
- ▶ 反射光をなるべく減らすために遮光テープで表面をしっかりと覆った。

- ▶ LEDとMPPCの距離を変えて5点について測定を行い、測定中にLEDとMPPCがずれると観測結果に影響が出るため各地点でLEDとMPPCをネジでレールに固定する

# 偏光板(Polarizing Plate)

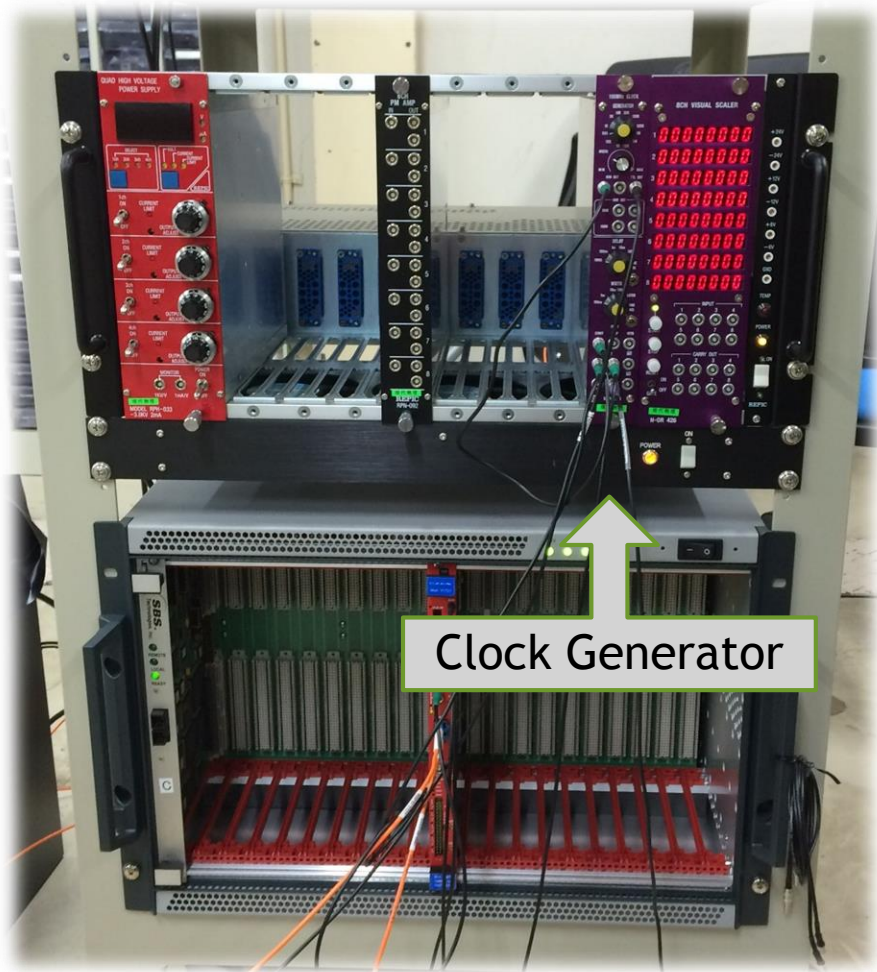
- ◆ 偏光板は特定方向に偏光した光だけに限って通過させる板である。
- ◆ LEDからMPPCに到達する光子数を調整するためのもの



# ハーフミラー (Half Mirror)

- ▶ 入射する光の一部を反射し、一部を透過する鏡のうち、反射光と透過光の強さがほぼ同じもの。
- ▶ LEDからの光量を約半分に調整する。

# クロックジェネレーター (Clock Generator)



- ▶ 矩形波の周波数や山の幅を設定することで、NIM信号やTTL信号を他の装置に同時に出力することができる装置。

# 実験で用いた2つの信号

- ▶ NIM信号(オシロスコープ or FLASH ADCに入力)

役割：LEDが発光するタイミングを教える。

表1.NIM 規格での論理信号の定義

状態	電圧
1(ON)	-0.8V
0(OFF)	0V

- ▶ TTL信号(LEDに入力)

役割：LEDを発光させる。

表2.TTL 規格での論理信号の定義

状態	電圧
1(ON)	5V
0(OFF)	0V



# LED(Light Emitting Diode)

- ▶ LEDは応答速度(電源投入から定常点灯に至る時間)が速い。

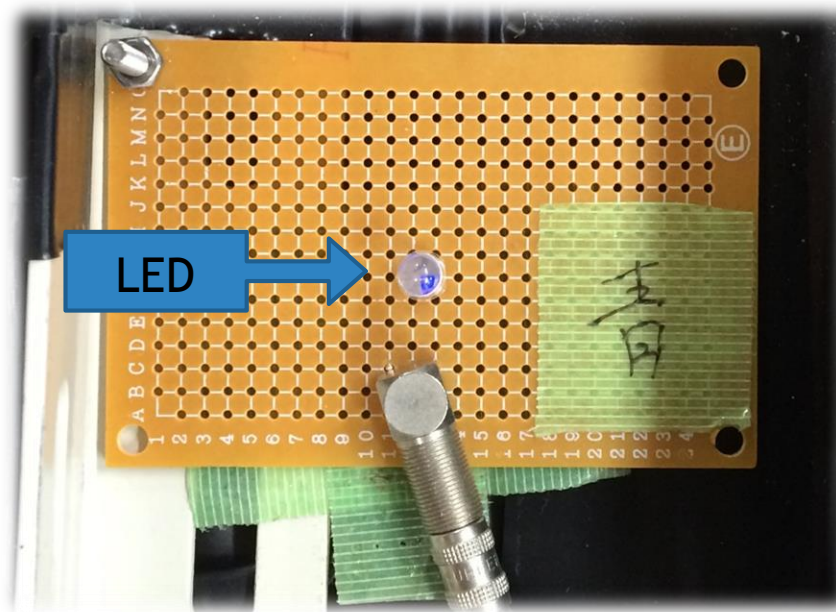


表3.様々な光源の応答速度

特性項目 \ 光源	LED	白熱電球	蛍光ランプ
応答速度	100[ns]以下	0.15~0.25[s]	1~2[s]



# LEDの構造と発光原理

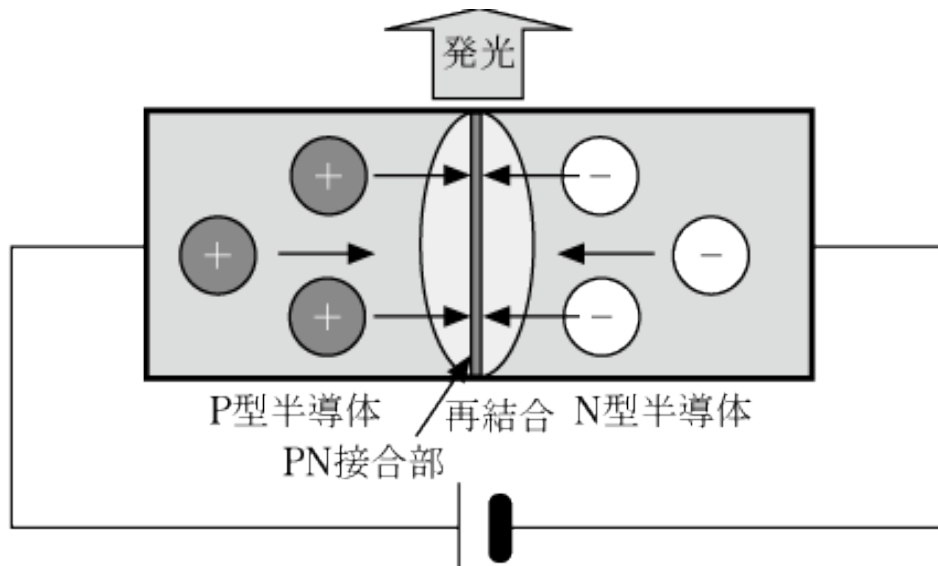


図.LEDの発光原理

図のように順方向に電圧をかける

ホールと電子が各半導体領域をPN接合部に向かって移動する

ホールと電子が接合領域で再結合して、より小さなエネルギー状態になる。

余分なエネルギーが光に変換されて発光する。

# • MPPC

▶ 今回の実験に用いた光検出器

APD（アバランシェフォトダイオード）ピクセルを敷き詰めた構造をしている。

## MPPCの利点

- 高いフotonカウンティング能力
- 磁場耐性あり
- 比較的安価である

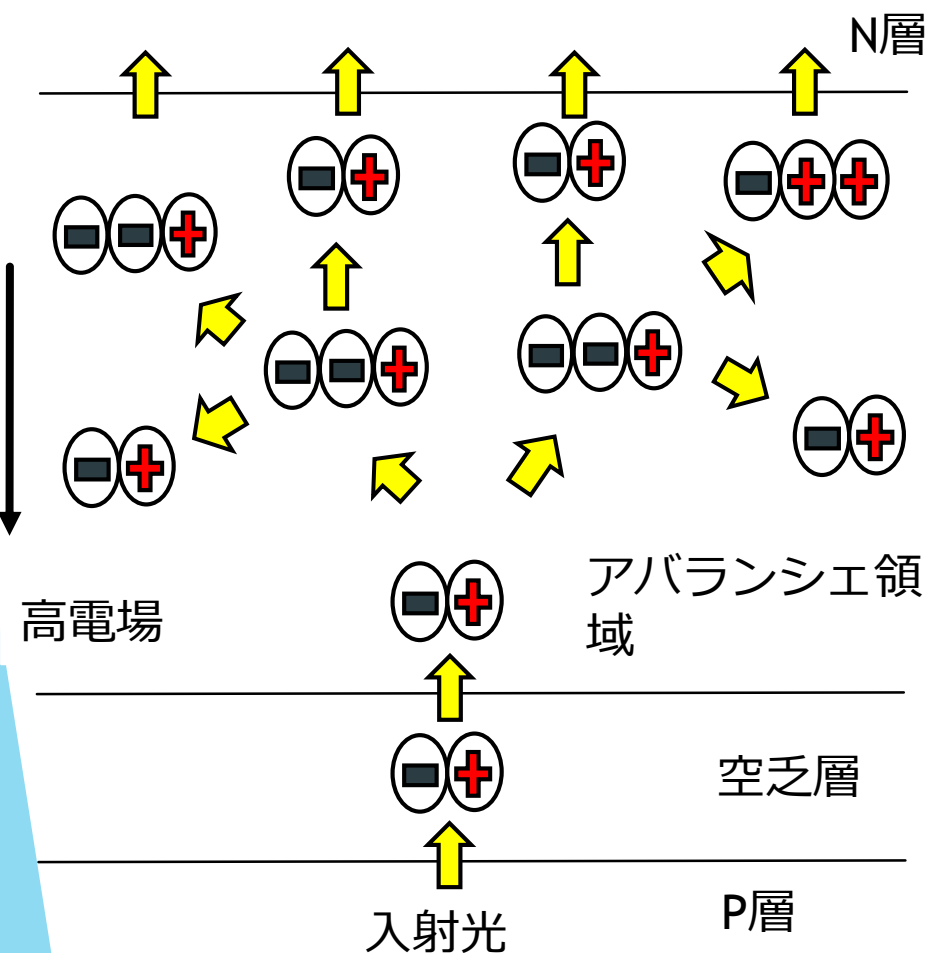
今回の実験目的に適合している



写真：MPPC

# • M P P C の仕組み

MPPCはAPDピクセルを敷き詰めた構造をしている。APDはアバランシェ増幅という現象を利用して光を検出する。光が微弱である時、受光したピクセル数は光量に比例する。図はA P Dにおけるアバランシェ増幅の流れである。



• 光子の衝突により電子が発生する。



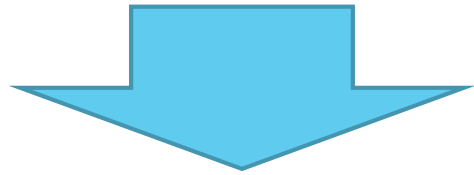
• 半導体中の電場により電子が加速される。



• 加速された電子が半導体中の原子に衝突し、電子が増倍される。

# ・ MPPCにおけるノイズの影響

- ▶ ダークカウント・・・熱励起によるノイズ。1光子分のイベントが多く、光子数が増えるにつれてノイズは減少する。



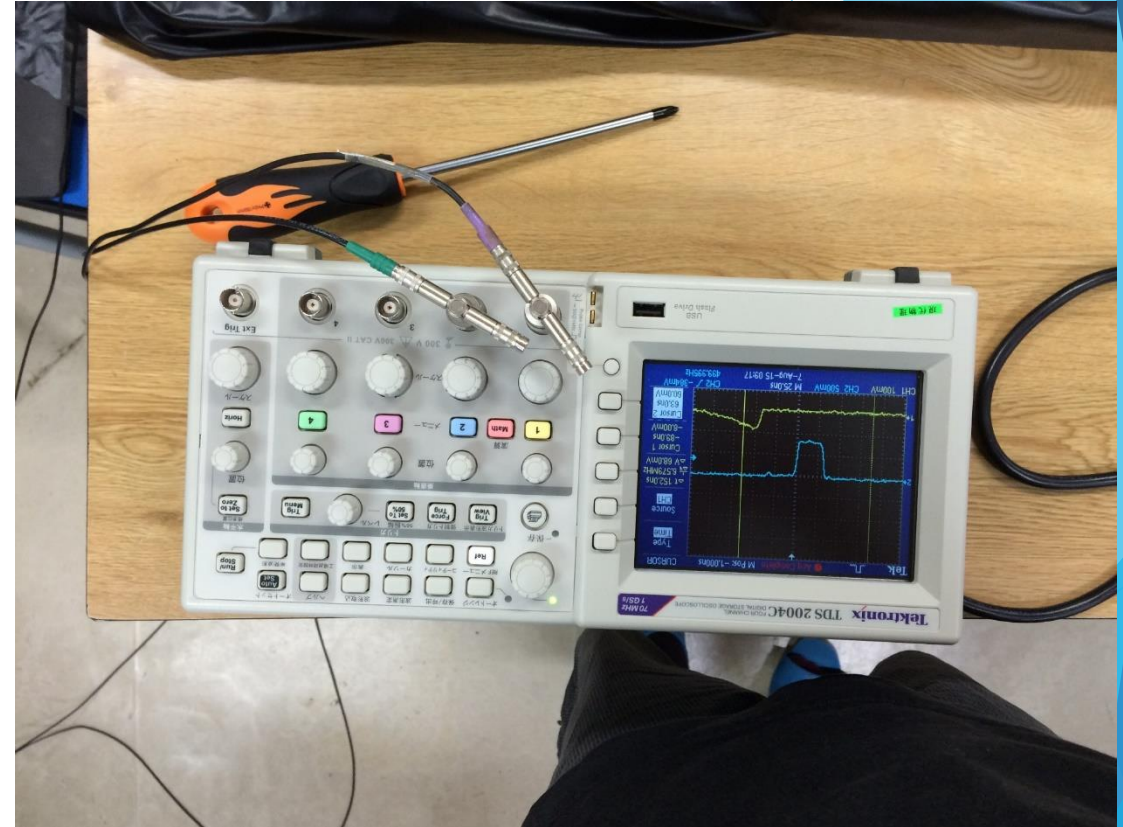
- ・ 写真のように遮光シート、偏光板を用い、2光子分ほどとなるように光量を調節することでより正確な測定ができると考えた。





# ・ オシロスコープ

・ 今回の実験では F L A S H A D C を接続する前に波形の確認をし、光量の調節をするために用いた。



写真：オシロスコープ

# • FLASH ADC

• LEDのトリガーを発するclock generatorからのNIM信号をトリガーとしてMPPCからの波形を記録する。このデータをもとに解析を行う。



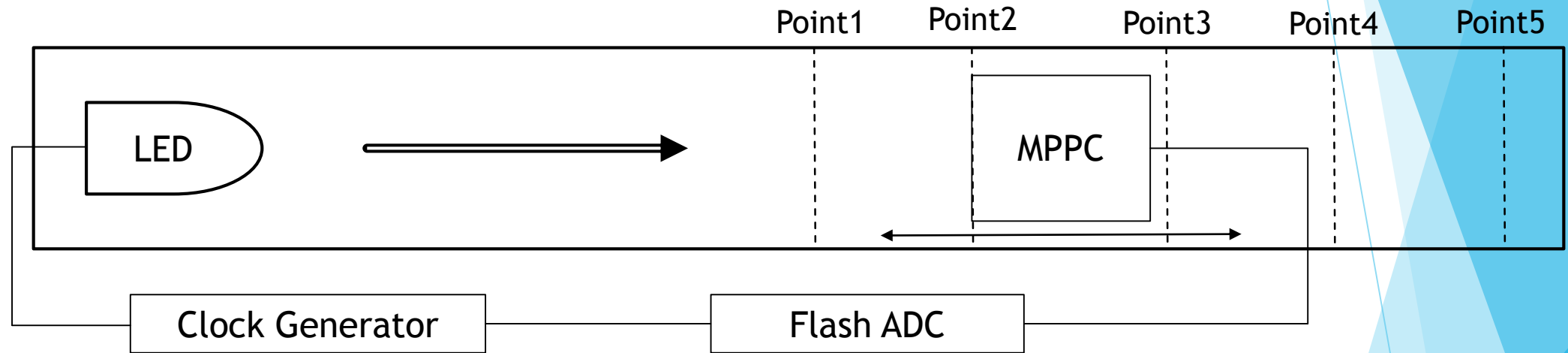
写真：FLASH ADC

# データ取得方法

担当：加藤鷹志

# 実験方法

- ▶ レール上でMPPCの固定場所を変えて、計5か所について測定を行った。



- ▶ 1つ目の測定点からの距離

測定点	1	2	3	4	5
1つ目からの距離[mm] (1班)	0	200.5	401.5	560.0	800.0
(2班)	0	310	625	927	1239



# データ数

今回使用したFlash ADCはPCとの接続が不安定であり頻繁にフリーズした。そこで、長時間の測定を避けるため、約1万個程度のイベントの測定を5回行い、後でデータを繋ぎ合わせた。

# 光子数の制限

## ▶ 光量が多すぎると

- ▶ MPPCで測定できる限界量を超えてしまう。
- ▶ 様々な時刻で大きなピークが現れるようになる。

→正確な測定が出来なくなる。

→ハーフミラーと偏光板2枚を用いてMPPCに入る光子数を制限した。

ハーフミラーで大まかな調整を、偏光板で細かな調整をした。

- ▶ オシロスコープを用いて波形を観察し、ピークにおける光子数が1～3個程度となるように、ハーフミラーの個数と偏光板の回転角を調節した。（光子1個につき約10mVの電圧が生じる）

# 解析(A1)

A-1班 篠原 航平

# 解析の概要

1. 測定した電圧のデータから光子の到達した時間を抽出
- (2. 同時に到達した光子の個数を解析)
3. 各測定点でLEDから出た光子がMPPCに到達するまでの時間を算出
4. 各測定点の距離と到達時間のグラフの傾きから光速を算出
- (5. 波形に対するフィッティングの直線について考察)

データ処理にはROOT (CERNの開発しているデータ解析環境,  
ライブラリ群)を用いた

# ROOT

An Object-Oriented  
Data Analysis Framework



<https://root.cern.ch/root/doc/RootDoc.html> より

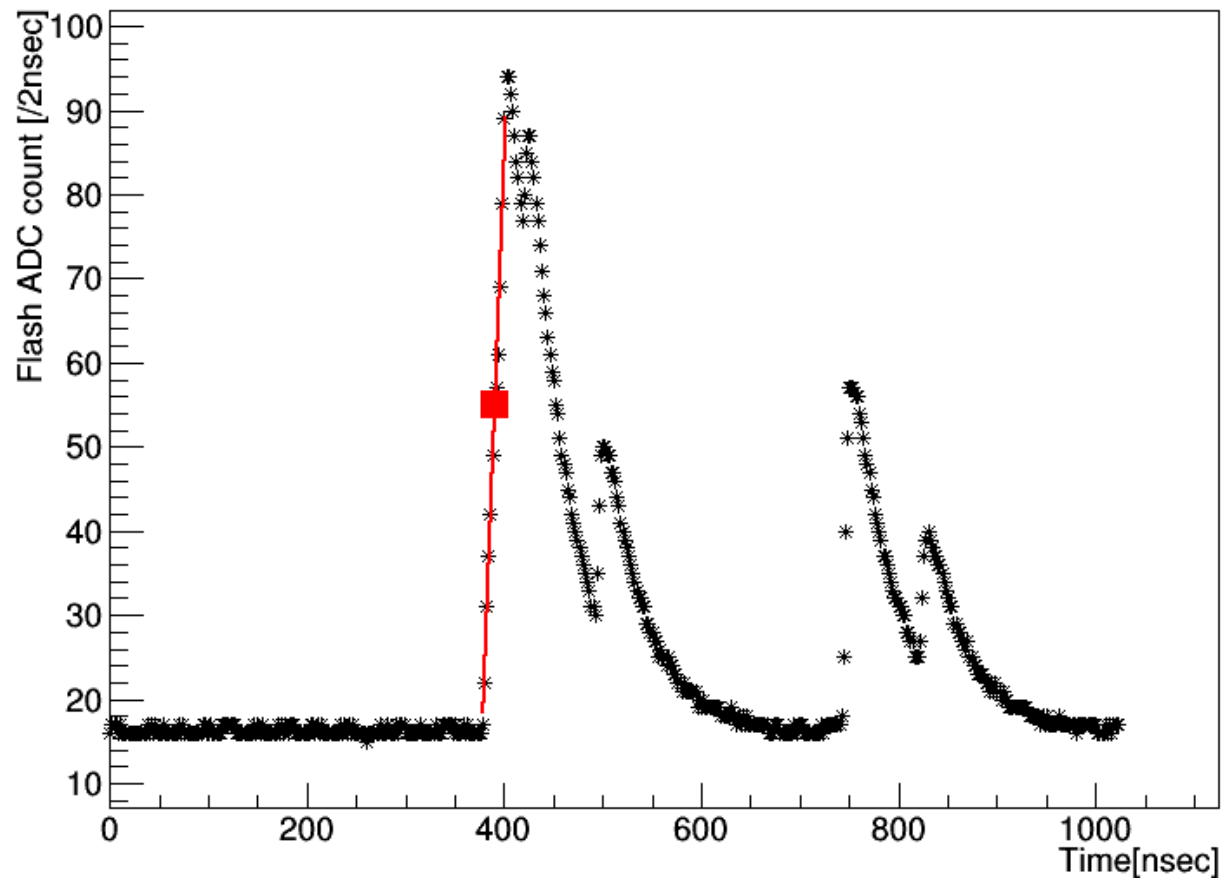
# 1. 到達時間の抽出

- 例えば、右図ではoffset と電圧がピークをとる時間の中点を到達点としている

- 系統誤差の考察で、到達点とするoffsetとピークの内分点の比( $k$ )を変化させていく

- ここでは $k=0.5$ の場合で説明する

Graph



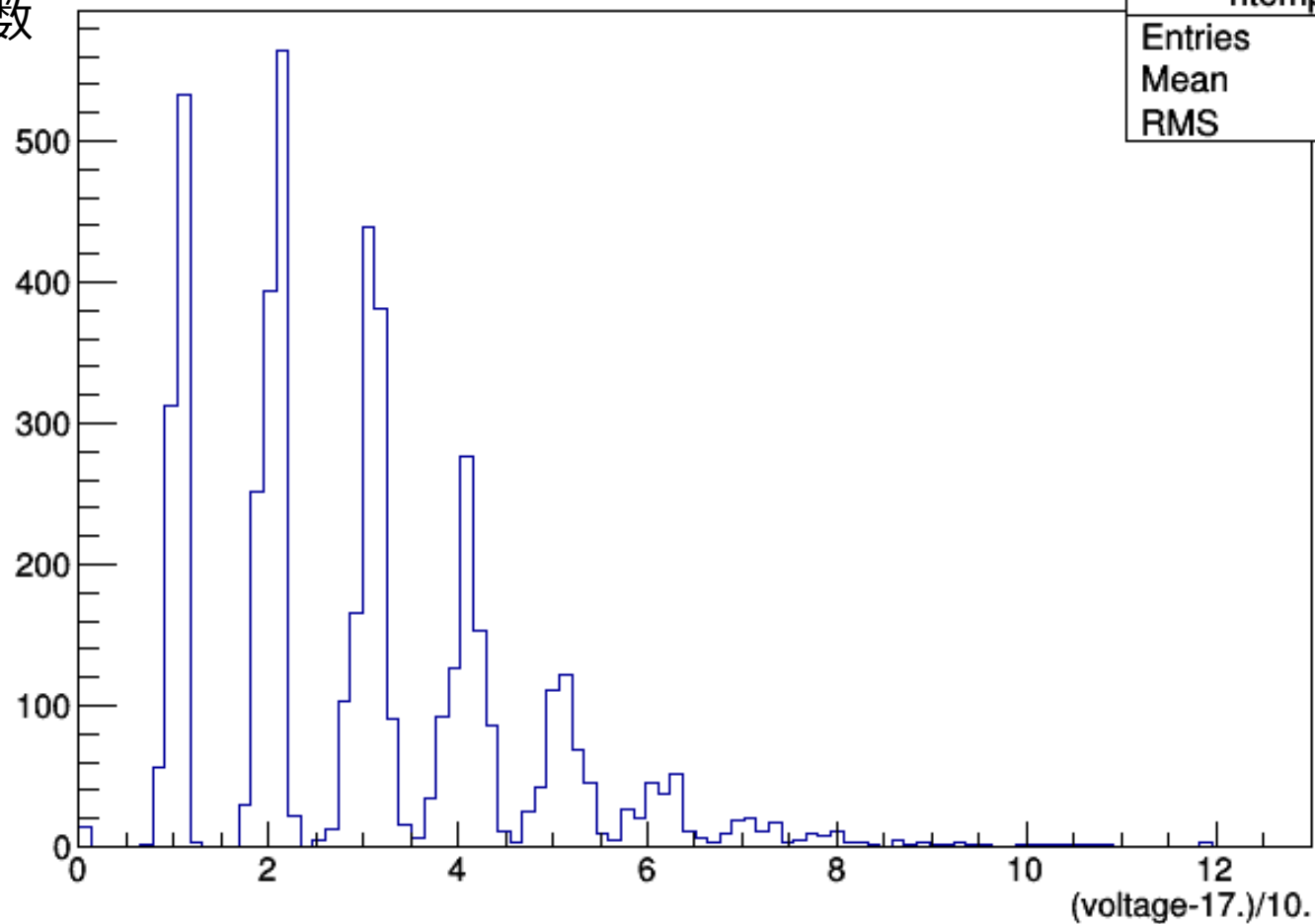
## 2. 光子の検出個数

- ▶ 光電効果によりダイオードから光子が放出されるとすると、測定される電圧はある値の整数倍になる
- ▶ 電圧値に対して検出個数はPoisson分布に従うことが期待される

## 2. 光子の検出個数( $k=0.5$ )

(voltage-17.)/10.

事象数

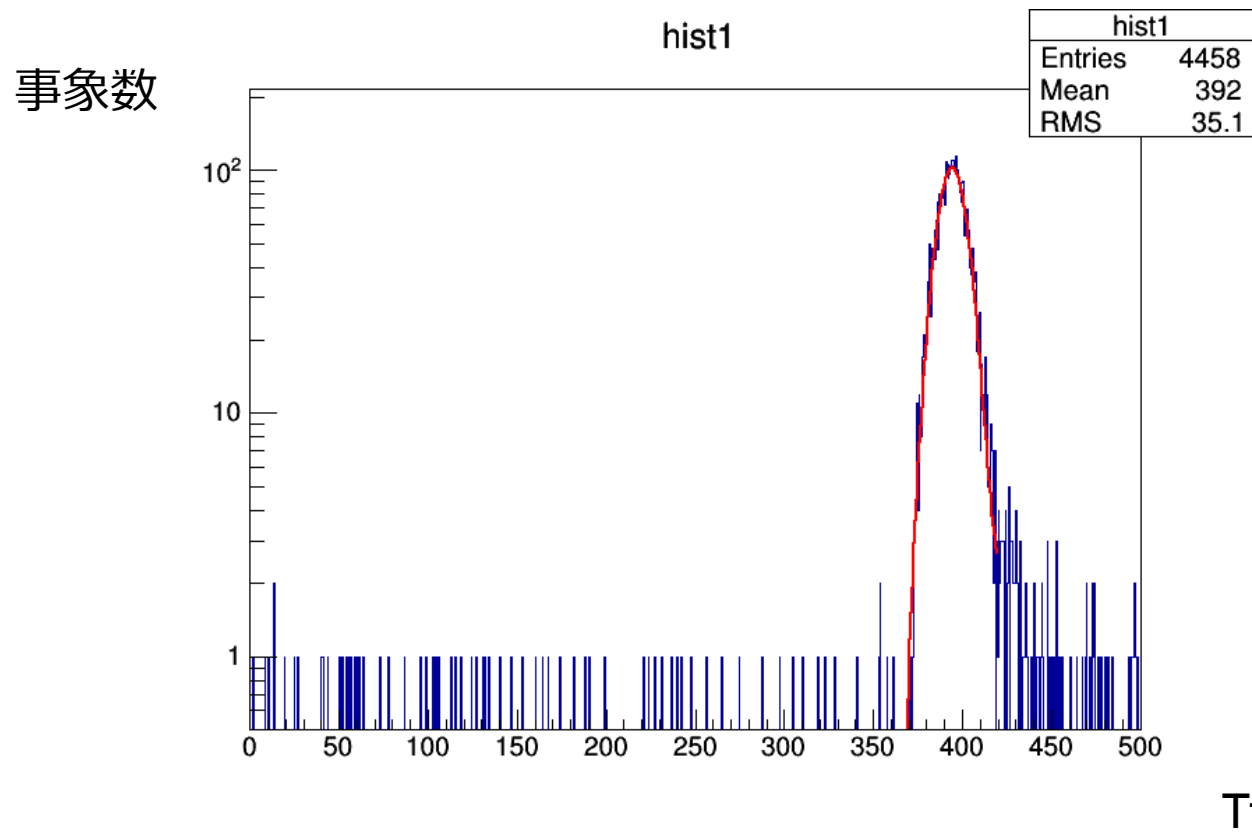


htemp	
Entries	4975
Mean	3.051
RMS	1.661

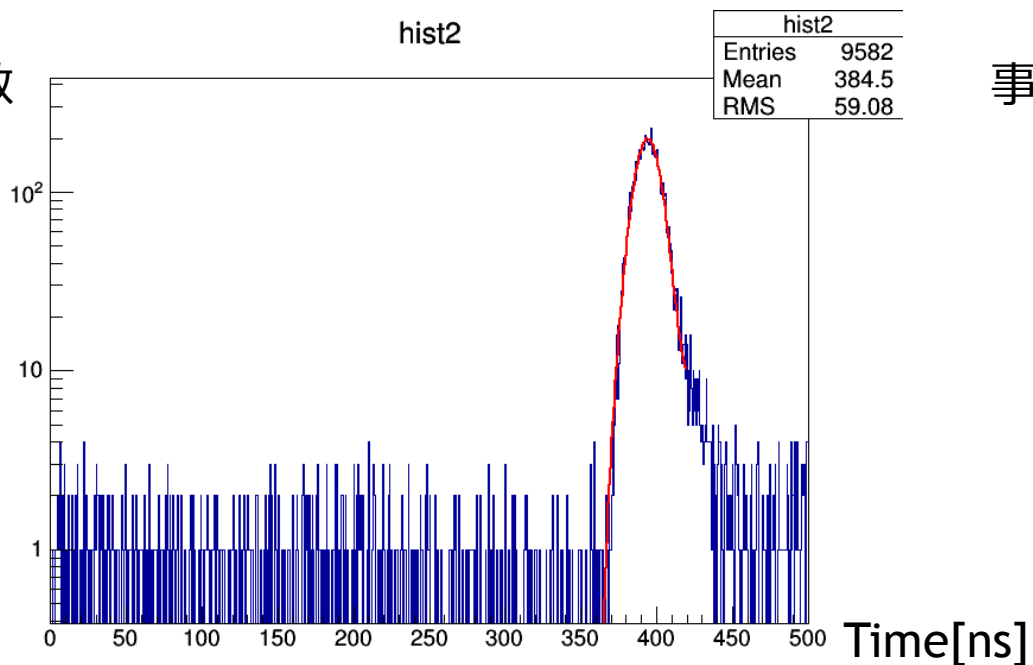


# 3. 到達時間

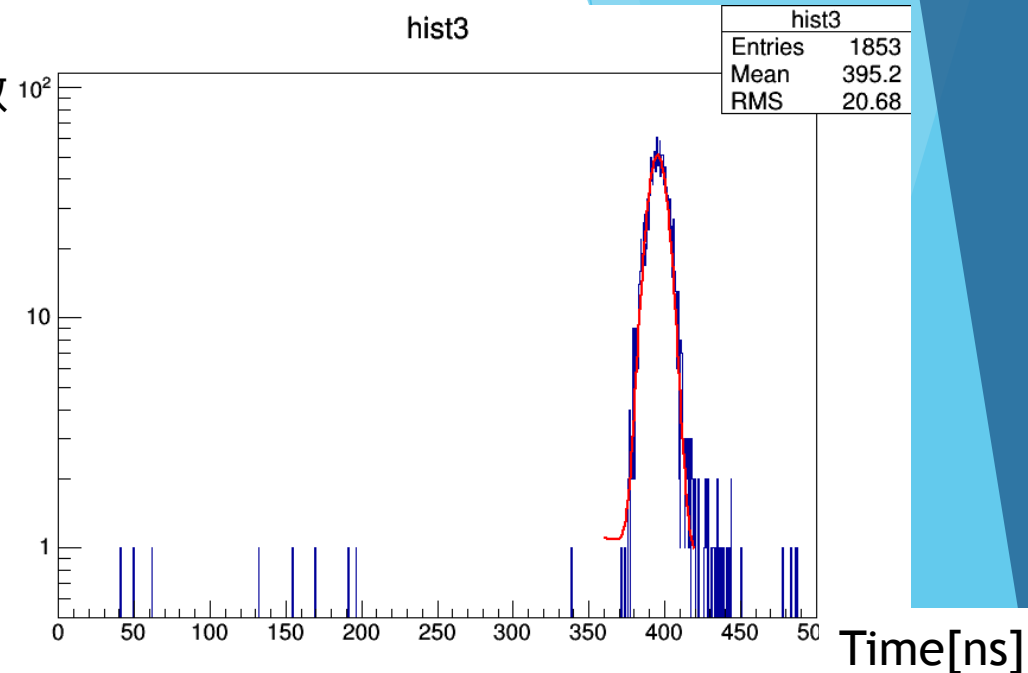
- ▶ 正規分布+一次関数でフィッティングした



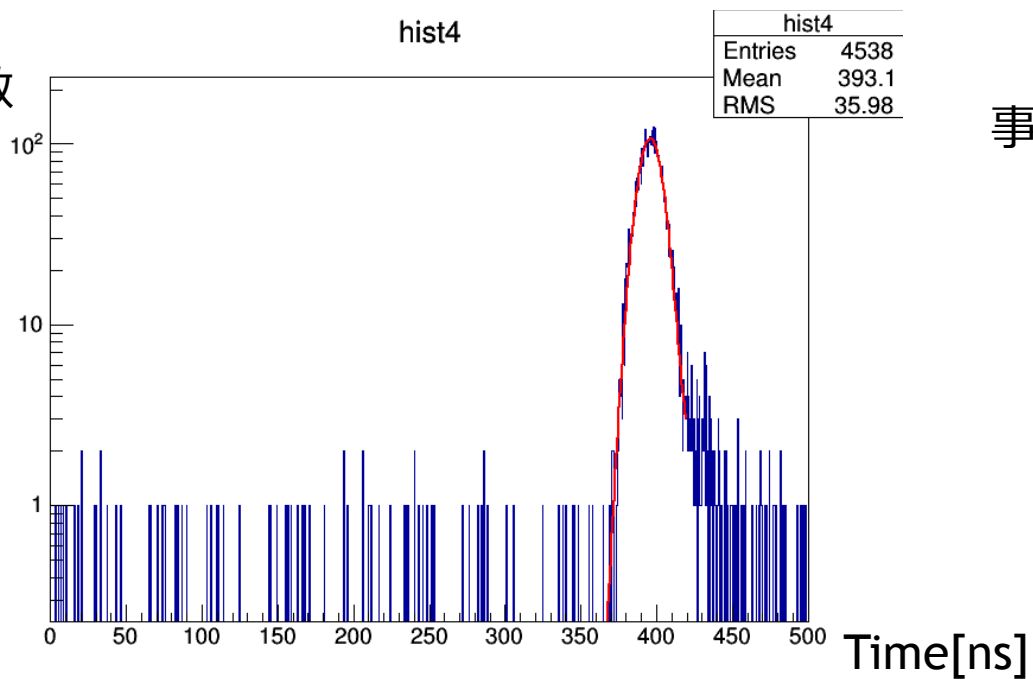
事象数



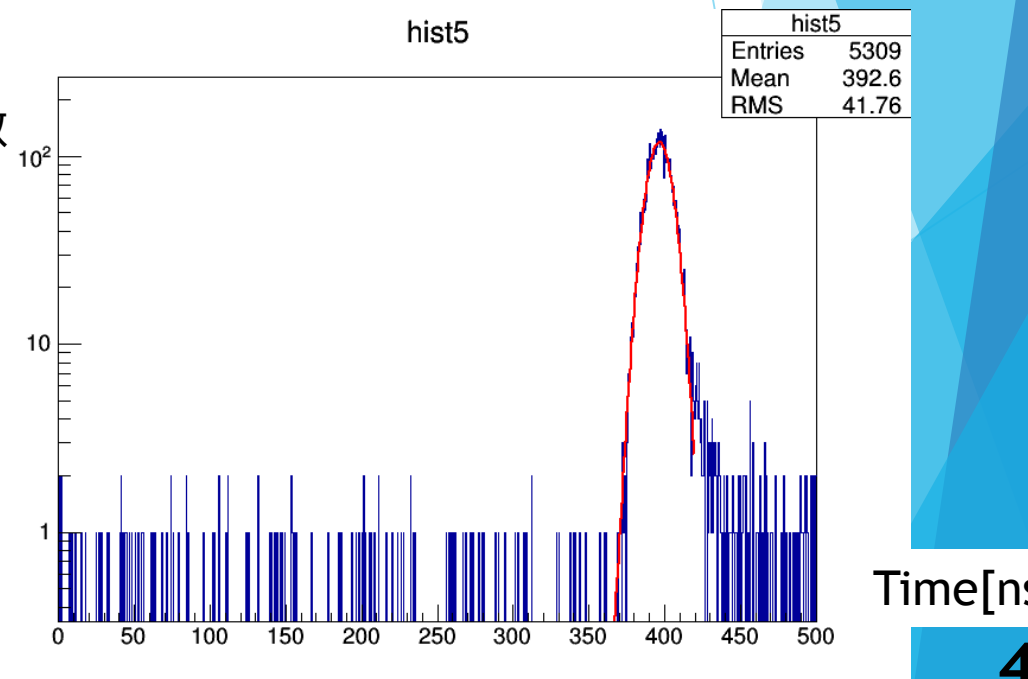
事象数



事象数



事象数



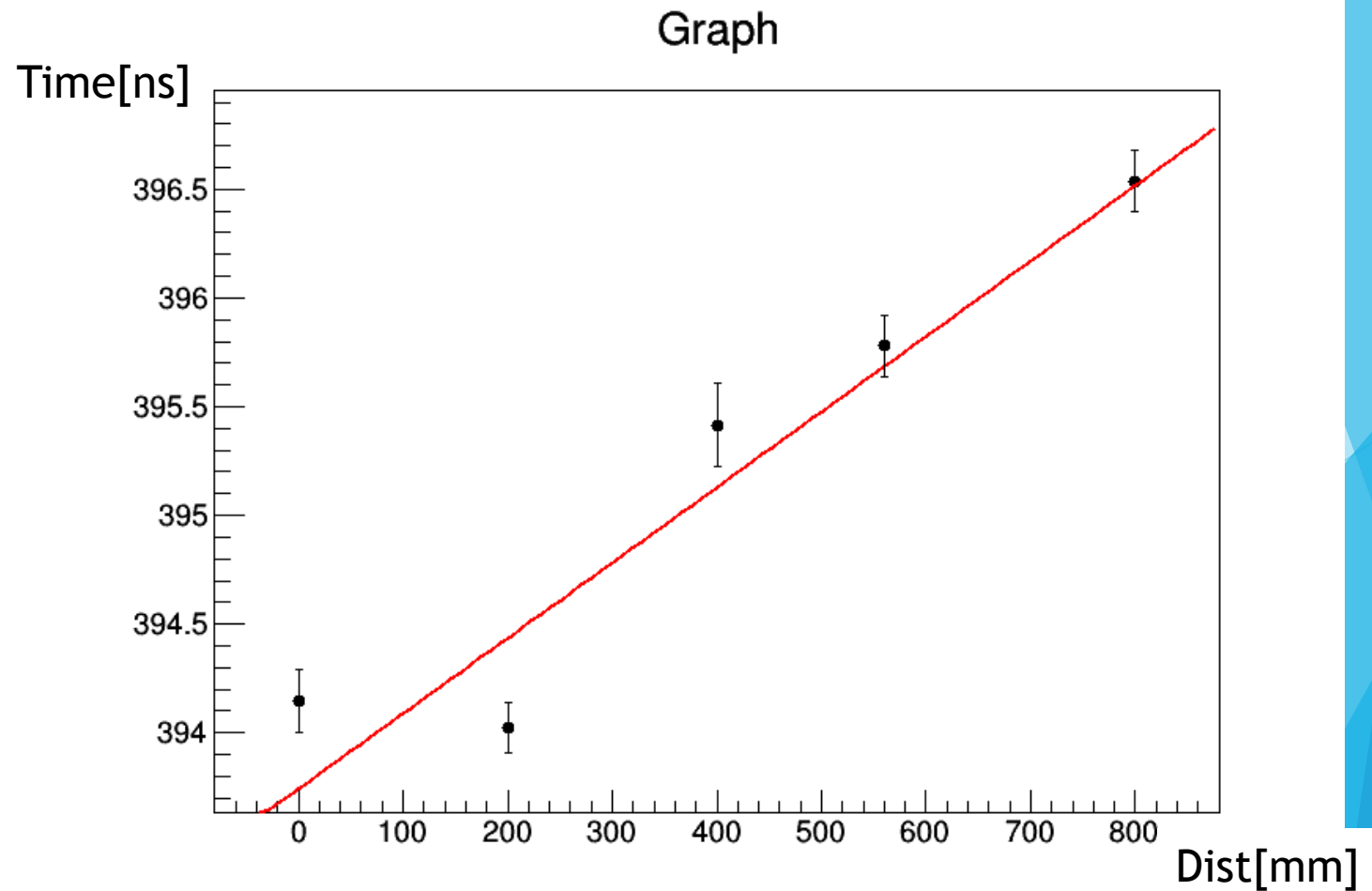
## 4. 光速の算出

- ▶ 各測定点での到達時間と、測定点間の距離を最小二乗法を用いて一次関数でフィッティングする

Point1からの距離	Point1	Point2	Point3	Point4	point5
(mm)	0	200.5	401.5	560.0	800.0

## 4. 光速の算出

▶  $(2.883 \pm 0.187) \times 10^8 \text{ m/sec}$

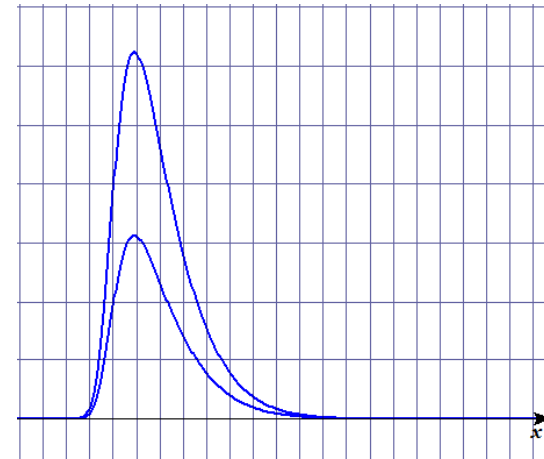


# 5. フィットティング直線の傾き

▶ 光子1個が到達するイベントのフィッティング直線の傾きに対して

(1) N個の光子がほぼ同時に到達するとき

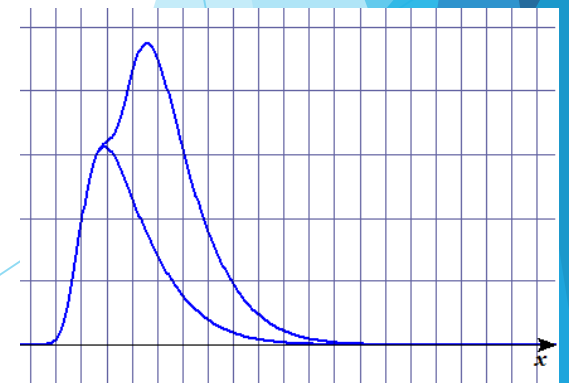
→ 傾きはN倍になる



(2) 到達時間がずれるとき

→ 波形の極大が後ろにシフト && 立ち上がりの点は前にシフト

→ 傾きは緩やかに

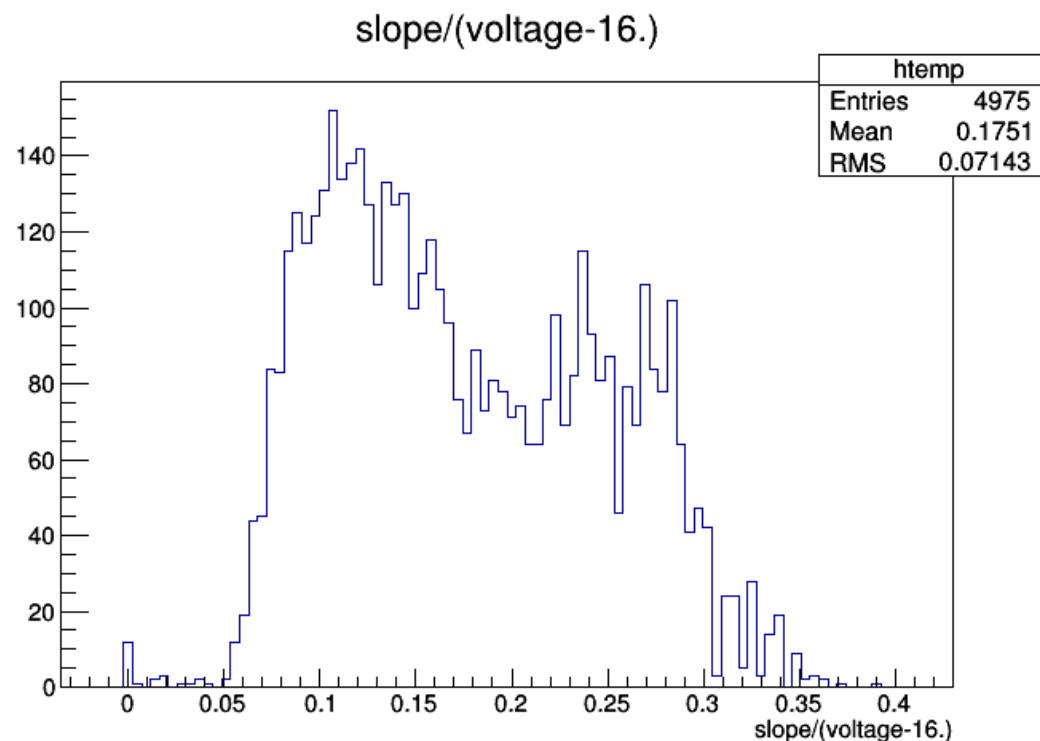


▶ 傾きを電圧値で割ったものを考えると、(1)では値は変わらない、(2)では小さくなる

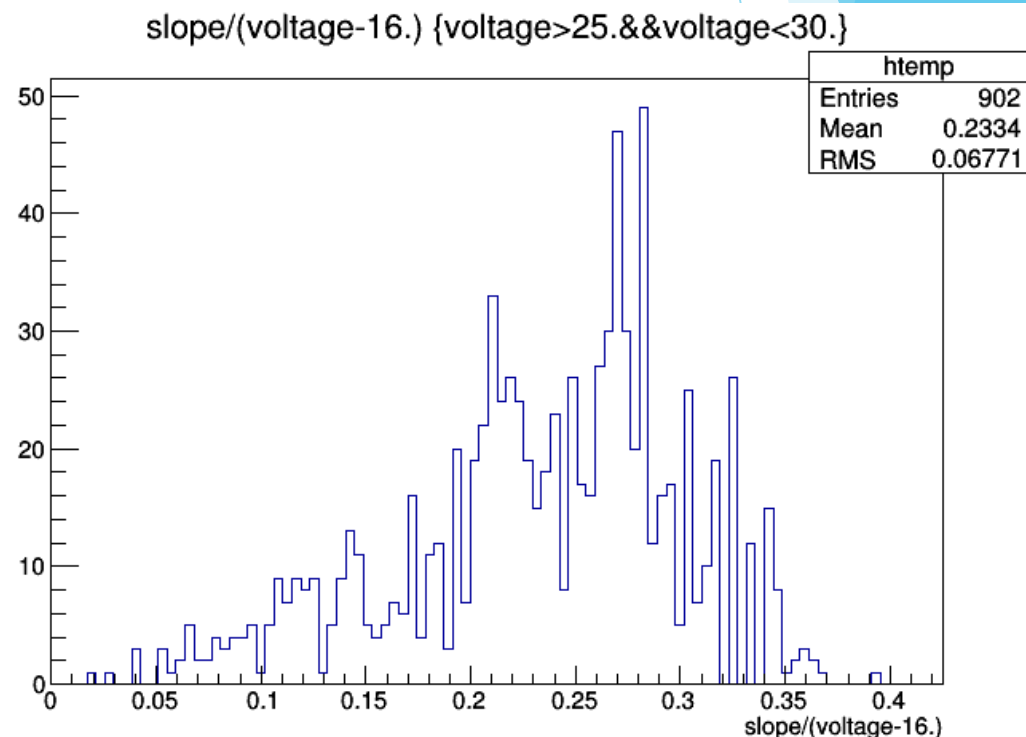
# 5. 解析結果(point 1, k = 0.5)

光子 1 個のときのフィッティング直線の傾きは0.27付近でピーク

1photo

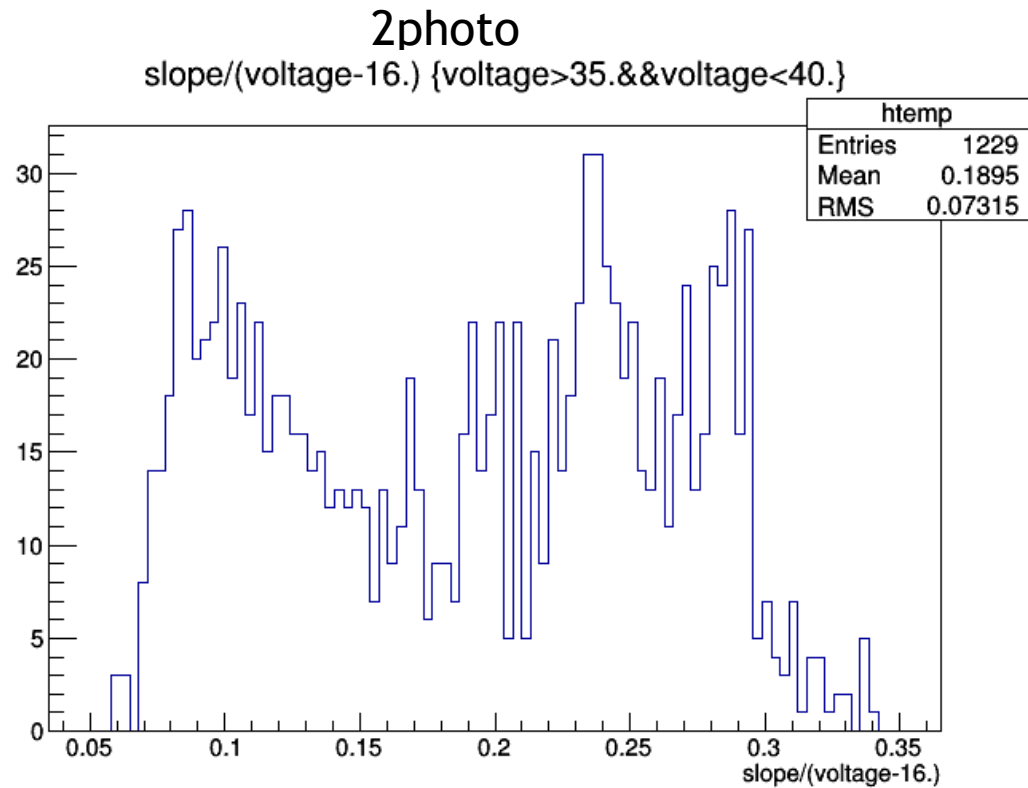


[1/ns]

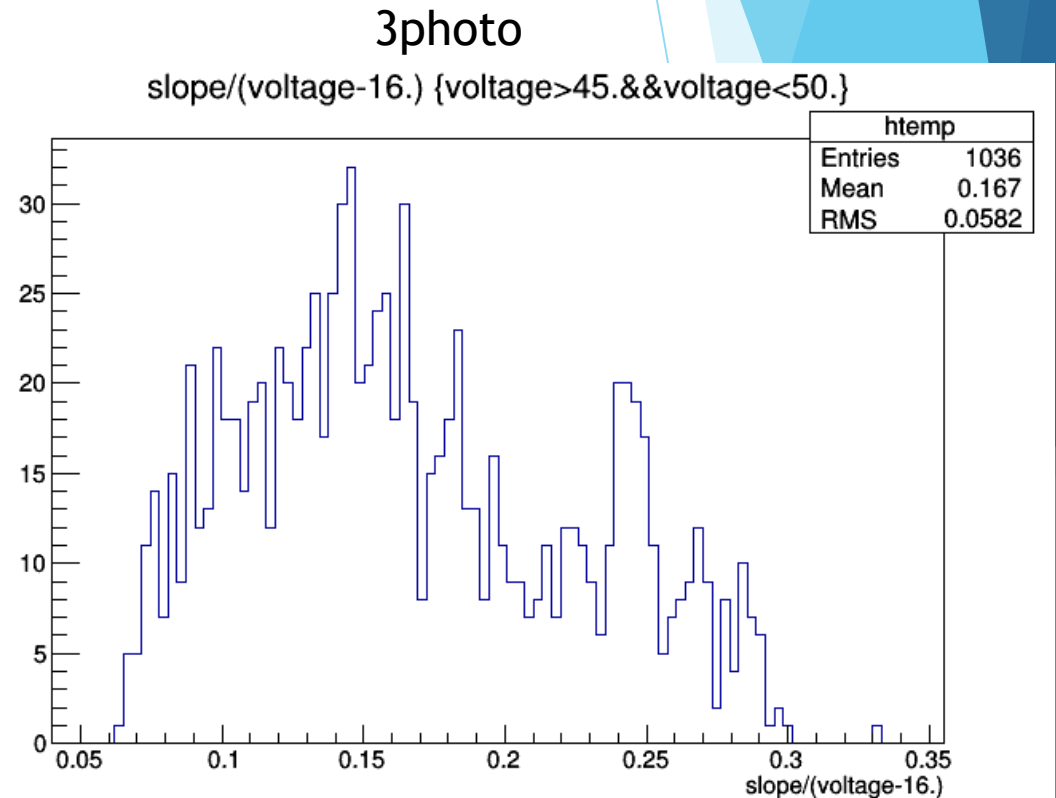


[1/ns] 45

2photon: 傾き0.07付近、0.27付近に山ができています  
 3photon: slopeが大きい方の山は小さくなっている  
 (ずれて到達するイベントの割合の増加)



[1/ns]



[1/ns]

# 解析(A2)



# 概要

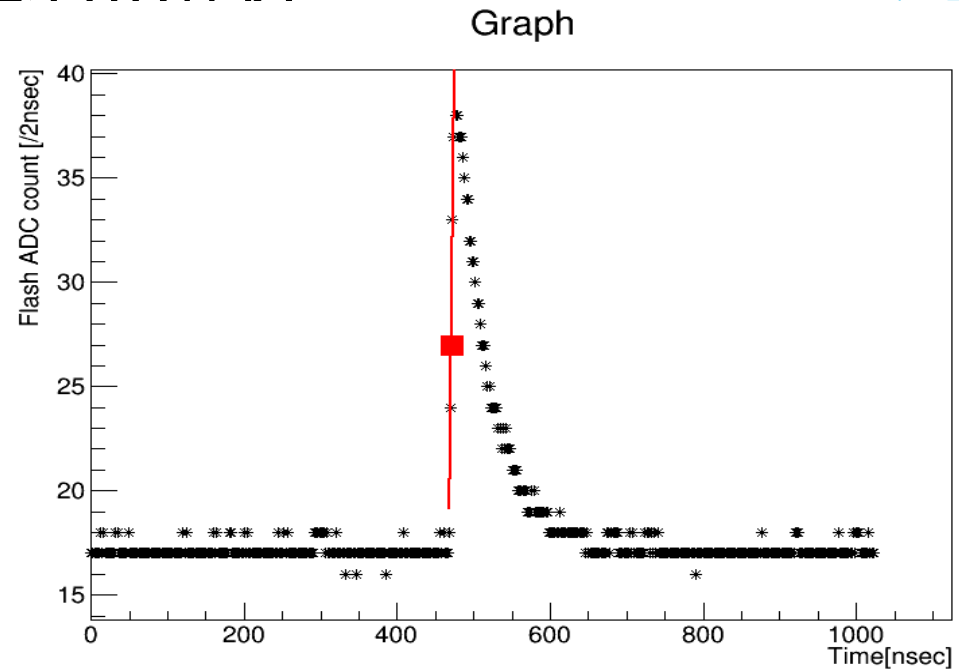
ROOT(データ解析フレームワーク)を利用して取得したデータを解析して光速を求めた。

- 各イベント毎のデータを解析して到達時間を計算
- 各イベントの到達時間を累積して,到達時間を計算
- 各距離ごとの到達時間より,光速を計算

# 各イベントの解析(1)

各イベントの時間と電圧変化をプロットしフィッティング

- 立ち上がりとピークを検出
- その範囲内において1次関数近似
- 到達時間,電圧を計算(内分点の比)

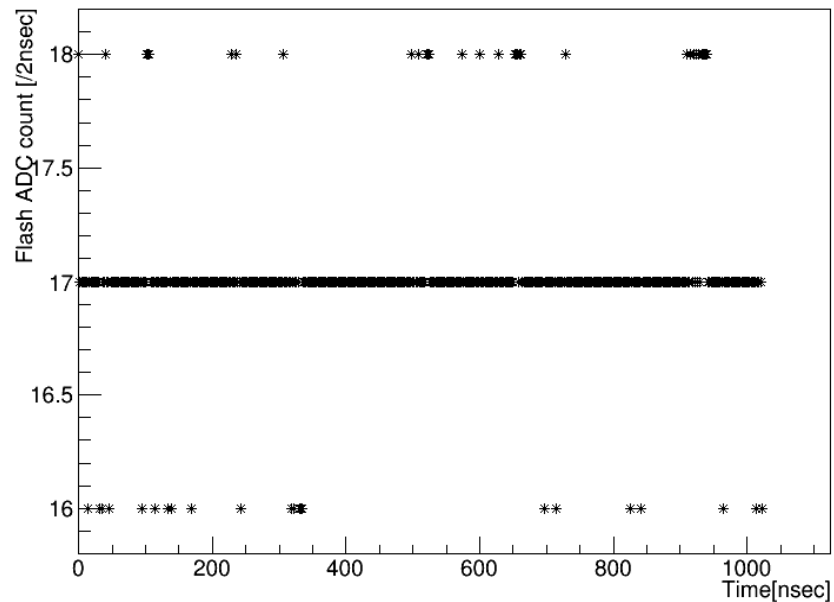


# 各イベントの解析(2)

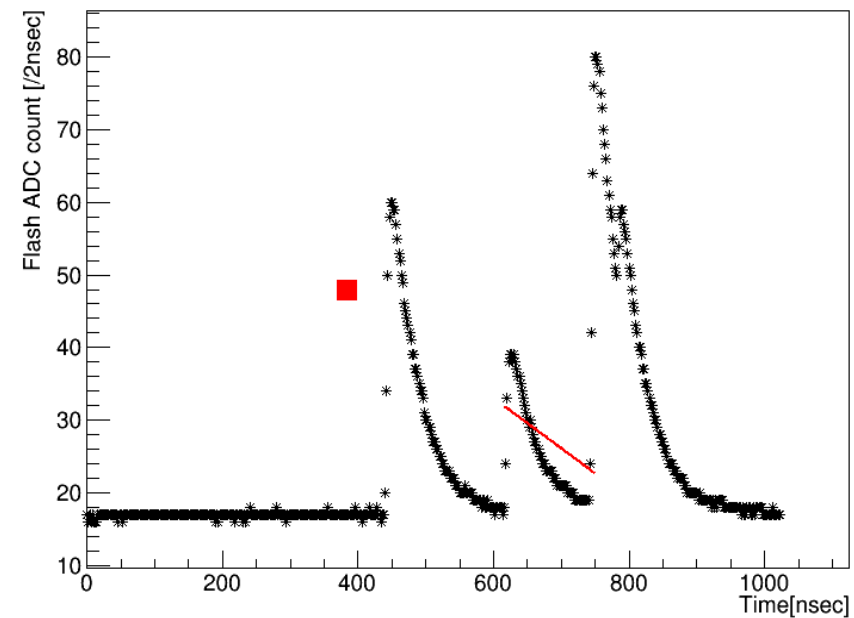
適切なイベントのみの抽出

- 光子が検出されたイベント
- 1次関数の近似が適切なイベント
- ピークの位置が適切なイベント

Graph

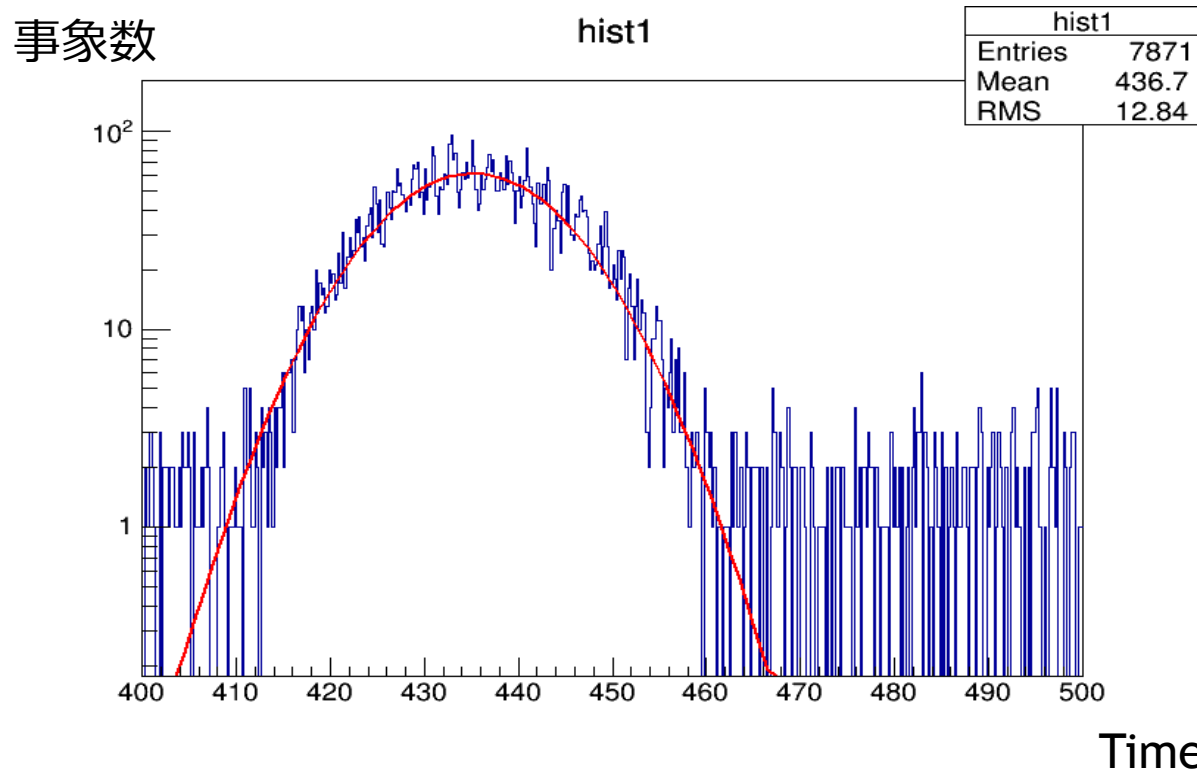


Graph



# 各イベントの累積(1)

- 各イベント毎の解析結果よりヒストグラム作成
- ガウス関数をフィッティングしピークならびに誤差を求める

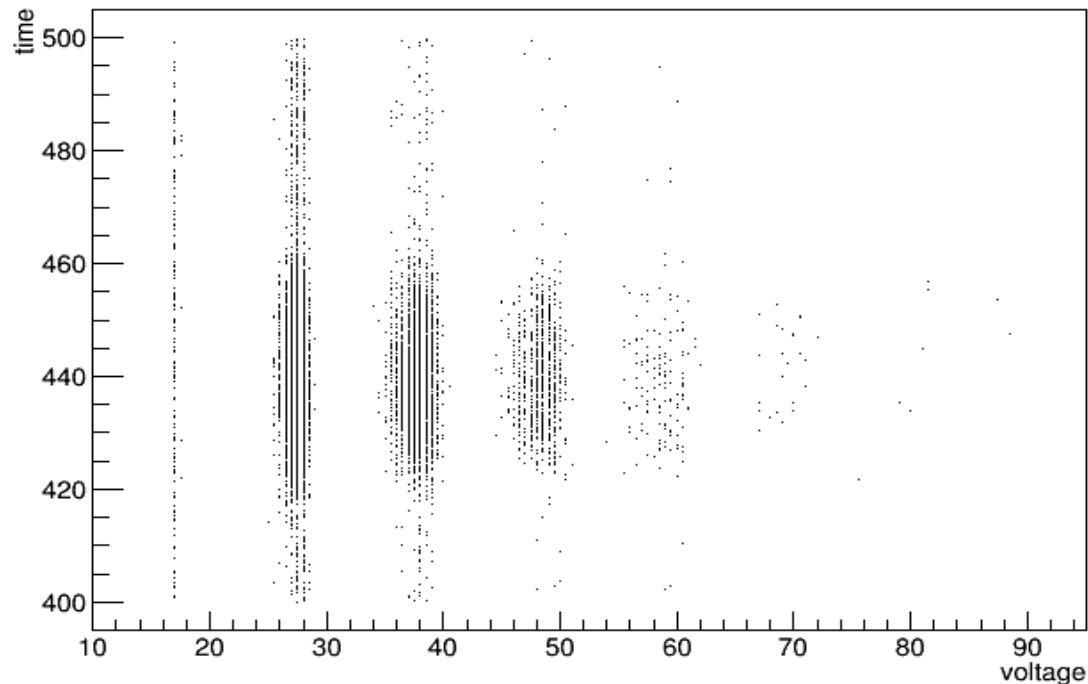


# 各イベントの累積(2)

各イベント毎の解析の電圧と時間の関係をプロット

- 光子数ごとに電圧がはっきりと分かれる
- 1光子のみに限って解析するとイベント数が不足する

time:voltage {time>400 && time<500}

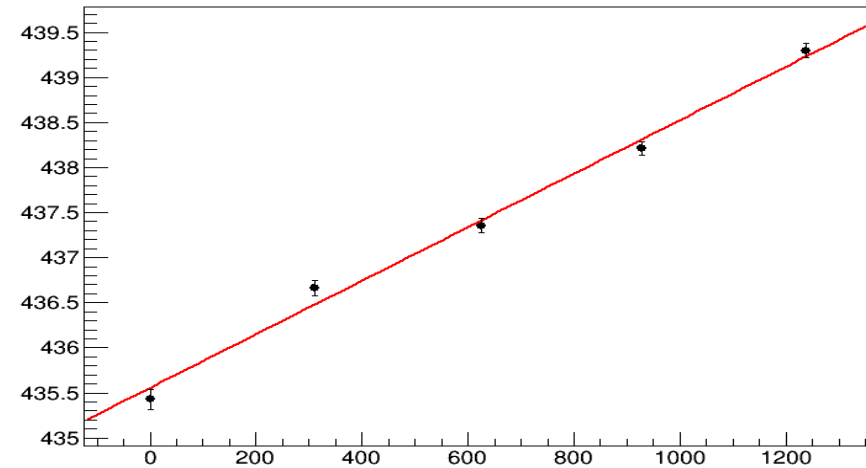


# 光速の計算(1)

- 距離と求めた時間をプロット
- 一次関数でフィッティング  
光速を求めた

Time[ns]

Graph



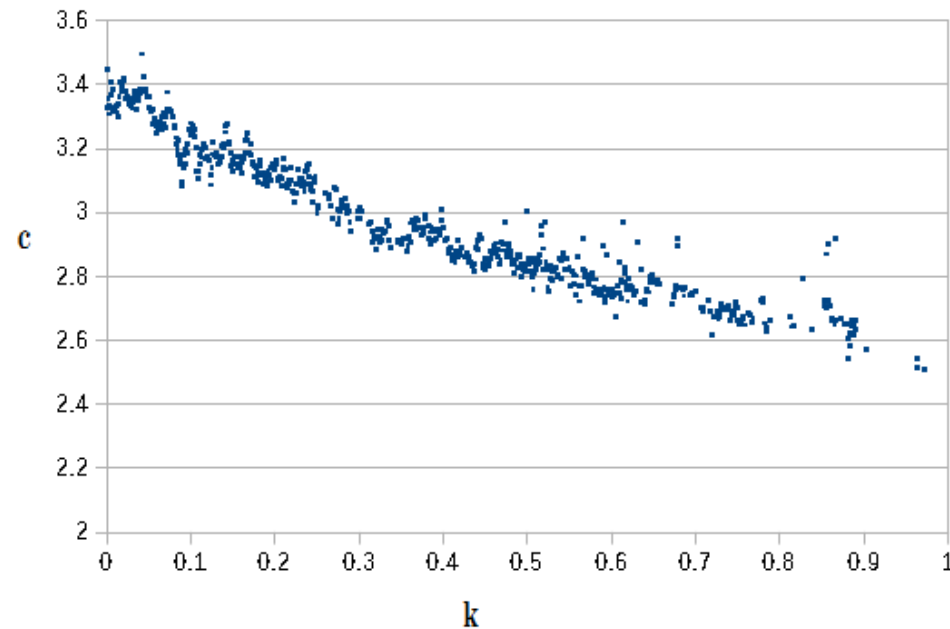
Dist[mm]

	MPPC0	MPPC1	MPPC2	MPPC3	MPPC4
距離/mm	0	310	625	927	1239
イベント数	7871	12628	13658	14437	13575

# 光速の計算(2)

## パラメタkによる結果の変化

- ・kを0から1まで0.001刻みで結果の推移を調べた
- ・解析に適切な光速( $2 < c < 4$ )となっているもののみを抽出
- ・kに対する光速cはおおむね比例する
- ・系統誤差の少ない適切なkを選択したい



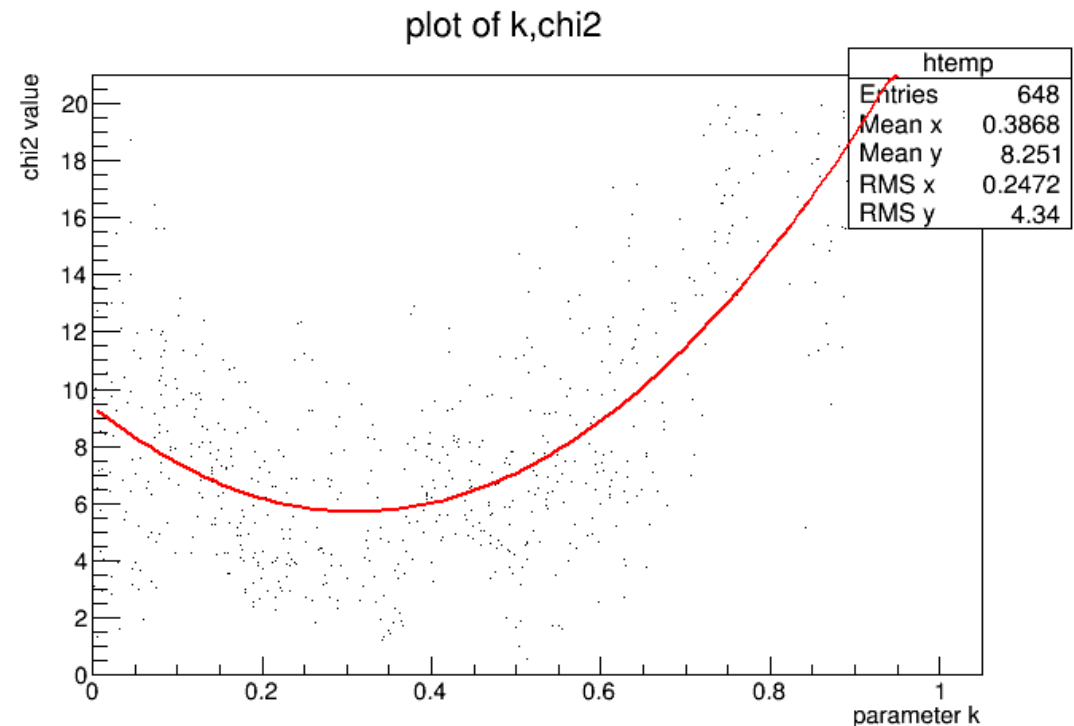
# 光速の計算(3)

- 光速計算時のフィッティングが最良となるkを選択
- 最小点が不明瞭なため二次関数近似して導出

計算結果

$$y = 38.09x^2 - 23.7x + 9.400$$

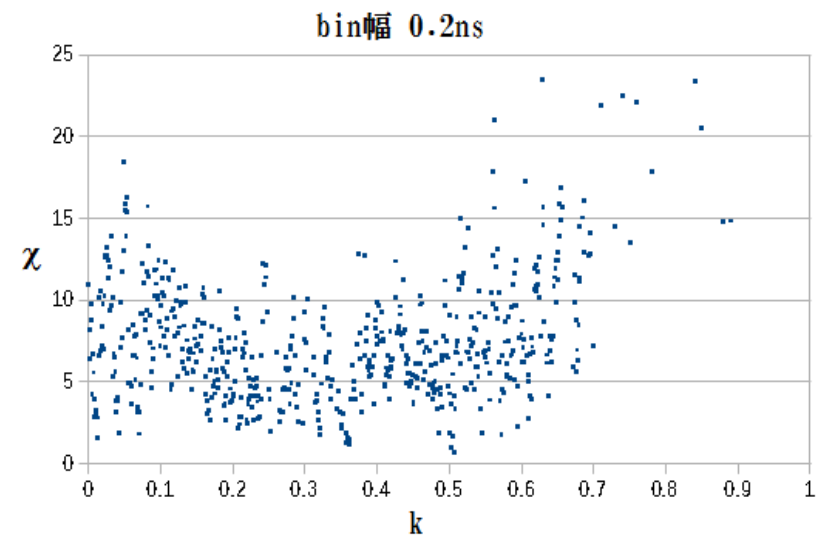
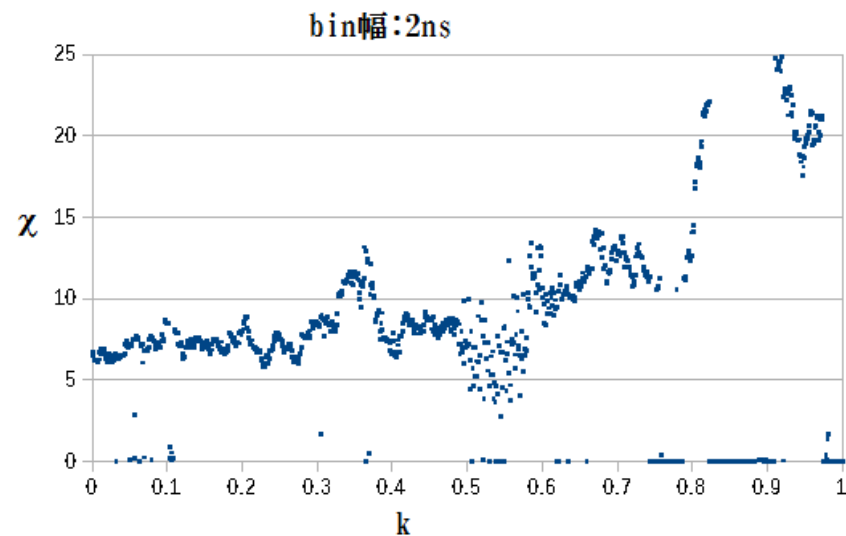
$$k = 0.312, c = 2.966 \pm 0.075$$





# 光速の計算 (4)

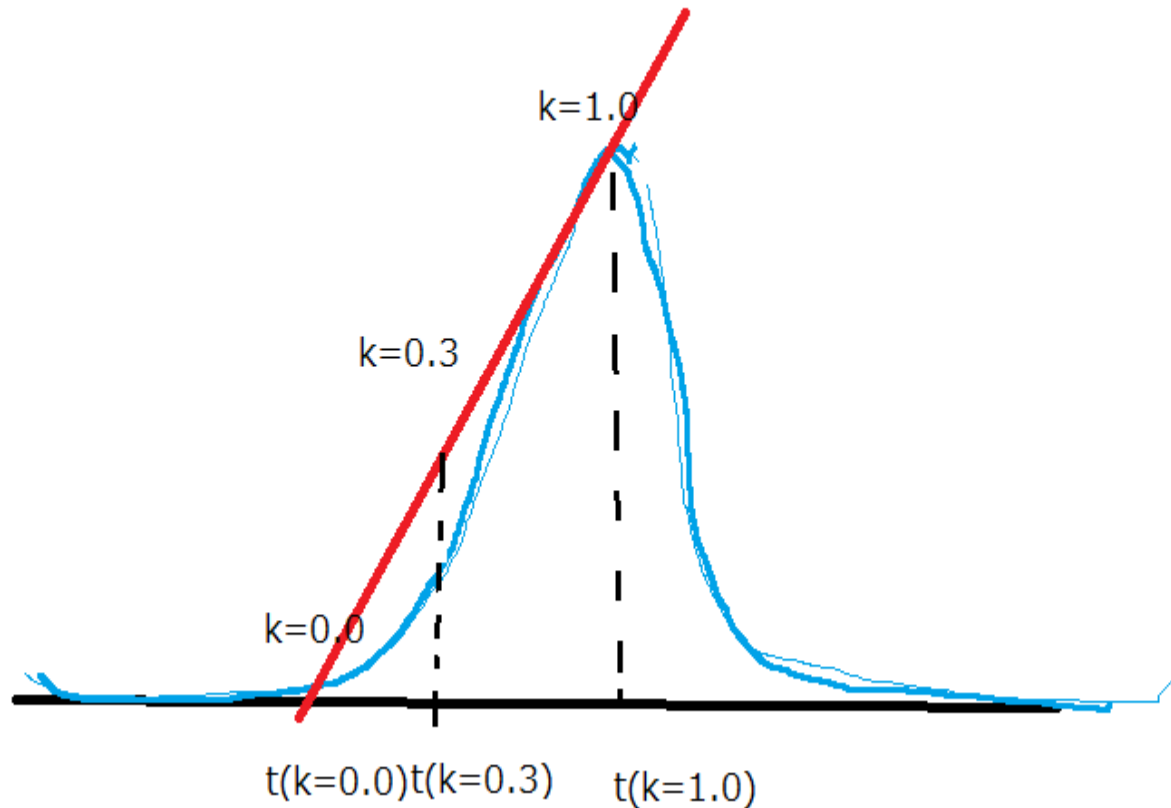
- イベントの累積時のヒストグラムの柱の幅(bin幅)を変えると
- $k=0.8$ 以上において、適当でないと思われるので、範囲を適切な部分に限り誤差の計算をした。



結果

(誤差の算出)

# 波形のどこを以て光が到達したと考えるか？



波形と到達時間の関係を表すパラメータ $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ )を変化させたとき光速の測定値はどう変化するか。

パラメータ $k$ の値はどれが一番適切か。

⇒定義の問題（系統誤差）

# パラメータkの最良値の基準

一つの基準として、各点での値がより直線に載るようなkを最良値とする。（正確な測定では完全に直線に載るはず）

ここで、x二乗値は

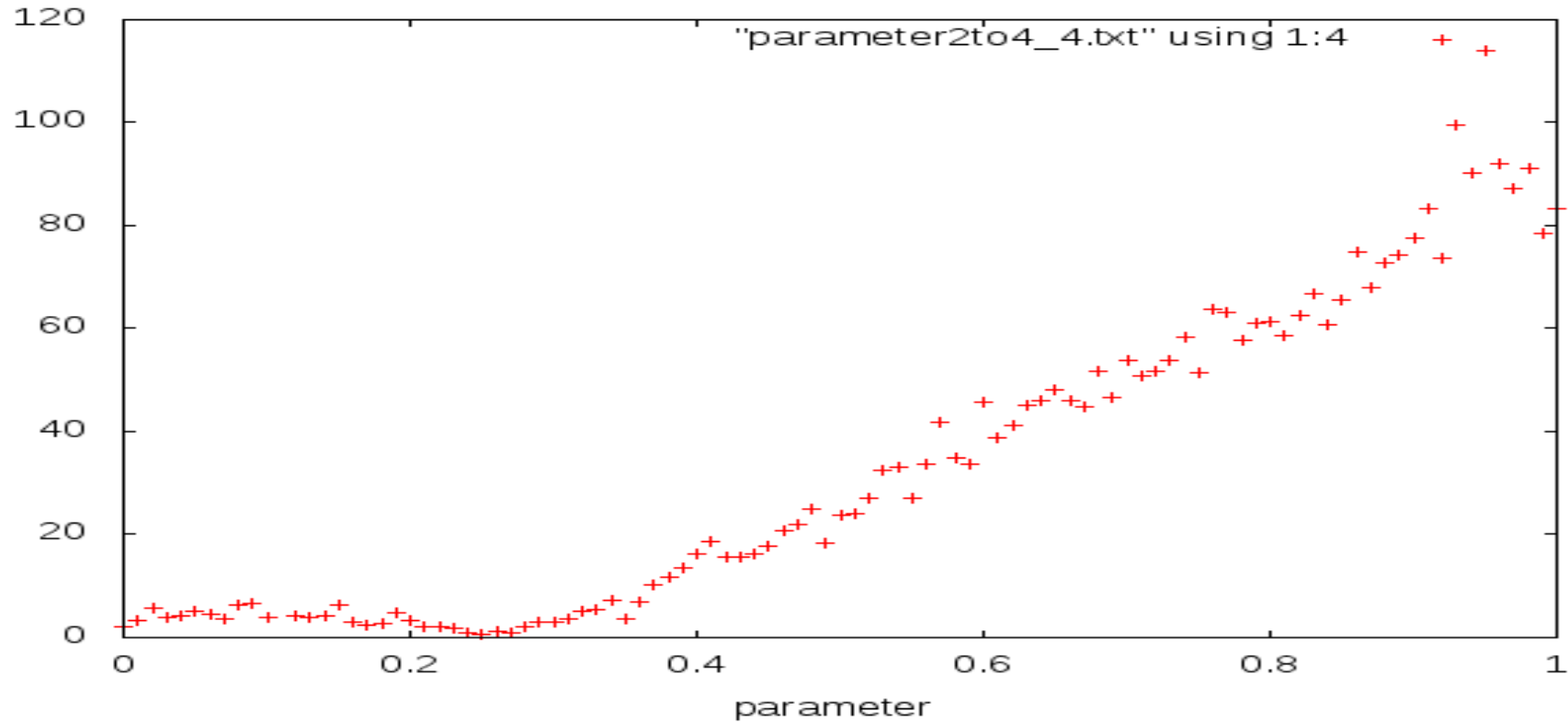
$$\chi^2 = \sum \left( \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (\mu_i: x_i \text{の理論値})$$

で定義され、ここでは直線上の値からのずれを表す。

つまり、x二乗値が最も小さくなるようなkを探せばよい！

そのときの光速の値を真値として取り扱う

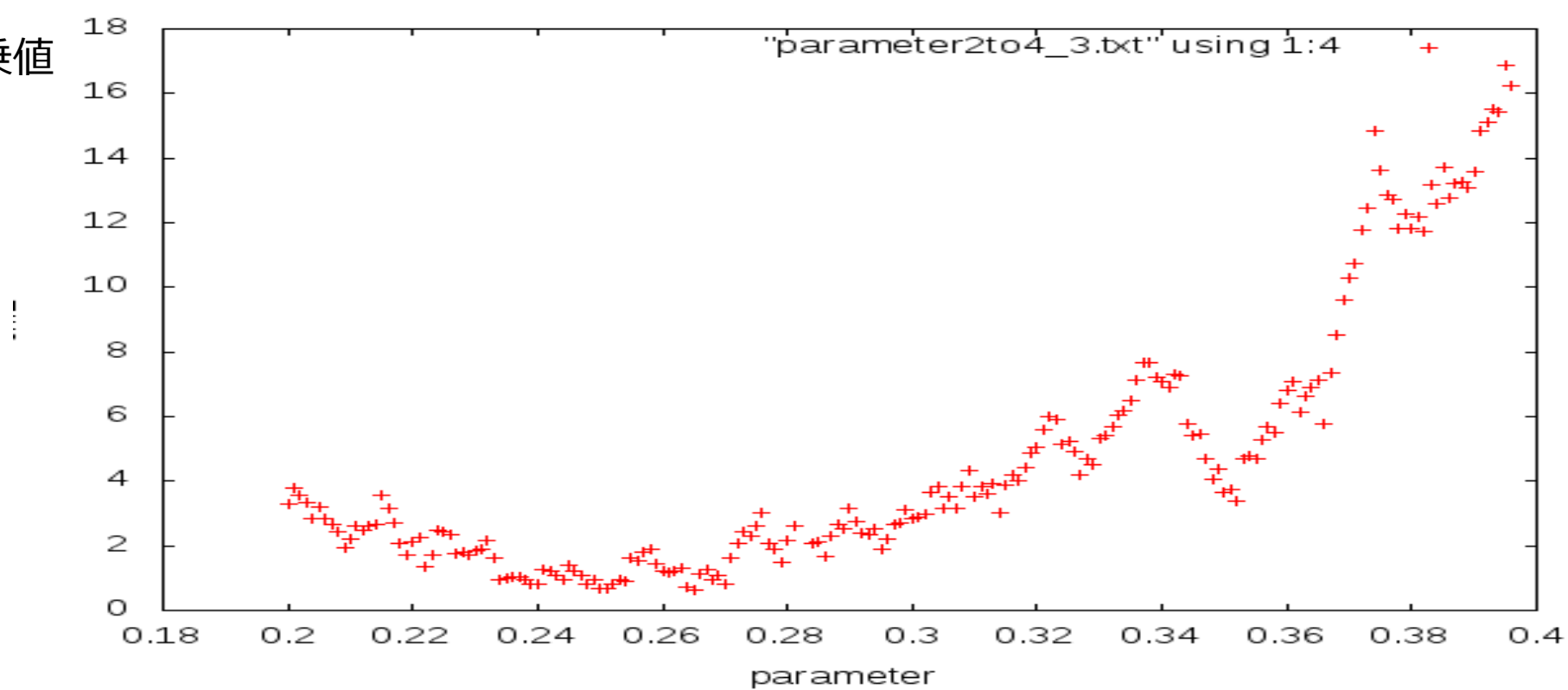
## X二乗値



kをk=0.00~1.00の範囲で0.01刻みで変化させる

k=0.20~0.40の間にx二乗値が最小となるkが存在すると推定できる。

X二乗値



k=0.200~0.400の範囲で0.001刻みでkを変化させる

k=0.265 でx二乗値は最小値0.6438をとる

このときの光速は、 $3.0629 \pm 0.2196 \times 10^8 \text{ m/s}$

# 最尤性原理

最尤性原理：n個の測定値 $x_1, x_2, \dots, x_n$ が与えられているとする。パラメータ $\theta$ の最良推定値とは、 $x_1, x_2, \dots, x_n$ が得られる確率を最大にするような値のことである。

データ $x_i$ が得られる確率を $f(x_i|\theta)$ とすると、データ $x_1, x_2, \dots, x_n$ が得られる確率 $L(\theta|x)$ は、

$$L(\theta | x) = f(x_1|\theta)f(x_2|\theta) \cdots f(x_n|\theta)$$

$$\frac{dL}{d\theta} = 0 \quad \text{あるいは} \quad \frac{d \log L}{d\theta} = 0$$

となるような $\theta = \hat{\theta}(x)$ が $\theta$ の最良推定値！

# 複数のデータの統合（荷重平均）

中心極限定理により同じ理論平均値 $\mu$ ，異なる標準偏差 $\sigma_i$ を持つガウス分布に従う標本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の平均と誤差を考える。最尤性原理を使って考えると，

$$L(\mu|x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma_i^2}\right\}$$
$$L^* = \log L = -\sum \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma_i^2) - \frac{1}{2} \sum \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma_i^2}$$
$$\frac{dL^*}{d\mu} = \sum \frac{x_i - \mu}{\sigma_i^2} = 0$$



$$\hat{\mu} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \quad (w_i = \frac{1}{\sigma_i^2} : \text{荷重})$$

では、誤差はどうやって出すのか？

$$u - \bar{u} \cong \sum (x_i - \bar{x}_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}_i}$$

$\hat{\mu}$ の形をよく見ると、 $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum w_i x_i}{w}$

( $w = \sum w_i$ )という変換をしたときの平均と同じ

⇒この変換によって伝播した誤差が求める誤差！

# 誤差の伝播

$$\begin{aligned} E[(u - \bar{u})^2] &\cong \\ E\left[\sum (x_i - \bar{x}_i)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + 2 \sum_{i < j} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right] \\ &= \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(x_i, x_j) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \end{aligned}$$

ここで,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  は独立より,  $\text{cov}(x_i, x_j) = 0$

$$\text{従って } \sigma_u^2 = \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2 = \sum \left(\frac{w_i}{w}\right)^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{w}$$

\* Taylor展開で近似できるのは $\bar{x}_i$ に十分近いところに $x_i$ の値が出現する頻度が高いと考えられるため。

この結果から系統誤差と統計誤差を出すには？

k=0.200~0.400の範囲のデータから系統誤差を出す

(最良推定値のkの決め方による系統誤差は $\chi^2$ 乗値が最小の値の付近のデータを統合して得られる)

データを統合して得られる荷重平均は、

$$\bar{c} = \sum \frac{w_i c_i}{w} = 3.010$$

よって系統誤差は、定義より

$$\sigma_{sys} = |\hat{c} - \bar{c}| = 0.053$$

統計誤差は

$$\sigma_{stat} = \sigma_{k=0.265} = 0.220$$

# A1班の最良推定値と誤差

$$\hat{c} = 3.063 (\times 10^8 \text{ m/s} )$$

$$\sigma_{stat} = 0.220 (\times 10^8 \text{ m/s} )$$

$$\sigma_{sys} = 0.053 (\times 10^8 \text{ m/s} )$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \sigma_{stat}^2} = 0.226 (\times 10^8 \text{ m/s} )$$

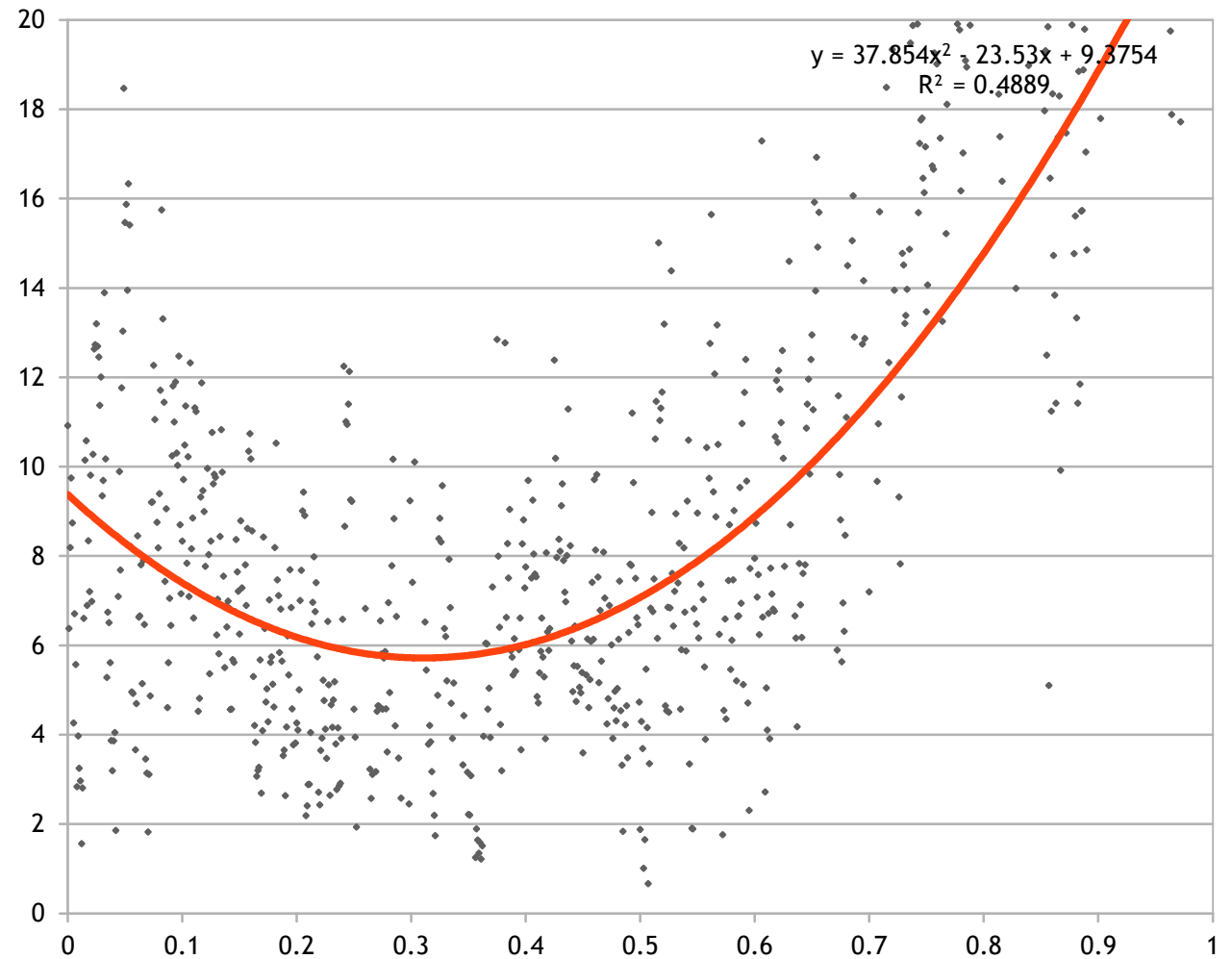
A1班の光速は、

$$(3.063 \pm 0.226) \times 10^8 \text{ m/s}$$

A1班と同じように  
kをk=0.000~  
1.000の範囲で変  
化させる

k=0.150~0.500  
の範囲にχ<sup>2</sup>乗値  
が最小となるkが  
存在することが推  
定できる

χ<sup>2</sup>乗値



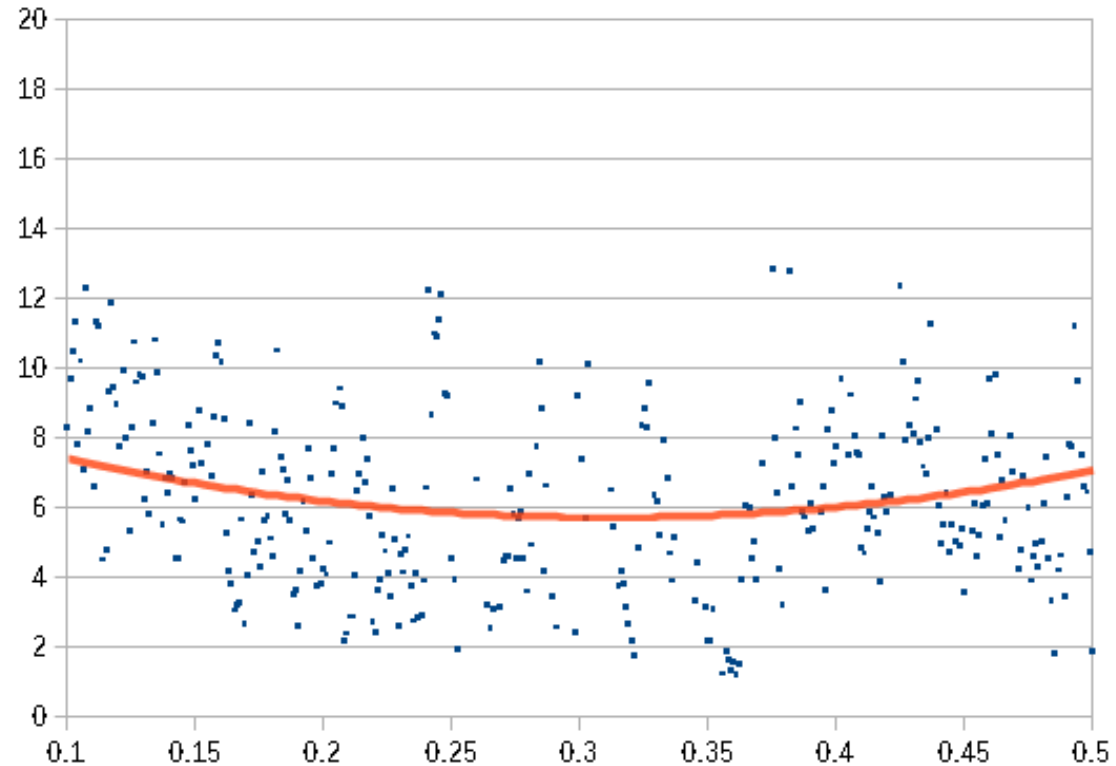
k

k=0.150~0.500の  
範囲でkを変化させ  
る

k=0.312のとき $\chi^2$   
乗値は最小値6.52を  
とる。

このときの光速は,  
2.966±0.075  
× 10<sup>8</sup>m/s

$\chi^2$ 乗値



k

# A2班の最良推定値と誤差

A1班と同じように計算して,

$$\hat{c} = 2.966(\times 10^8 \text{m/s})$$

$$\sigma_{stat} = 0.075(\times 10^8 \text{m/s})$$

$$\sigma_{sys} = 0.011(\times 10^8 \text{m/s})$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{sys}^2 + \sigma_{stat}^2} = 0.076(\times 10^8 \text{m/s})$$

A2班の光速は,

$$(2.966 \pm 0.076) \times 10^8 \text{ m/s}$$

# A1班とA2班のデータの統合

A1班  $(3.063 \pm 0.226) \times 10^8 \text{ m/s}$

A2班  $(2.966 \pm 0.076) \times 10^8 \text{ m/s}$

二つの班のデータは同じ真値を持つはず！

二つのデータを統合すると精度がよくなるので誤差は小さくなる

⇒荷重平均の考え方が使える



# 最終結果・文献値との比較

今回の実験の最終結果は,

$$c = (2.976 \pm 0.072) \times 10^8 \text{ m/s}$$

文献値は,

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (\text{理科年表より})$$

誤差の範囲内に収まっている

# まとめ

## 考えられうる実験の改善点・反省点

- ▶ 実験装置を完全に遮光する。実験ごとに環境がなるべく変わらないようにする。
- ▶ データを抽出して解析を行う必要がある。
- ▶ 空データやバックグラウンドのデータ数が多くなることを考慮して、データ数をより増やすことが必要である。

- ▶ 傾きを最大電圧で割ると、同時に光子が観測されたデータは同じ値をとるはずである。
- ▶ 1光子の場合のヒストグラムの山が確かに  $n$  光子でも対応していることがわかる。したがって、傾き分の最大電圧に制限をかけて、データを抽出すれば  $k$  の値によらずに光速を計算できるようになると考えられる。

## 感想・総括

- ▶ 結果を導くときに、文献値に引きずられないように解析方法を選択することができた。
- ▶ コンピュータを使用し、膨大なデータ数を自動で統計処理して実験結果を導く現代的な実験を経験できた。測定原理はシンプルであり、測定する対象はよく知られた光速であったが、正確な値を決めることは、コンピュータを用いても慎重な判断が必要であることがよく分かった。
- ▶ 実験に際してはFlash ADCが停止したり、実験環境をそろえるのが難しかったりと大変だった。そのため、実験回数を満足いくほど重ねられなかったし、まだまだ、データを取り直して、改善したい部分も多いが、ある程度文献値と適合した値が出てよかった。

終わり

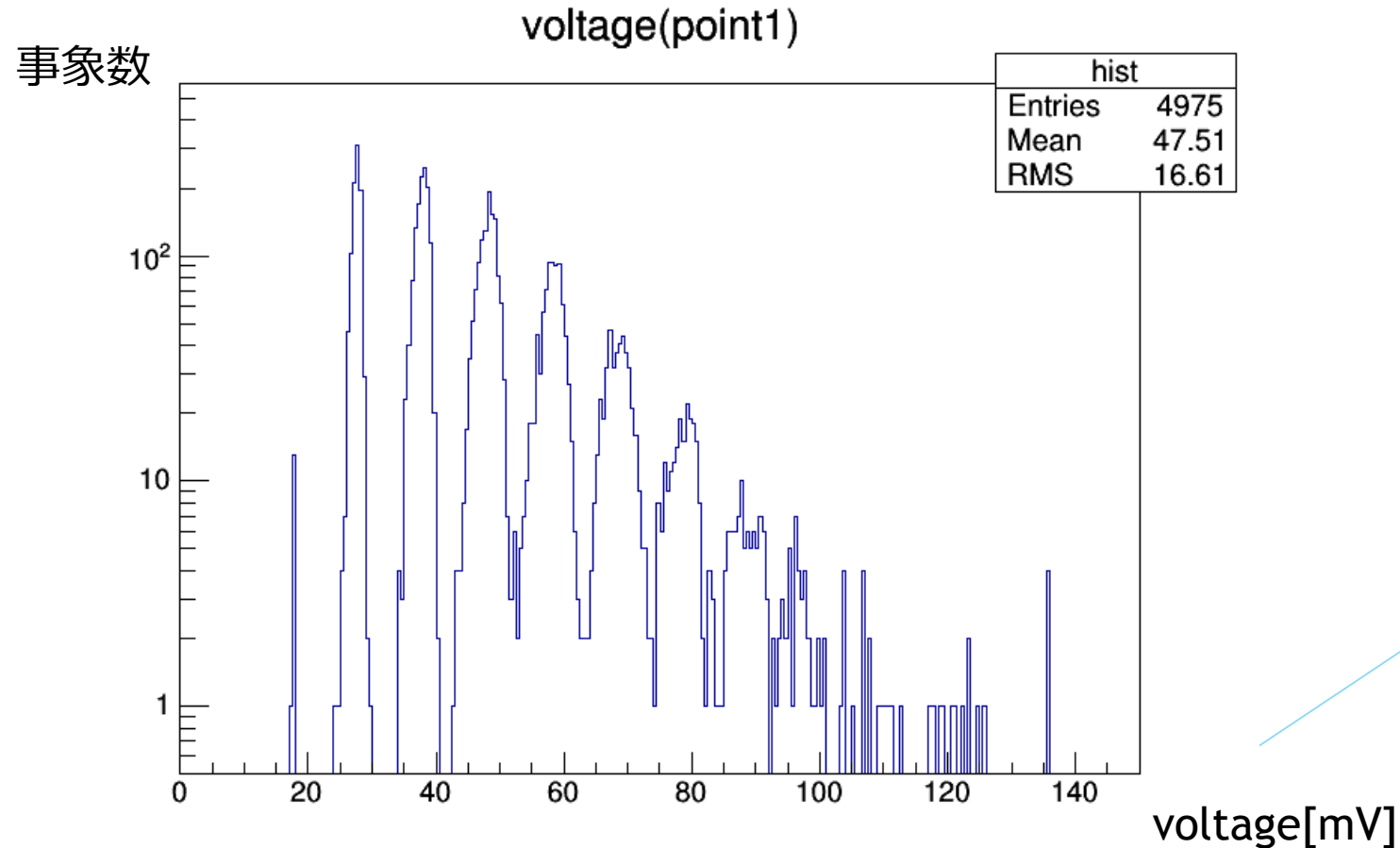
ご清聴ありがとうございました

# 参考文献

- ▶ 『新しい誤差論 実験データ解析法』, 吉澤泰和 著, 共立出版, 1989年
- ▶ 『計測における 誤差解析入門』 (原著第2版), John R. Taylor 著, 林茂雄・馬場涼 訳, 東京化学同人, 2000年
- ▶ Leo, W. R. (1992) *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments : a how-to approach*, 2nd edn (Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg)

# 補足. 光子の個数ごとに算出する

- ▶ 電圧のピークから光子一個分の電圧を求め、光子がk個到達したイベントを抽出する



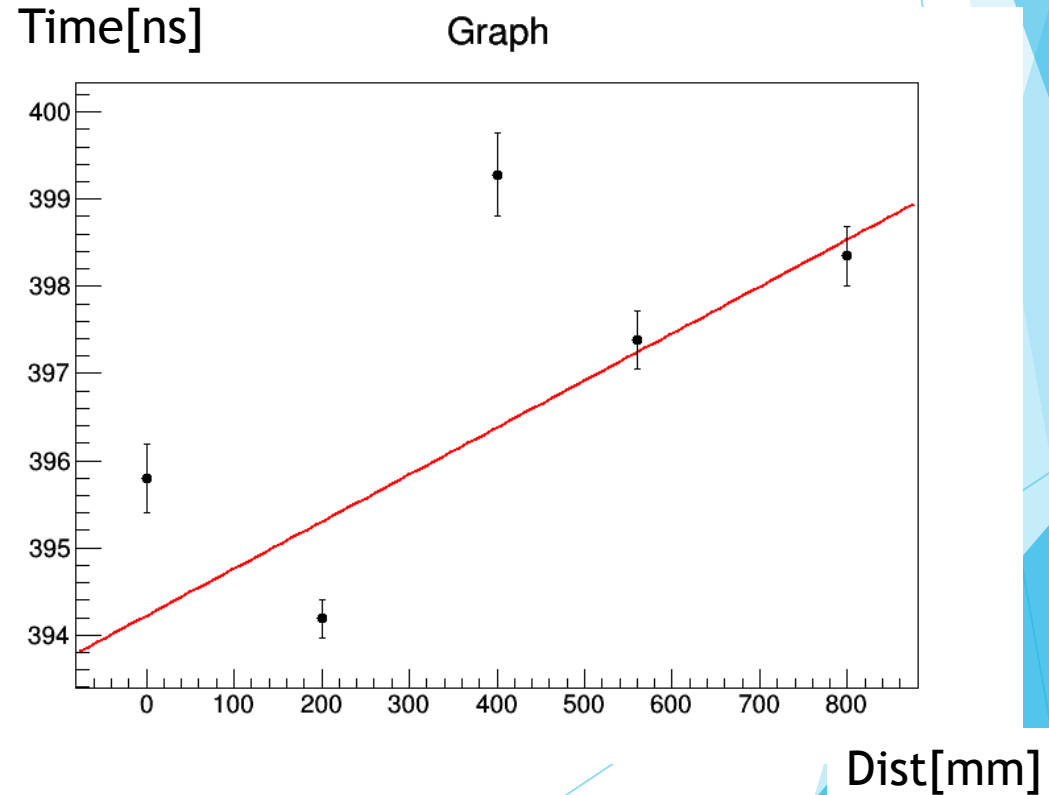
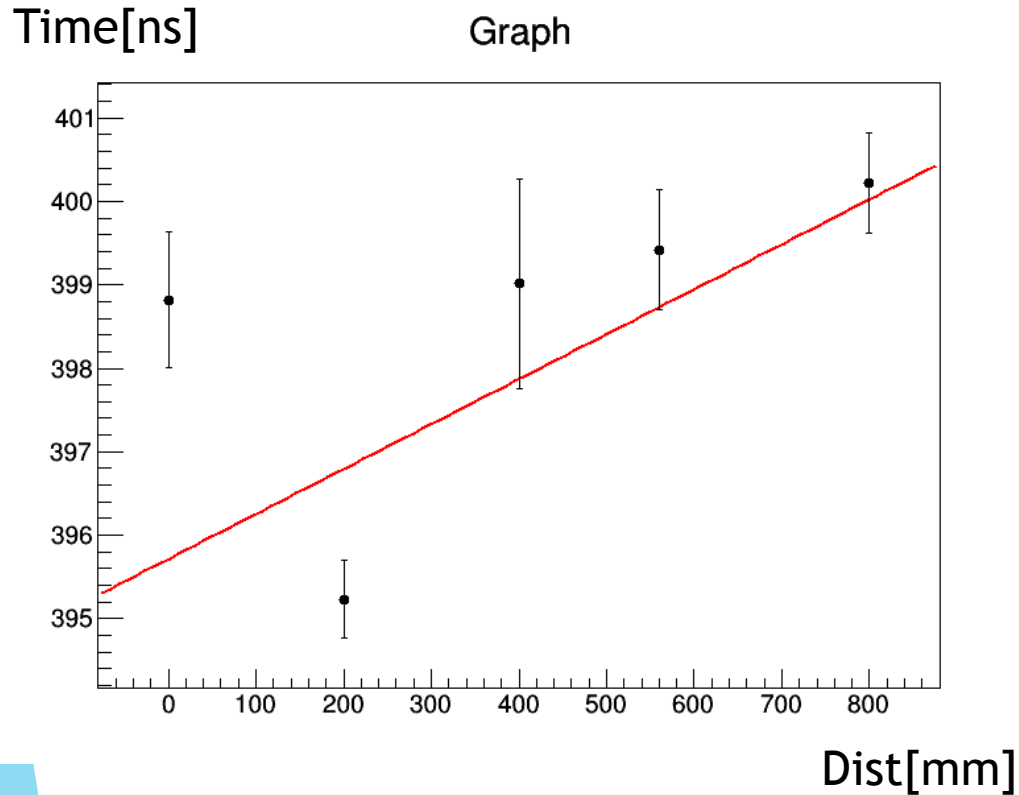


# 測定結果

少ない光子数 → Backgroundの光子が検出されている可能性

1photon: ( 1.857 +/- 0.358 ) x 10<sup>8</sup> m/s

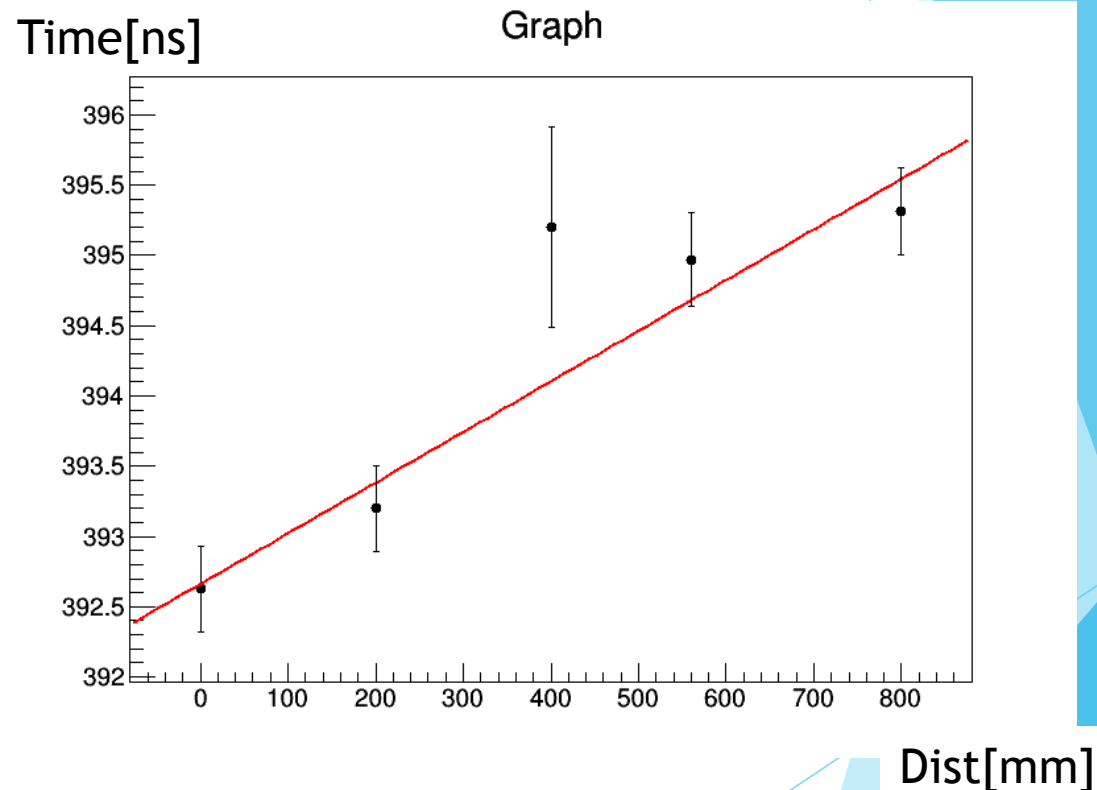
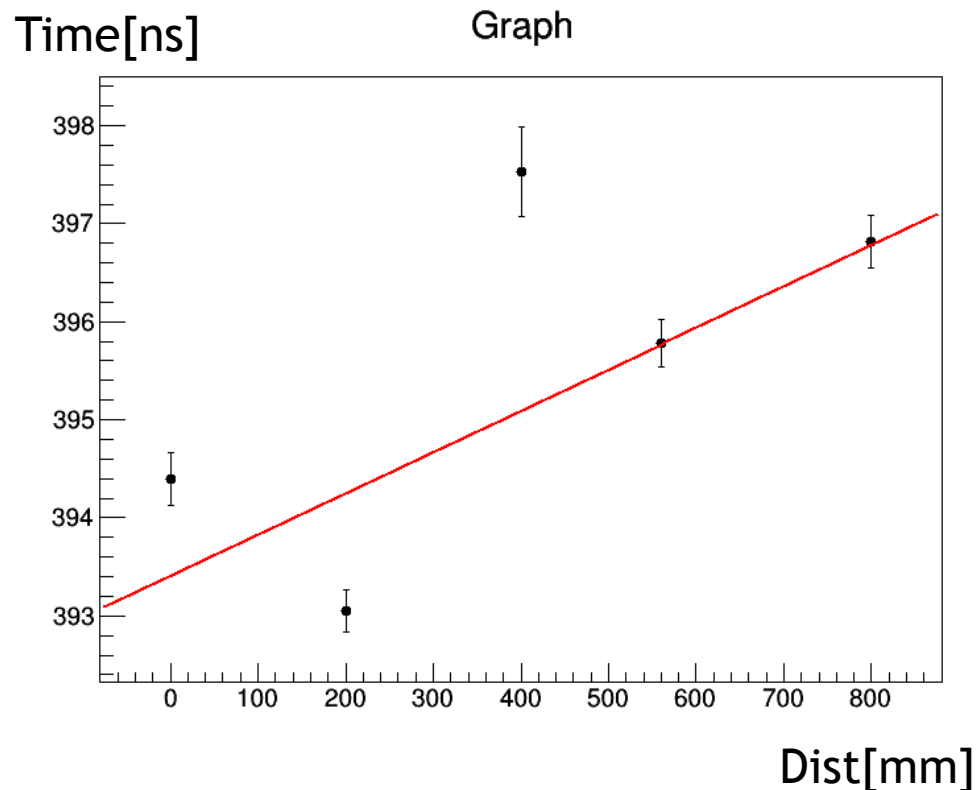
2photon: ( 1.853 +/- 0.185 ) x 10<sup>8</sup> m/s



# 全部のイベントを使って算出した光速に近い値が得られた

3photon: ( 2.374 +/- 0.237 ) x 10<sup>8</sup> m/s

4photon: ( 2.774 +/- 0.385 ) x 10<sup>8</sup> m/s

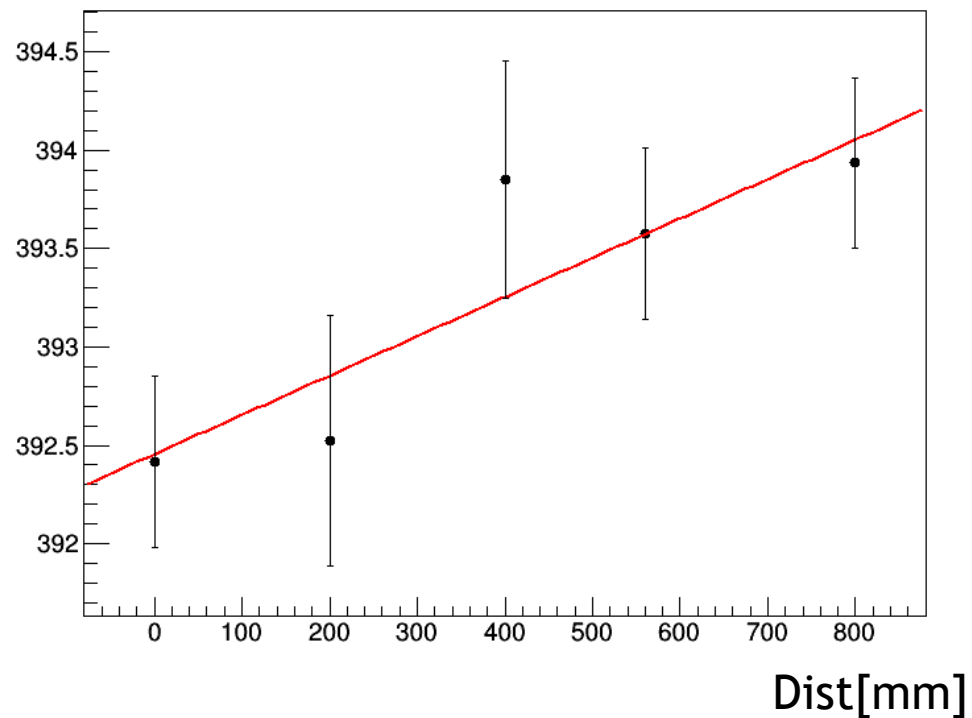


# 珍しいイベントのためサンプル数自体が少なく、標準偏差が大きくなる

5photon: ( 5.01 +/- 1.81 ) x 10<sup>8</sup> m/s

Time[ns]

Graph



6photon: ( 5.032 +/- 2.93 ) x 10<sup>8</sup> m/s

Time[ns]

Graph

