Positronium Hyperfine Structure

Hideki Morii Kyosuke Tsumura Shingo Kasahara Wataru Suganuma

September 9, 2002

この Report を Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) に捧げます.

Abstract

Positronium is a bound state of electron and , its antiparticle, positron. This energy eigenvalues almost degenerate, but very very little sprit exits, which results from whether the spin coupling is symmetry or antisymmetry. It's called Positoronium Hyperfine Structure. QED predicts this value 8.2×10^{-4}eV, that is, $\omega_0 = 1.27817 \times 10^{12}$Hz in frequency representaion. The end of our research is showing QED right by measuring it exprimentally.
The result is $\omega_0 = (1.28005 \pm 0.00178) \times 10^{12}$Hz. This wins 1.1σ for the theoritical value. Therefore we express QED is perfect.

Contents

1 Introduction **4**
- 1.1 Theory . . . 4
- 1.2 Experiment . . . 5

2 Spin-Spin Interaction Model for Positronium **6**
- 2.1 Our Ideology . . . 6
- 2.2 Its eigenvalues and states in static magnetic field . . . 6
- 2.3 Time evolution formula in static and oscillating magnetic field . . . 8
- 2.4 Approximate solution for those formula . . . 9
- 2.5 What method may I have in order to simulate 2 and 3 γ decays . . . 10
- 2.6 Time average of amplitude of transition . . . 12
- 2.7 What I think through the simulations . . . 14

3 Experiment **16**
- 3.1 General Setup . . . 16
- 3.2 Static Magnetic Field System . . . 17
  - 3.2.1 Static Magnetic Field . . . 17
  - 3.2.2 Calibration of Static Magnetic Field . . . 17
- 3.3 RF Magnetic Field System . . . 18
  - 3.3.1 SSG, FD, BPF, Amp, DC,etc . . . 18
  - 3.3.2 Cavity . . . 19
  - 3.3.3 Feedback System . . . 22
- 3.4 Gas Handling System . . . 22
- 3.5 ^{22}Na e^+ Source . . . 22
- 3.6 Ditector and DAQ System . . . 23
  - 3.6.1 NaI Scintilator . . . 23
  - 3.6.2 DAQ System . . . 24

4 Analysis **25**
- 4.1 Fitting Function . . . 25
- 4.2 Error Estimation . . . 26
  - 4.2.1 Error Transmission . . . 26
  - 4.2.2 Error of Static Magnetic Field . . . 26
- 4.3 Ps Creation Rate Alternation . . . 29
- 4.4 Results . . . 29

5 Discussion **31**
- 5.1 Achievement of Vacuum . . . 31
- 5.2 Improvement . . . 31
- 5.3 Beyond the World Record . . . 32

Acknowledgement **33**

A QED with B and α **34**
A.1 Field equations . . . 34
A.2 Canonical Quantization . . . 35
A.2.1 Same Time Commutation Relations . . . 35
A.2.2 Four Dimensional Commutation Relations . . . 36
A.3 Four Dimensional Momentum representation . . . 37
A.4 Propagator . . . 41
A.5 Feynman Gauge . . . 42

B Positronium Hyperfine Structure **44**
B.1 Invariant Amplitude . . . 44
B.2 Non-Rela Limit by $\mathcal{O}(c^{-3})$ . . . 45
B.2.1 Propagator . . . 46
B.2.2 Spinor for $\mathscr{M}_1$ . . . 46
B.2.3 Spinor for $\mathscr{M}_2$ . . . 47
B.3 Never Give Up Days . . . 48
B.3.1 Detail of $\mathscr{M}_1$ . . . 48
B.3.2 Detail of $\mathscr{M}_2$ . . . 49
B.3.3 Detail of $\mathscr{M}$ . . . 50
B.4 PHS at Last . . . 51
B.4.1 Born Approximation . . . 51
B.4.2 Fourier Transform . . . 52

C Numerical Recipes **54**
C.1 Inversed Hesse Matrix Method . . . 54
C.2 Levenberg-Marquardt Method . . . 56

D ジオメトリーによるポジトロニウム生成率の変化 **58**
D.1 Ar,Al 中での散乱断面積 . . . 59
D.1.1 Rutherford 散乱 . . . 59
D.1.2 bhabha 散乱断面積 . . . 59
D.2 多重散乱 . . . 61
D.3 陽電子のエネルギー損失 . . . 62
D.3.1 電離及び励起によるエネルギー損失 . . . 62
D.3.2 分極効果 . . . 63
D.3.3 制動放射によるエネルギー損失 . . . 63
D.3.4 その他のエネルギー損失 . . . 63
D.3.5 陽電子の平均走行距離 . . . 63
D.4 陽電子の磁場中の運動 . . . 64
D.5 2γ 崩壊した時 NaI ペアで観測される確率 . . . 65
D.6 生成率を求めるシミュレーション . . . 65

Members Memo and End Title **69**

Chapter 1

Introduction

1.1 Theory

Positronium とは一対の e^- と e^+ の結合状態をいい, Ps という記号で表される. その 2 粒子間には電磁相互作用しか働かない (万有引力は無視できる) ので, この系は QED で完全に記述され, 具体的な Hamiltonian for cms は $\mathcal{O}(c^{-3})$ で

$$\begin{aligned} H &= \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} - \frac{e^2}{r} \\ &\quad - \frac{\boldsymbol{p}^4}{4m^3c^2} + 4\pi\left(\frac{e\hbar}{2mc}\right)^2 \delta^3(\boldsymbol{r}) - \frac{e^2}{2m^2c^2r}\left(\boldsymbol{p}^2 + \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}}{r^2}\right) \\ &\quad + 6\left(\frac{e\hbar}{2mc}\right)^2 \frac{1}{r^3}\boldsymbol{l}\boldsymbol{S} \\ &\quad + \left(\frac{e\hbar}{2mc}\right)^2 \left\{\frac{6}{r^3}\left(\frac{(\boldsymbol{S}\boldsymbol{r})(\boldsymbol{S}\boldsymbol{r})}{r^2} - \frac{1}{3}\boldsymbol{S}^2\right) + 4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})\left(\frac{7}{3}\boldsymbol{S}^2 - 2\right)\right\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

となる ($\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{S}_- + \boldsymbol{S}_+$, $\hbar\boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$).

> e^- と e^+ は $\mathrm{Spin}\frac{1}{2}$ を有するので, Spin が反対称な Singlet と対称な Triplet で結合することができ, それぞれ $p-\mathrm{Ps}$ および $o-\mathrm{Ps}$ と呼ばれる.
> e^- と e^+ の対消滅は角運動量 $l=0$、すなわち S 状態で起こる場合が多く, 運動量・角運動量・Parity・荷電共役などの保存則から, $p-\mathrm{Ps}$ の S 状態 ($^1S_0$) は $1.25\times10^{-10}\mathrm{s}$ の寿命で 2γ を, また $o-\mathrm{Ps}$ の S 状態 ($^3S_1$) は $1.4\times10^{-7}\mathrm{s}$ の寿命で 3γ を放出して消滅する.

さて S 状態に限定して上記の Hamiltonian を書き改めると

$$H_{\mathit{eff}} = \frac{7}{12}\frac{me^4}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \boldsymbol{S}_-\boldsymbol{S}_+ \tag{1.2}$$

となり, $o-\mathrm{Ps}$ と $p-\mathrm{Ps}$ との Energy Sprit は

$$\hbar\omega_0 = \frac{7}{12}\frac{me^4}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 = 8.2\times10^{-4}\mathrm{eV} \tag{1.3}$$

で与えられる. この $\hbar\omega_0$ こそ Hyperfine Structure と呼ばれるものである.
この実験の主旨は, この $\hbar\omega_0$ を測定し QED を検証する事にある.

1.2 Experiment

模式的に Ps Hyperfine Structure を描くと

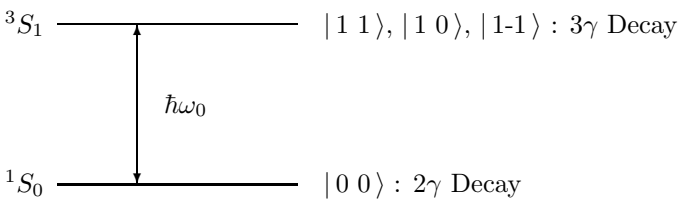


Figure 1.1: Ps Hyperfine Structure

となる.
この差を測定するために利用する物理は Spin 磁気共鳴である.
Ps の系 (2 準位系) に振動磁場 $B_1 \propto \cos\omega t$ をかけると $\omega_0 \simeq \omega$ のときに限り, $|0\ 0\rangle$ の占有率に変化が生じる. つまり 2γ Decay が増加 (あるいは減少) する. しかし ω を変化させることは技術的に困難であるため, Energy Sprit の方を変化させることにした. Ps の系に静磁場 B_0 をかけると $|0\ 0\rangle, |1\ 0\rangle$ に Mixing が起こり 1 部縮退が解け, Energy Sprit は以下のように変化する.

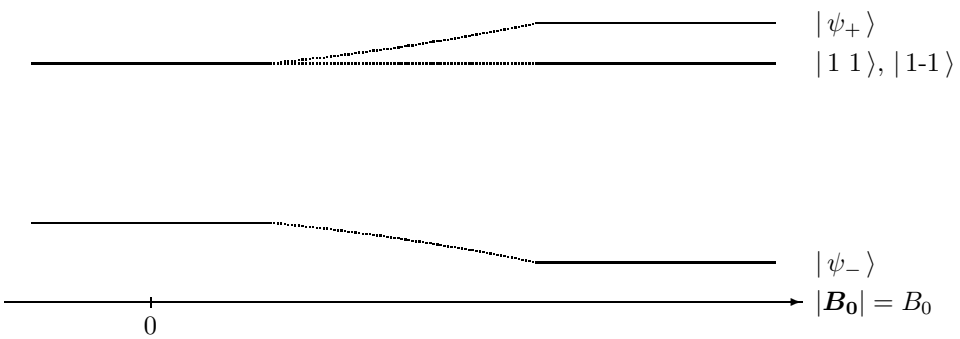


Figure 1.2: Mixing

実は用意できる ω は ω_0 の $\frac{1}{200}$ 倍ほ程の値 $(2\pi \times 1280 \times 10^6\text{s})$ のため, 共鳴することが可能なものは $|\psi_+\rangle$ と $|1\ 1\rangle$(または $|1\text{-}1\rangle$) の Sprit だけである. 2γ Decay 率 $P_{2\gamma}$ は B_0 と ω_0 で評価され, その具体的表式は Chapter2 で証明をかねて載せてある.

以上より我々の行うべき実験は

- 振動磁場 $\boldsymbol{B_1}$ をかけた状態を Keep したまま静磁場 B_0 を変化させる.
- 選択的に 2γ Decay Count を測定する.
- $P_{2\gamma}(B_0;\omega_0)$ で fitting することで Hyperfine Structure ω_0 を求める.

と要約される.

Chapter 2

Spin-Spin Interaction Model for Positronium

2.1 Our Ideology

Chapter1 で解説したように, S 状態の Ps を記述する Hamiltonian は

$$H = \hbar\omega_0 \boldsymbol{S}_- \cdot \boldsymbol{S}_+ \tag{2.1}$$

と書ける. このことは Ps の量子状態を

$$|0\ 0\rangle,\ |1\ 1\rangle,\ |1\ 0\rangle,\ |1\text{-}1\rangle \tag{2.2}$$

を基底にもつ, 4 次元 Hilbert 空間で表現することができることを意味する. しかし Ps は崩壊するため, 場の量子論を用いずに考察を続けていくことに困難をもたらす. そこで現象論的な方法として Hamiltonian を非 Hermite にすることを採用する.
つまり

$$-i\hbar\Gamma \tag{2.3}$$

を追加するのである. γ とは当然 Hermite で

$$\begin{aligned} \Gamma|0\ 0\rangle &= \frac{1}{2}\gamma_0|0\ 0\rangle & (2.4)\\ \Gamma|1\ i\rangle &= \frac{1}{2}\gamma_1|1\ i\rangle & (2.5)\\ (i &= 1,\ 0,\ \text{-}1) \end{aligned}$$

という性質を持つ演算子である. γ_0 は $p-\mathrm{Ps}$,γ_1 は $o-\mathrm{Ps}$ の寿命の逆数, つまり Decay Width(崩壊率) である.
この方法は, たとえ固有状態でも各々の寿命で存在確率が減少していくので, well-defined であるといえる.

2.2 Its eigenvalues and states in static magnetic field

Resonance Line(共鳴曲線) の導出のためには, まず静磁場中での Hamiltonian を書き下し, それの固有値と固有状態を算出しておくと便利である. Spin と磁場の相互作用は, これまた QED から予言されるように

$$\begin{cases} H_0 = \hbar\omega_0 \boldsymbol{S}_- \cdot \boldsymbol{S}_+ - i\hbar\Gamma - \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}_0 \\ \boldsymbol{\mu} = -g\mu_B(\boldsymbol{S}_- - \boldsymbol{S}_+) \\ \boldsymbol{B_0} = B_0\boldsymbol{e^z} \end{cases} \Longrightarrow H_0 = \hbar\omega_0 \boldsymbol{S}_- \cdot \boldsymbol{S}_+ - i\hbar\Gamma + g\mu_B B_0(S_-^z - S_+^z) \tag{2.6}$$

で与えられる. ここで g, μ_B は

$$
\begin{aligned}
g &= 2(1+0.0011614) && (2.7)\\
\mu_B &= \frac{e\hbar}{2mc} && (2.8)
\end{aligned}
$$

で定義された量であり, 特に前者は Landé g-factor と呼ばれ, この値は 1Loop の計算で導出されたものである[1]. さて (2.6) の固有値を算出していく. あらかじめ必要となる関係式を計算すると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_- \cdot \boldsymbol{S}_+ |\,0\ 0\,\rangle &= -\frac{3}{4}|\,0\ 0\,\rangle && (2.9)\\
\boldsymbol{S}_- \cdot \boldsymbol{S}_+ |\,1\ i\,\rangle &= \frac{1}{4}|\,1\ i\,\rangle && (2.10)\\
(i &= 1,\ 0,\ \text{-}1)
\end{aligned}
$$

そして

$$
\begin{aligned}
(S_-^z - S_+^z)|\,0\ 0\,\rangle &= |\,1\ 0\,\rangle && (2.11)\\
(S_-^z - S_+^z)|\,1\ 1\,\rangle &= 0 && (2.12)\\
(S_-^z - S_+^z)|\,1\ 0\,\rangle &= |\,0\ 0\,\rangle && (2.13)\\
(S_-^z - S_+^z)|\,1\text{-}1\,\rangle &= 0 && (2.14)
\end{aligned}
$$

となる. これらを用いると

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} H_0|\,\psi\,\rangle = E|\,\psi\,\rangle \\ |\,\psi\,\rangle = c_0|\,0\ 0\,\rangle + c_1|\,1\ 1\,\rangle + c_2|\,1\ 0\,\rangle + c_3|\,1\text{-}1\,\rangle \end{cases}\\
&\quad\Longrightarrow\quad [c_0(-\frac{3}{4}\hbar\omega_0 - i\hbar\frac{1}{2}\gamma_0) + c_2(g\mu_B B_0)]|\,0\ 0\,\rangle + [c_1(\frac{1}{4}\hbar\omega_0 - i\hbar\frac{1}{2}\gamma_1)]|\,1\ 1\,\rangle\\
&\qquad\qquad + [c_0(g\mu_B B_0) + c_2(\frac{1}{4}\hbar\omega_0 - i\hbar\frac{1}{2}\gamma_1)]|\,1\ 0\,\rangle + [c_3(\frac{1}{4}\hbar\omega_0 - i\hbar\frac{1}{2}\gamma_1)]|\,1\text{-}1\,\rangle\\
&\qquad\qquad = c_0E|\,0\ 0\,\rangle + c_1E|\,1\ 1\,\rangle + c_2E|\,1\ 0\,\rangle + c_3E|\,1\text{-}1\,\rangle
\end{aligned}
\qquad (2.15)
$$

と変形され, 更に行列でまとめ上げると

$$
\begin{pmatrix}
-\frac{3}{4}\hbar\omega_0 - i\hbar\frac{1}{2}\gamma_0 - E & 0 & g\mu_B B_0 & 0\\
0 & \frac{1}{4}\hbar\omega_0 - i\hbar\frac{1}{2}\gamma_1 - E & 0 & 0\\
g\mu_B B_0 & 0 & \frac{1}{4}\hbar\omega_0 - i\hbar\frac{1}{2}\gamma_1 - E & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\hbar\omega_0 - i\hbar\frac{1}{2}\gamma_1 - E
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (2.16)
$$

が手に入る. 物理的に興味のある状態の条件, つまり $(c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3) \neq 0$ を課すことで固有値方程式が手に入る. それを解くことにより

$$
\begin{aligned}
E &= \begin{cases}
\frac{1}{4}\hbar\omega_0 - i\hbar\frac{1}{2}\gamma_1 \\
\frac{1}{4}\hbar\omega_0 - i\hbar\frac{1}{2}\gamma_1 \\
\frac{1}{2}\{-\frac{1}{2}\hbar\omega_0 - i\hbar\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1) \pm \sqrt{[\hbar\omega_0 + i\hbar\frac{1}{2}(\gamma_0-\gamma_1)]^2 + 4(g\mu_B B_0)^2}\ \}
\end{cases}\\
&= \begin{cases}
\frac{\hbar}{2}(\frac{1}{2}\omega_0 - i\gamma_1) \\
\frac{\hbar}{2}(\frac{1}{2}\omega_0 - i\gamma_1) \\
\frac{\hbar}{2}[(\frac{1}{2}+\epsilon x)\omega_0 - i\gamma_1] \\
\frac{\hbar}{2}[(-\frac{3}{2}-\epsilon x)\omega_0 - i\gamma_0]
\end{cases}
\end{aligned}
\qquad (2.17)
$$

が帰結される. ここで関係式を見やすくするために

[1] この Report 中には証明を与えてない. 詳しくは参照文献 [4] にて.

$$x = \frac{2g\mu_B B_0}{\hbar\omega_0} \tag{2.18}$$

$$\epsilon = -(\frac{1}{x} + i\frac{\gamma_0 - \gamma_1}{2x\omega_0}) + \sqrt{(\frac{1}{x} + i\frac{\gamma_0 - \gamma_1}{2x\omega_0})^2 + 1} \tag{2.19}$$

という定義を行った. この固有値に対応する固有状態を導く作業に入る.

$$\begin{aligned} E = E_+ \equiv \frac{\hbar}{2}[(\frac{1}{2} + \epsilon x)\omega_0 - i\gamma_1] &\implies c_0 - \epsilon c_2 = 0,\ c_1 = c_3 = 0 \\ &\implies |\,\psi\,\rangle = |\,\psi_+\,\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}(\epsilon|\,0\ 0\,\rangle + |\,1\ 0\,\rangle) \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} E = E_- \equiv \frac{\hbar}{2}[(-\frac{3}{2} - \epsilon x)\omega_0 - i\gamma_0] &\implies \epsilon c_0 + c_2 = 0,\ c_1 = c_3 = 0 \\ &\implies |\,\psi\,\rangle = |\,\psi_-\,\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}(|\,0\ 0\,\rangle - \epsilon|\,1\ 0\,\rangle) \end{aligned} \tag{2.21}$$

$\frac{\hbar}{2}(\frac{1}{2}\omega_0 - i\gamma_1)$ に関しては縮退しているため固有値で状態を分離することができない. 最も自然な基底を選ぶことにする.

$$E = E_p \equiv \frac{\hbar}{2}(\frac{1}{2}\omega_0 - i\gamma_1) \implies |\,\psi\,\rangle = |\,\psi_p\,\rangle \equiv |\,1\ 1\,\rangle \tag{2.22}$$

$$E = E_m \equiv \frac{\hbar}{2}(\frac{1}{2}\omega_0 - i\gamma_1) \implies |\,\psi\,\rangle = |\,\psi_m\,\rangle \equiv |\,1\text{-}1\,\rangle \tag{2.23}$$

以上の結果をまとめると

eigenvalue	eigenstate	energy	decay width
E_p	$\|\,\psi_p\,\rangle$	$\frac{1}{4}\hbar\omega_0$	γ_1
E_m	$\|\,\psi_m\,\rangle$	$\frac{1}{4}\hbar\omega_0$	γ_1
E_+	$\|\,\psi_+\,\rangle$	$\frac{1}{4}\hbar\omega_0(1 + 2x\mathbf{Re}(\epsilon))$	$\gamma_1 - \omega_0 x\mathbf{Im}(\epsilon)$
E_-	$\|\,\psi_-\,\rangle$	$-\frac{3}{4}\hbar\omega_0(1 + \frac{2}{3}x\mathbf{Re}(\epsilon))$	$\gamma_0 + \omega_0 x\mathbf{Im}(\epsilon)$

となる. ここで, 固有値の実部が実際の Energy, 虚部が Decay Width に対応しているという事実を認めた上で用いた.

2.3 Time evolution formula in static and oscillating magnetic field

静磁場に加えて振動磁場を入れた状態での Ps 系の時間発展を, ここではいよいよ考察していく. 静磁場の場合と同様に Hamiltonian は

$$\begin{cases} H = H_0 - \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B_1} \\ \boldsymbol{B_1} = B_1\cos\omega t\boldsymbol{e^y} \end{cases} \implies H = H_0 + g\mu_B B_1\cos\omega t\ (S_-^y - S_+^y) \tag{2.24}$$

で与えられる. もちろん時間発展は Shrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\,\Psi(t)\,\rangle = H(t)|\,\Psi(t)\,\rangle \tag{2.25}$$

に任せるのであるが, Hamiltonian があらわに時間依存するため工夫をする. 具体的には

$$\begin{aligned} |\,\Psi(t)\,\rangle &= \sum_n a_n(t)\exp(-i\frac{E_n}{\hbar}t)|\,\psi_n\,\rangle \\ (n &= p,\ m,\ +,\ -) \end{aligned} \tag{2.26}$$

と展開して $a_n(t)$ に関する方程式にしてやると見通しが良い. この Idea 自体は Interaction 表示の発想に基づくものである. (2.25) に (2.26) を代入することによって

$$i\hbar\sum_n \dot{a}_n(t)\exp(-i\frac{E_n}{\hbar}t)\langle\,\psi_m\,|\,\psi_n\,\rangle = \sum_n a_n(t)\exp(-i\frac{E_n}{\hbar}t)g\mu_B B_1\cos\omega t\ \langle\,\psi_m\,|(S_-^y - S_+^y)|\,\psi_n\,\rangle \tag{2.27}$$

と変形される. ここで

$$\langle\,\psi_m\,|(S_-^y - S_+^y)|\,\psi_n\,\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\epsilon}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} & i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \\ 0 & 0 & i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\epsilon}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} & i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \\ -i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\epsilon^*}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} & -i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\epsilon^*}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} & 0 & 0 \\ -i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} & -i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

そして

$$\langle\,\psi_m\,|\,\psi_n\,\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\epsilon^*-\epsilon}{1+|\epsilon|^2} \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon-\epsilon^*}{1+|\epsilon|^2} & 1 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

という比較的自明な関係式を使うことで (2.27) は

$$\dot{a}_p(t) = y\omega\cos\omega t\ \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\left(\epsilon\exp(-i\delta\omega_+ - \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_1))t\ a_+(t) + \exp(i\delta\omega_- - \frac{1}{2}(\gamma_- - \gamma_1))t\ a_-(t)\right) \tag{2.30}$$

$$\dot{a}_m(t) = y\omega\cos\omega t\ \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\left(\epsilon\exp(-i\delta\omega_+ - \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_1))t\ a_+(t) + \exp(i\delta\omega_- - \frac{1}{2}(\gamma_- - \gamma_1))t\ a_-(t)\right) \tag{2.31}$$

$$\dot{a}_+(t) = -y\omega\cos\omega t\ \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2}\sqrt{1+|\epsilon|^2}\exp(i\delta\omega_+ + \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_1))t\ (a_p(t) + a_m(t)) \tag{2.32}$$

$$\dot{a}_-(t) = -y\omega\cos\omega t\ \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2}\sqrt{1+|\epsilon|^2}\exp(-i\delta\omega_- + \frac{1}{2}(\gamma_- - \gamma_1))t\ (a_p(t) + a_m(t)) \tag{2.33}$$

と整理される. やはりここでも見やすくするために,

$$\delta\omega_+ \equiv \frac{1}{2}\mathbf{Re}(\epsilon)x\omega_0 \tag{2.34}$$

$$\delta\omega_- \equiv (1 + \frac{1}{2}\mathbf{Re}(\epsilon)x)\omega_0 \tag{2.35}$$

$$\gamma_+ \equiv -\mathbf{Im}(\epsilon)x\omega_0 + \gamma_1 \tag{2.36}$$

$$\gamma_+ \equiv \mathbf{Im}(\epsilon)x\omega_0 + \gamma_0 \tag{2.37}$$

$$y \equiv \frac{g\mu_B B_1}{\hbar\omega} \tag{2.38}$$

と新しい記号を定義した.

2.4 Approximate solution for those formula

(2.30)(2.31)(2.32)(2.33) を任意の初期条件のもとで解きたいが厳密解は難しい. ゆえに近似を施しその方程式について考察を進める. $\delta\omega_+$ が共鳴を起こす Sprit であることより $\omega \simeq \delta\omega_+$ に限定して考える. そこで

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \tag{2.39}$$

として, $e^{\pm i(\omega-\delta\omega_+)t}$ を含まない項を 0 にする近似を行う. この「ゆっくり振動する Factor のみを拾う」という発想は,「激しく振動する量の積分は 0」という事実に基づくものである. 詳しくは解説しないが, δ 関数の Fourier 像を思い浮かべれば納得できるはずである. すると時間発展方程式は

$$\dot{a}_p(t) = y\omega\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\epsilon\exp[i(\omega-\delta\omega_+)-\frac{1}{2}(\gamma_+-\gamma_1)]t\ a_+(t) \tag{2.40}$$

$$\dot{a}_m(t) = y\omega\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\epsilon\exp[i(\omega-\delta\omega_+)-\frac{1}{2}(\gamma_+-\gamma_1)]t\ a_+(t) \tag{2.41}$$

$$\dot{a}_+(t) = -y\omega\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2}\sqrt{1+|\epsilon|^2}\exp[-i(\omega-\delta\omega_+)+\frac{1}{2}(\gamma_+-\gamma_1)]t\ (a_p(t)+a_m(t)) \tag{2.42}$$

$$\dot{a}_-(t) = 0 \tag{2.43}$$

と簡略化され, これらは以下の手続きで解くことができる. 最初は (2.40)(2.41)(2.42) を組み合わせ, $a_p(t)$, $a_m(t)$ を削除すると $a_+(t)$ に関する方程式が手に入り, 解くことができる.

$$\begin{aligned}
&\ddot{a}_+(t) = [-i(\omega-\delta\omega_+)+\frac{1}{2}(\gamma_+-\gamma_1)]\dot{a}_+(t) - y\omega\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2}\sqrt{1+|\epsilon|^2}2y\omega\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\epsilon a_+(t)\\
\Longrightarrow\quad &\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - [-i(\omega-\delta\omega_+)+\frac{1}{2}(\gamma_+-\gamma_1)]\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{4}y^2\omega^2\frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2}\}a_+(t) = 0\\
\Longrightarrow\quad &a_+(t) = \alpha_+e^{\beta_+t} + \alpha_-e^{\beta_-t}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

以上が詳細である. ここで更に定義された記号があり

$$\beta_\pm \equiv \frac{1}{2}\{[-i(\omega-\delta\omega_+)+\frac{1}{2}(\gamma_+-\gamma_1)] \pm \sqrt{[-i(\omega-\delta\omega_+)+\frac{1}{2}(\gamma_+-\gamma_1)]^2 - y^2\omega^2\frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2}}\ \} \tag{2.45}$$

$$\alpha_+ \equiv -\frac{1}{\beta_+-\beta_-}[\beta_-\alpha_+(0) + y\omega\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2}\sqrt{1+|\epsilon|^2}(a_p(0)+a_m(0))] \tag{2.46}$$

$$\alpha_- \equiv \frac{1}{\beta_+-\beta_-}[\beta_+\alpha_+(0) + y\omega\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2}\sqrt{1+|\epsilon|^2}(a_p(0)+a_m(0))] \tag{2.47}$$

で与えられる. (2.44) を用いると $a_p(t)$, $a_m(t)$ は

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} a_p(t)+a_m(t) = -\frac{1}{y\omega}2\sqrt{2}\frac{1+\epsilon^2}{\epsilon}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\exp[i(\omega-\delta\omega_+)-\frac{1}{2}(\gamma_+-\gamma_1)]t\ (\alpha_+e^{\beta_+t}+\alpha_-e^{\beta_-t}) \\ a_p(t)-a_m(t) = a_p(0)-a_m(0) \end{cases}\\
\Longrightarrow\quad &\begin{cases} a_p(t) = -\frac{1}{y\omega}\sqrt{2}\frac{1+\epsilon^2}{\epsilon}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\exp[i(\omega-\delta\omega_+)-\frac{1}{2}(\gamma_+-\gamma_1)]t\ (\alpha_+e^{\beta_+t}+\alpha_-e^{\beta_-t}) \\ \qquad\quad +\frac{1}{2}(a_p(0)-a_m(0)) \\ a_m(t) = -\frac{1}{y\omega}\sqrt{2}\frac{1+\epsilon^2}{\epsilon}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\exp[i(\omega-\delta\omega_+)-\frac{1}{2}(\gamma_+-\gamma_1)]t\ (\alpha_+e^{\beta_+t}+\alpha_-e^{\beta_-t}) \\ \qquad\quad -\frac{1}{2}(a_p(0)-a_m(0)) \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

と書き下せる. (2.43) からは

$$a_-(t) = a_-(0) \tag{2.49}$$

が帰結される. これらと (2.26) から, 静磁場・振動磁場中の Ps 系の時間発展は求まったと断言できる.

2.5 What method may I have in order to simulate 2 and 3 γ decays

時間発展が求まったものの, これをどう 2γ の崩壊確率に結びつけるかがまだ問題として残っている. この事柄の考察の前に, 初期条件 $a_p(0),\ a_m(0),\ a_+(0),\ a_-(0)$ を (2.2) で記した基底における初期条件に焼き直しておくことは重要である. というのも, $|\,\psi_n\,\rangle$ の状態はお互いに直行しておらず, また何より現象論的に導入された非 Hermite な Hamiltonian の固有状態で, 個人的に物理状態であると割り切れないためである. 後に初期条件で Phase 平均をとるという操作を行うが, この操作を正当化するためには物理状態であることがどうしても必要なのだ. さて焼き直しは

$$|\,\Psi(0)\,\rangle = \sum_n a_n(0)|\,\psi_n\,\rangle \equiv c_{00}|\,0\ 0\,\rangle + c_{11}|\,1\ 1\,\rangle + c_{10}|\,1\ 0\,\rangle + c_{1\text{-}1}|\,1\text{-}1\,\rangle \tag{2.50}$$

から行われ

$$\begin{cases} a_p(0) = c_{11} \\ a_m(0) = c_{1\text{-}1} \\ a_+(0) = \frac{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}{1+\epsilon^2}(\epsilon c_{00} + c_{10}) \\ a_-(0) = \frac{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}{1+\epsilon^2}(c_{00} - \epsilon c_{10}) \end{cases} \tag{2.51}$$

となる. 2γ の崩壊確率の構成に移ろう. まず, 今まで論じてきた非 Hermite の Hamiltonian による崩壊理論を忘れて, Ps 系が不死を得たとする. そのときの状態を $|\,\Psi_{zombie}(t)\,\rangle$ と書く. この場合の崩壊確率 (矛盾しているが) は

$$\begin{aligned} P''_{2\gamma} &= \textbf{time average}\ |\langle\, 0\ 0\,|\,\Psi_{zombie}(t)\,\rangle|^2 \\ &\equiv \int_0^\infty dt\ e^{-\gamma_0 t}|\langle\, 0\ 0\,|\,\Psi_{zombie}(t)\,\rangle|^2 \Big/ \int_0^\infty dt\ e^{-\gamma_0 t} \end{aligned} \tag{2.52}$$

で与えられると考えるのは妥当である. というのは, $|\langle\, 0\ 0\,|\,\Psi_{zombie}(t)\,\rangle|^2 (\equiv p(t))$ は時刻 t に状態 $|\,0\ 0\,\rangle$ すなわち ${}^1S_0$ を見出す確率であるから, もしこの時刻に突然崩壊するなら, $p(t)$ が崩壊確率であり, 観測される量はその時間平均と考えて差し支えないからである. 平均操作に初めて Decay Width を用いることが特徴である.
我々の崩壊理論と (2.52) を滑らかに Joint するためには

$$e^{-\gamma_0 t}|\langle\, 0\ 0\,|\,\Psi_{zombie}(t)\,\rangle|^2 \longrightarrow |\langle\, 0\ 0\,|\,\Psi(t)\,\rangle|^2 \tag{2.53}$$

という操作で問題は生じない. つまり

$$\begin{aligned} P'_{2\gamma} &= \int_0^\infty dt\ |\langle\, 0\ 0\,|\,\Psi(t)\,\rangle|^2 \Big/ \int_0^\infty dt\ e^{-\gamma_0 t} \\ &= \gamma_0 \int_0^\infty dt\ |\langle\, 0\ 0\,|\,\Psi(t)\,\rangle|^2 \end{aligned} \tag{2.54}$$

を得る. まだ完成ではなく, 測定対象である Ps 系はその 1 つずつが (2.2) の基底での線形結合で表されていることを考えると, 初期状態での Phase 平均

$$\begin{aligned} \textbf{phave}(c_i c_j^*) &\equiv \delta_{ij}|c_i|^2 \\ (i &= 00,\ 11,\ 10,\ 1\text{-}1) \end{aligned} \tag{2.55}$$

の操作が必要であろう. $|c_i|^2$ は Ps が生まれる環境に依存する量で全 Ps に普遍であるが, その Phase は多様である. 10 分 Order の測定時間と 10^7Order の Count Rate なので, あらゆる Phase が同じ重さで現れると考えて問題は無い. これが Phase 平均の妥当性を保証する. つまり

$$\begin{aligned} P_{2\gamma} &= \textbf{phase average}\ P'_{2\gamma} \\ &= \gamma_0 \int_0^\infty dt\ \textbf{phave}(|\langle\, 0\ 0\,|\,\Psi(t)\,\rangle|^2) \end{aligned} \tag{2.56}$$

が最終表式である. ちなみに全く同様にして ${}^3S_1$ の 3γ 崩壊率も

$$P_{2\gamma} = \gamma_1 \int_0^\infty dt\ \textbf{phave}(|\langle\, 1\ 1\,|\,\Psi(t)\,\rangle|^2 + |\langle\, 1\ 0\,|\,\Psi(t)\,\rangle|^2 + |\langle\, 1\text{-}1\,|\,\Psi(t)\,\rangle|^2) \tag{2.57}$$

と評価される.

2.6 Time average of amplitude of transition

(2.56)(2.57) で崩壊率が求まることが判ったので実行する. 途中の計算は物理以外で複雑だが MISS が無いように行う.

$$
\begin{aligned}
\langle\, 0\ 0 \,|\, \Psi(t) \,\rangle &= \sum_n a_n(t) \exp(-i\frac{E_n}{\hbar}t) \langle\, 0\ 0 \,|\, \psi_n \,\rangle \\
&= a_+(t) \exp(-i\frac{E_+}{\hbar}t) \frac{\epsilon}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} + a_-(t) \exp(-i\frac{E_-}{\hbar}t) \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \\
&= c_{11} \left(y\omega \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2} \frac{1}{\beta_+ - \beta_-} (-e^{\beta_+ t} + e^{\beta_- t}) \exp(-i\frac{E_+}{\hbar}t) \right) \\
&\quad + c_{1\text{-}1} \left(y\omega \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2} \frac{1}{\beta_+ - \beta_-} (-e^{\beta_+ t} + e^{\beta_- t}) \exp(-i\frac{E_+}{\hbar}t) \right) \\
&\quad + c_{10} \left(\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2} \frac{1}{\beta_+ - \beta_-} (-\beta_- e^{\beta_+ t} + \beta_+ e^{\beta_- t}) \exp(-i\frac{E_+}{\hbar}t) - \frac{\epsilon}{1+\epsilon^2} \exp(-i\frac{E_-}{\hbar}t) \right) \\
&\quad + c_{00} \left(\frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2} \frac{1}{\beta_+ - \beta_-} (-\beta_- e^{\beta_+ t} + \beta_+ e^{\beta_- t}) \exp(-i\frac{E_+}{\hbar}t) + \frac{1}{1+\epsilon^2} \exp(-i\frac{E_-}{\hbar}t) \right) \qquad (2.58)
\end{aligned}
$$

次に Phase 平均をとる.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{phave}\ (|\langle\, 0\ 0 \,|\, \Psi(t) \,\rangle|^2) \\
= \ & (|\epsilon|^2 |c_{00}|^2 + |c_{10}|^2) \frac{|\epsilon|^2}{|1+\epsilon^2|^2} \frac{1}{|\beta_+ - \beta_+|^2} \left(|\beta_-|^2 \exp(\beta_+ + \beta_+^* - i\frac{E_+ - E_+^*}{\hbar})t \right. \\
&\qquad \left. + |\beta_+|^2 \exp(\beta_- + \beta_-^* - i\frac{E_+ - E_+^*}{\hbar})t - 2\mathbf{Re}(\beta_- \beta_+^* \exp(\beta_+ + \beta_-^* - i\frac{E_+ - E_+^*}{\hbar})t) \right) \\
&+ (\frac{1}{|\epsilon|^2} |c_{00}|^2 + |c_{10}|^2) \frac{|\epsilon|^2}{|1+\epsilon^2|^2} \exp(-i\frac{E_- - E_-^*}{\hbar}t) \\
&- 2\mathbf{Re}\left\{ (-\frac{\epsilon}{\epsilon^*} |c_{00}|^2 + |c_{10}|^2) \frac{|\epsilon|^2}{|1+\epsilon^2|^2} \frac{1}{\beta_+ - \beta_-} \left(-\beta_- \exp(\beta_+ - i\frac{E_+ - E_-^*}{\hbar})t \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. + \beta_+ \exp(\beta_- - i\frac{E_+ - E_-^*}{\hbar})t \right) \right\} \\
&+ (|c_{11}|^2 + |c_{1\text{-}1}|^2) \frac{|\epsilon|^4}{|1+\epsilon^2|^2} \frac{y^2}{8} \omega^2 \frac{1}{|\beta_+ - \beta_+|^2} \left(\exp(\beta_+ + \beta_+^* - \frac{E_+ - E_+^*}{\hbar})t \right. \\
&\qquad \left. + \exp(\beta_- + \beta_-^* - \frac{E_+ - E_+^*}{\hbar})t - 2\mathbf{Re}(\exp(\beta_+ + \beta_-^* - i\frac{E_+ - E_+^*}{\hbar})t) \right) \qquad (2.59)
\end{aligned}
$$

最後に時間平均の操作を行う.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty dt\ \mathbf{phave}\ (|\langle\, 0\ 0 \,|\, \Psi(t) \,\rangle|) \\
= \ & (|\epsilon|^2 |c_{00}|^2 + |c_{10}|^2) \frac{|\epsilon|^2}{|1+\epsilon^2|^2} \frac{1}{|\beta_+ - \beta_+|^2} \left(|\beta_-|^2 \frac{1}{\gamma_+ - 2\mathbf{Re}(\beta_+)} \right. \\
&\qquad \left. + |\beta_+|^2 \frac{1}{\gamma_+ - 2\mathbf{Re}(\beta_-)} - 2\mathbf{Re}(\beta_- \beta_+^* \frac{1}{\gamma_+ - (\beta_+ - \beta_-^*)}) \right) \\
&+ (\frac{1}{|\epsilon|^2} |c_{00}|^2 + |c_{10}|^2) \frac{|\epsilon|^2}{|1+\epsilon^2|^2} \frac{1}{\gamma_-} \\
&- 2\mathbf{Re}\left\{ (-\frac{\epsilon}{\epsilon^*} |c_{00}|^2 + |c_{10}|^2) \frac{|\epsilon|^2}{|1+\epsilon^2|^2} \frac{1}{\beta_+ - \beta_-} \left(-\beta_- \frac{1}{\frac{1}{2}(\gamma_+ + \gamma_-) + i(\delta\omega_+ + \delta\omega_-) - \beta_+} \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. + \beta_+ \frac{1}{\frac{1}{2}(\gamma_+ + \gamma_-) + i(\delta\omega_+ + \delta\omega_-) - \beta_-} \right) \right\}
\end{aligned}
$$

$$+(|c_{11}|^2+|c_{1\text{-}1}|^2)\frac{|\epsilon|^4}{|1+\epsilon^2|^2}\frac{y^2}{8}\omega^2\frac{1}{|\beta_+-\beta_+|^2}\Big(\frac{1}{\gamma_+-2\mathbf{Re}(\beta_+)}$$
$$+\frac{1}{\gamma_+-2\mathbf{Re}(\beta_-)}-2\mathbf{Re}(\frac{1}{\gamma_+-(\beta_++\beta_-^*)})\Big)$$
$$= (|\epsilon|^2|c_{00}|^2+|c_{10}|^2)A+(\frac{1}{|\epsilon|^2}|c_{00}|^2+|c_{10}|^2)B-2\mathbf{Re}((-\frac{\epsilon}{\epsilon^*}|c_{00}|^2+|c_{10}|^2)C)+(|c_{11}|^2+|c_{1\text{-}1}|^2)|\epsilon|^2D \quad (2.60)$$

$P_{2\gamma}$ の導出だけなら以上で充分であるが, 対称性の要請から $P_{3\gamma}$ の具体的表式が必要となる. ゆえに結果だけであるが

$$\int_0^\infty dt\ \mathbf{phave}\ (|\langle\, 1\ 0\,|\,\Psi(t)\,\rangle|)$$
$$= (|c_{00}|^2+\frac{1}{|\epsilon|^2}|c_{10}|^2)A+(|c_{00}|^2+|\epsilon|^2|c_{10}|^2)B-2\mathbf{Re}((|c_{00}|^2-\frac{\epsilon^*}{\epsilon}|c_{10}|^2)C)+(|c_{11}|^2+|c_{1\text{-}1}|^2)D \quad (2.61)$$

$$\int_0^\infty dt\ \mathbf{phave}\ (|\langle\, 1\ 1\,|\,\Psi(t)\,\rangle|)$$
$$= (|\epsilon|^2|c_{00}|^2+|c_{10}|^2)D+(|c_{11}|^2+|c_{1\text{-}1}|^2)E+(|c_{11}|^2-|c_{1\text{-}1}|^2)F \quad (2.62)$$

$$\int_0^\infty dt\ \mathbf{phave}\ (|\langle\, 1\text{-}1\,|\,\Psi(t)\,\rangle|)$$
$$= (|\epsilon|^2|c_{00}|^2+|c_{10}|^2)D+(|c_{11}|^2+|c_{1\text{-}1}|^2)E-(|c_{11}|^2-|c_{1\text{-}1}|^2)F \quad (2.63)$$

が算出される. 新記号 $A,\ B,\ C,\ D,\ D,\ E,\ F$ の定義は

$$A \equiv \frac{|\epsilon|^2}{|1+\epsilon^2|^2}\Big(\frac{|\beta_-|^2}{|\beta_+-\beta_+|^2}\frac{1}{\gamma_+-2\mathbf{Re}(\beta_+)}$$
$$+\frac{|\beta_+|^2}{|\beta_+-\beta_+|^2}\frac{1}{\gamma_+-2\mathbf{Re}(\beta_-)}-2\mathbf{Re}(\frac{\beta_-\beta_+^*}{|\beta_+-\beta_+|^2}\frac{1}{\gamma_+-(\beta_+-\beta_-^*)})\Big) \quad (2.64)$$
$$B \equiv \frac{|\epsilon|^2}{|1+\epsilon^2|^2}\frac{1}{\gamma_-} \quad (2.65)$$
$$C \equiv \frac{|\epsilon|^2}{|1+\epsilon^2|^2}\Big(\frac{\beta_-}{\beta_--\beta_+}\frac{1}{\frac{1}{2}(\gamma_++\gamma_-)+i(\delta\omega_++\delta\omega_-)-\beta_+}$$
$$+\frac{\beta_+}{\beta_+-\beta_-}\frac{1}{\frac{1}{2}(\gamma_++\gamma_-)+i(\delta\omega_++\delta\omega_-)-\beta_-}\Big) \quad (2.66)$$
$$D \equiv \frac{|\epsilon|^2}{|1+\epsilon^2|^2}\frac{y^2}{8}\omega^2\frac{1}{|\beta_+-\beta_+|^2}\Big(\frac{1}{\gamma_+-2\mathbf{Re}(\beta_+)}$$
$$+\frac{1}{\gamma_+-2\mathbf{Re}(\beta_-)}-2\mathbf{Re}(\frac{1}{\gamma_+-(\beta_++\beta_-^*)})\Big) \quad (2.67)$$
$$E \equiv \frac{1}{4}\Big(\frac{|\beta_+|^2}{|\beta_+-\beta_-|^2}\frac{1}{\gamma_+-2\mathbf{Re}(\beta_+)}+\frac{|\beta_-|^2}{|\beta_+-\beta_-|^2}\frac{1}{\gamma_+-2\mathbf{Re}(\beta_-)}+\frac{1}{\gamma_1}$$
$$-2\mathbf{Re}(\frac{\beta_+\beta_-^*}{|\beta_+-\beta_-|^2}\frac{1}{\gamma_+-(\beta_++\beta_-^*)})\Big) \quad (2.68)$$
$$F \equiv \frac{1}{4}\Big(2\mathbf{Re}(\frac{\beta_+}{\beta_+-\beta_-}\frac{1}{\frac{1}{2}(\gamma_++\gamma_1)-i(\omega-\delta\omega_+)-\beta_+})$$
$$-2\mathbf{Re}(\frac{\beta_-}{\beta_+-\beta_-}\frac{1}{\frac{1}{2}(\gamma_++\gamma_1)-i(\omega-\delta\omega_+)-\beta_-})\Big) \quad (2.69)$$

で成され, $P_{2\gamma},\ P_{3\gamma}$ は

$$P_{2\gamma} = \gamma_0\Big((|\epsilon|^2|C_{00}|^2+|c_{10}|^2)A+(\frac{1}{|\epsilon|^2}|c_{00}|^2+|c_{10}|^2)B-2\mathbf{Re}((-\frac{\epsilon}{\epsilon^*}|c_{00}|^2$$

$$+ |c_{10}|^2)C) + (|c_{11}|^2 + |c_{1\text{-}1}|^2)|\epsilon|^2 D\Big) \tag{2.70}$$

$$P_{3\gamma} = \gamma_1\Big((|c_{00}|^2 + \frac{1}{|\epsilon|^2}|c_{10}|^2)A + (|c_{00}|^2 + |\epsilon|^2|c_{10}|^2)B - 2\mathbf{Re}((|c_{00}|^2 - \frac{\epsilon^*}{\epsilon}|c_{10}|^2)C)$$
$$+ (|c_{11}|^2 + |c_{1\text{-}1}|^2 + 2|\epsilon|^2|c_{00}|^2 + 2|\epsilon|^2|c_{10}|^2)D + 2(|c_{11}|^2 + |c_{1\text{-}1}|^2)E\Big) \tag{2.71}$$

で与えられる.

2.7 What I think through the simulations

(2.70)(2.71) が得られた時点で Resonance Line を描いてみることができる. 未だに c_i を固定していないことに注意する. まずは全ての重みが等しいときの $P_{2\gamma}$, $P_{3\gamma}$ を Simulation してみる.

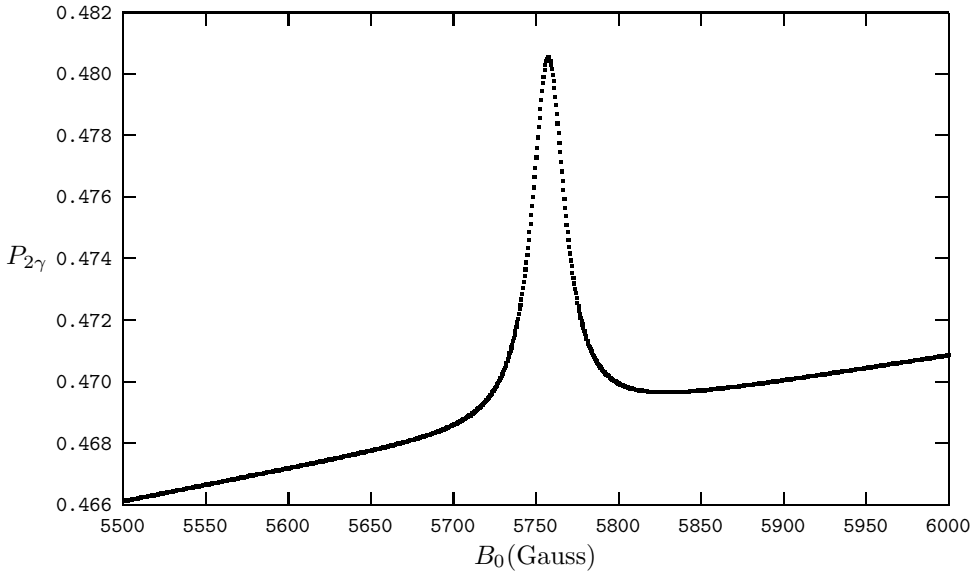


Figure 2.1: $P_{2\gamma}$ with $|c_{00}|^2 = 0.25$ $|c_{11}|^2 = 0.25$ $|c_{10}|^2 = 0.25$ $|c_{1\text{-}1}|^2 = 0.25$

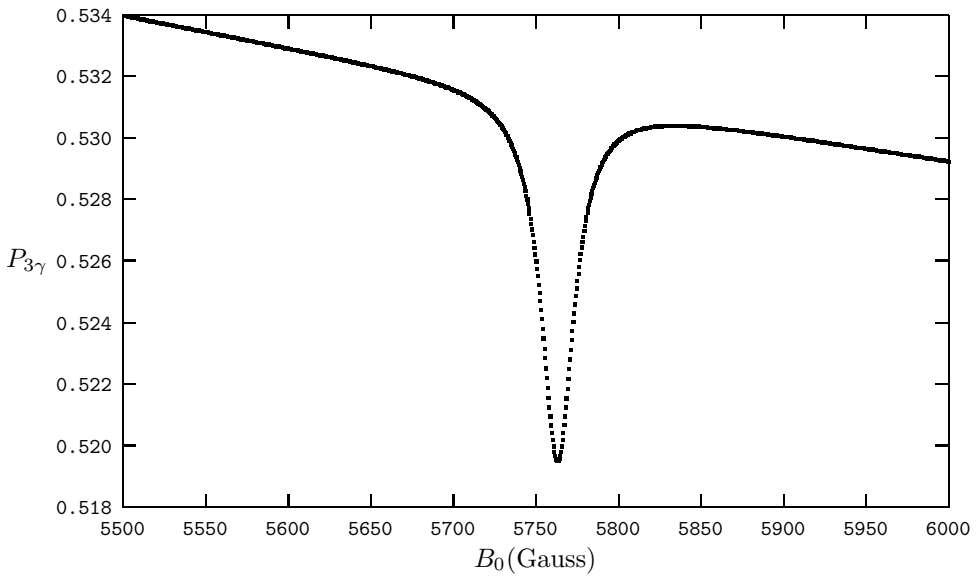


Figure 2.2: $P_{3\gamma}$ with $|c_{00}|^2 = 0.25$ $|c_{11}|^2 = 0.25$ $|c_{10}|^2 = 0.25$ $|c_{1\text{-}1}|^2 = 0.25$

Figure2.1 からは確かに 5750Gauss 近傍で Peak が確認される. また Figure2.2 からは下 Peak になることが判る. $P_{2\gamma}+P_{3\gamma}$ を計算すると Flat$(=1)$ になった. (2.70)(2.71) の導出の際に Phase 平均をとっているため, これはそう自明なことではない.
我々の実験環境では Figure2.1 を期待すれば実はよいのであるが, もちろん他の初期条件下での Simulation も行った. 中でも興味深いものを 1 つ提示しておこう.

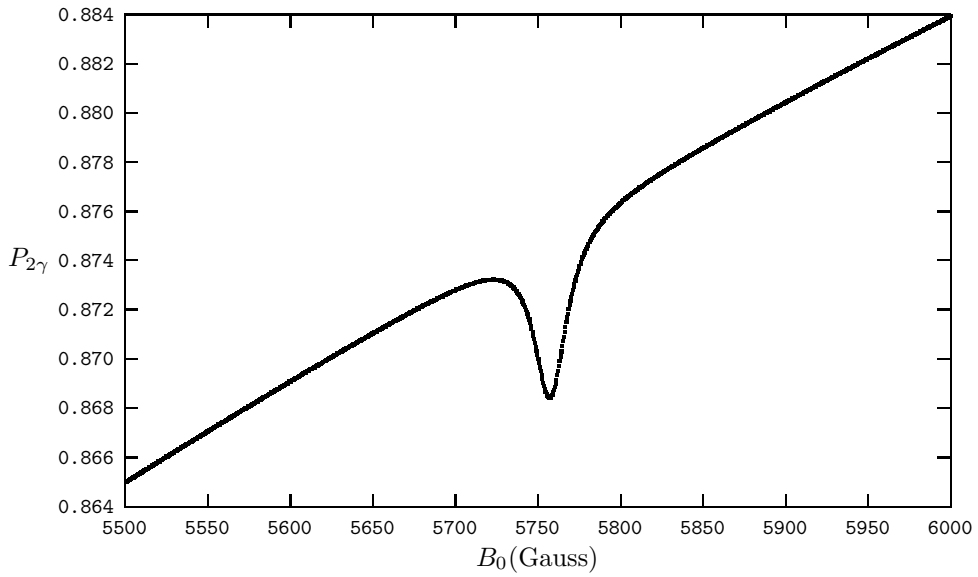


Figure 2.3: $P_{2\gamma}$ with $|c_{00}|^2=0$ $|c_{11}|^2=0$ $|c_{10}|^2=1$ $|c_{1\text{-}1}|^2=0$

注目すべきは Figure2.3 は $P_{2\gamma}$ のものであるということだろう. なんとこちらも下 Peak を示す可能性があるのだ. 初期条件に関して $P_{2\gamma}$ は連続なので, 最悪の場合 Peak が潰されてしまうのだ. ただし初期条件に乱数を用いて統計をためたところ, 下 Peak を示す Graph の出現率は 2.7% 程度であったため, 自然がこのような Fine Tuning をするわけが無いという理由からこの可能性には消えてもらった.

「全ての重みが等しい」という条件は, ほとんど縮退している系に対しては非常に物理的である. Hyperfine Structure を Coupling Constant とした無限次元 (平均場近似)Ising 系で, Spin の向きがそろう温度を計算したところ 4K という値が得られた. この温度まで冷やせばあるいは偏極した初期条件での Graph を観測できるかもしれない[2].

[2]固体化上等. ますます Ising Model が正しくなる.

Chapter 3

Experiment

3.1 General Setup

静磁場とそれに直交する振動磁場の下で Ps の崩壊を観測するために、図 3.1 のような Setup を用いた。

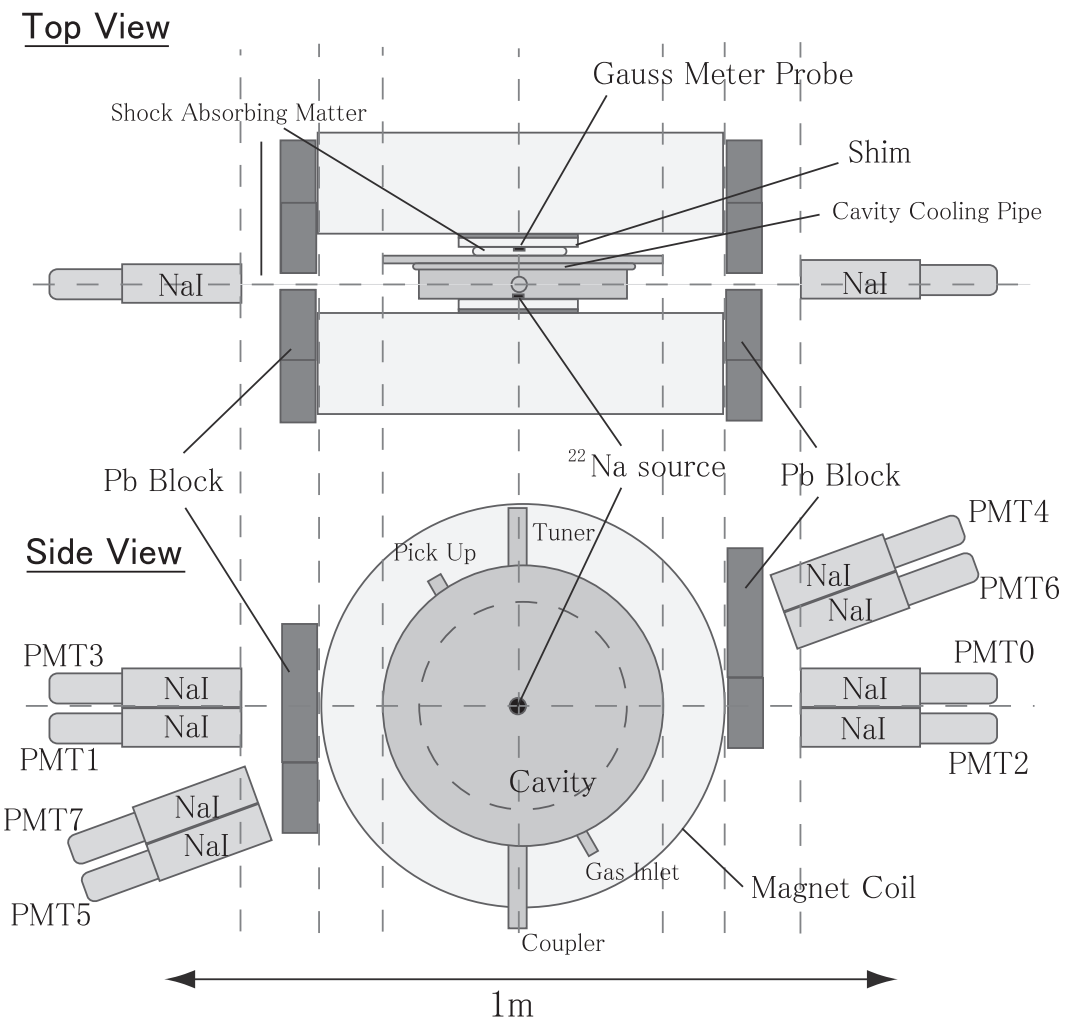


Figure 3.1: 実験の General Setup

この実験の Setup は大まかに分けて

1. Static Magnetic Field System

2. RF Magnetic Field System
3. Gas Handling System
4. ^{22}Na e^+ Source
5. Ditector and DAQ System

に分けられる。以下でそれぞれについて詳しく説明する。

3.2 Static Magnetic Field System

この実験では約 6000G の静磁場が必要となる。また、Ps の崩壊点が常に同じ磁場であるために、均一な磁場であることが求められる。
このために、図 3.1 の Magnetic Coil に約 50A の電流を流し、Shim で磁束を整形し、必要な強さを得られるようにした。また、静磁場の強さについては、校正用 NMR と実際の測定に用いる Tesla Meter を比較することで校正を行った。
ここでは、その具体的な方法について述べる。

3.2.1 Static Magnetic Field

静磁場は電磁石に直流電源を接続し、約 50A の電流を流すことで得た。直流電源は約 45A を供給する主電源[1] と磁場の微調整用の副電源[2]を並列に運転した。
しかし、電磁石に電流を流すだけでは必要な静磁場の値は得られず、また Ps の崩壊する領域で均一な磁場も得られないので、Shim と呼ばれる鉄の円盤を取り付けた。磁場の形を一様にするため、Shim は中央が少し凹んだ形をしている。

3.2.2 Calibration of Static Magnetic Field

本実験に先立って、静磁場の強さの誤差を見積もるため、Cavity を電磁石の中に入れる前に NMR[3]で磁場の空間分布を測定した。
また、本実験中は Cavity が入るので、磁場の強さは Tesla Meter [4]の Probe を Cavity の側面に挿入して測定する。そのため、Ps の崩壊点での磁場の値を直接知ることはできない。これを補正するため、本実験での Probe 位置に Tesla Meter を、Ps の崩壊点付近に NMR の Probe をセットし、この 2 つを同時に測定することで校正を行った。
Ps が崩壊する領域で測定した磁場の強さの空間分布は図 3.2 のようであった。この図を考慮に入れた静磁場の誤差の見積もりは解析の章で行う。

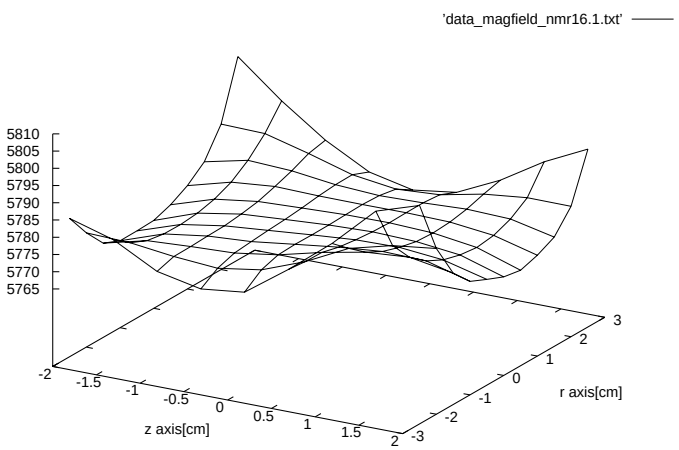


Figure 3.2: 静磁場の空間分布

[1]菊水　PAD35-50L
[2]菊水　PAD35-5L
[3]エコー電子　EFM-3000AX
[4]Group3　DTM-151

また、電磁石に流す電流を変化させながら NMR と Tesla Meter を同時に測定した結果が、図 3.3 である。ここで、NMR の値と Tesla Meter の値はほぼ linear である。この図を用いて磁場の値を補正した。

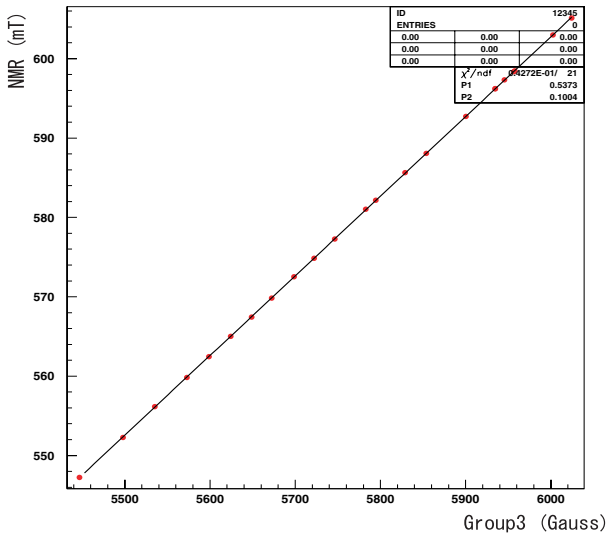


Figure 3.3: Calibration of Gauss Meter

3.3 RF Magnetic Field System

この実験で必要とする振動磁場は約 1280MHz の Microwave で得る。SSG で作られた Microwave は Amp で増幅されて共鳴空洞 (Cavity) へ送られ、Cavity で共鳴を維持する。そのためのセットアップが図 3.4 である。以下、それぞれのモジュールについて説明する。(Feed Back System に用いるモジュールについては後述)

3.3.1 SSG, FD, BPF, Amp, DC,etc

1. Standard Signal Generator(SSG)

   Standart Signal Generator (SSG) [5]は可変の発信周波数を持つ標準波生成機である。SSG は約 10kHz 単位で設定した周波数に応じて、一定の周波数の Microwave を発振する。また、後述するように SSG には周波数を微調しながら発振する Frequency Modulation (FM) 機能があり、測定中は安定した共鳴を維持するため常に FM モードで運転した。

2. Frequency Doubler (FD)

   Frequency Doubler (FD) は入力された Microwave の整数倍の周波数を持った波を発生する装置である。

   この実験で必要な周波数は 1280MHz 付近であるが、我々が用いた SSG は最大で約 1000MHz 付近までしか出せないので、SSG では半分の約 640MHz の Microwave を発振し、Frequency Doubler で周波数 2 倍の成分を作り出す。

3. Band Pass Filter(BPF)

   Band Pass Filter(BPF)[6]は特定の周波数のみを選択的に通す装置である。これを用いて、共鳴に必要な 1280kHz 付近の成分のみを取り出す。

4. Amplifier(Amp)

   必要なパワーの振動磁場を得るため、Amp[7]で増幅して Cavity へ入れる。共鳴の Peak 高さは振動磁場の振幅が大きいほど高くなるので、Amp を連続運転する上での最大出力で用いた。また、この Amp には出力、反射パワーのモニター用に各々-40dB のモニター用端子がついている。この端子からの信号を用いて出力パワーが必要なだけ出ているか、Cavity での共鳴が悪化して反射パワーが大きくなりすぎていないかチェックした。

[5]Anritsu MG645B
[6]'99 年度課題研究 P2 で製作されたもの。Spec は'99 P2 Ps Group Report 参照
[7]NEC HPB-2403

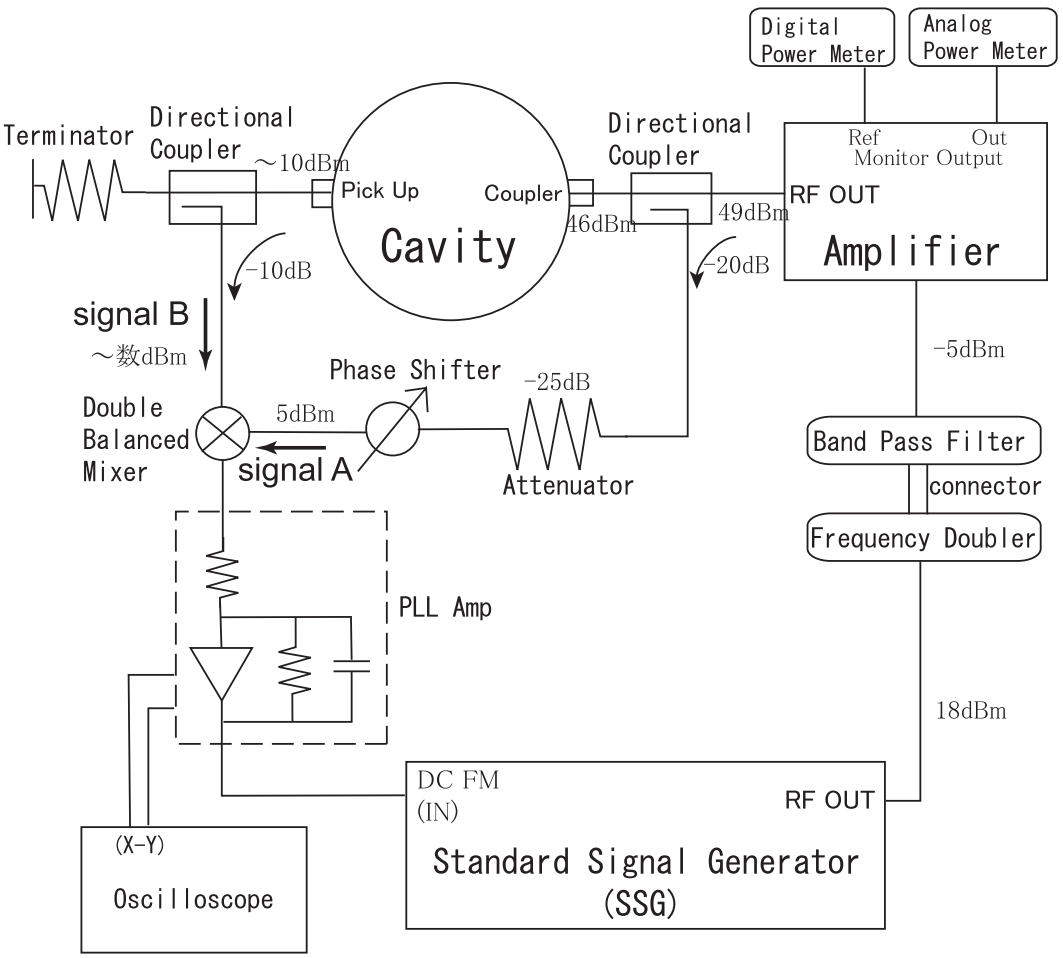


Figure 3.4: Microwave System

5. Directional Coupler Directional Coupler (DC) は方向性結合器で、Microwave を分岐し、一方からの電磁波はある程度分岐へ流し、他方からの電磁波はほとんど分岐へは流さない器具である。実験では 2 種類のものを用いたが、それぞれの性質は図 3.4 の通りである。

6. Power Meter

   Power Meter は Microwave の Power をモニターするために用いる。Digital Power Meter[8] は測定範囲 1 μ W ~ 1 mW で、Cavity からの反射パワーをモニターするために、Amp の反射モニター端子につないで用いた。Analog Power Meter[9] は Amp の出力をモニターするために用いた。

   また、これらの Power Meter はケーブルや各モジュールの特性を調べるのにも用いた。

3.3.2 Cavity

RF 磁場を共鳴させる Cavity[10] は円筒型共振空洞で、TM_{110} モードを用いて共鳴させる。TM_{110} モードは Cavity の軸方向には依存しない電磁場で、式で表すと以下のようになる。

$$\boldsymbol{E} = E_0 J_1(\gamma_{11}\rho)\cos\phi\cos\omega t\hat{z} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{E_0}{\mu\omega}\left(\hat{\rho}\frac{J_1(\gamma_{11}\rho)}{\rho}\sin\phi + \hat{\phi}\gamma_{11}J_1'(\gamma_{11}\rho)\cos\phi\right)\sin\omega t \tag{3.2}$$

$$\gamma_{11} = \frac{x_{11}}{R} \tag{3.3}$$

[8] Hewlett Packard E4418B
[9] Hewlett Packard E8900C
[10] '99 年度課題研究 P2 で製作されたもの。但し、Cooling Pipe は今年度取り付けた。

$$J_1(x_{11}) \quad = \quad 0 \tag{3.4}$$

この Cavity の共振周波数は 1280MHz で、材質はアルミ銅メッキである。geometry については図 3.5 の通り。

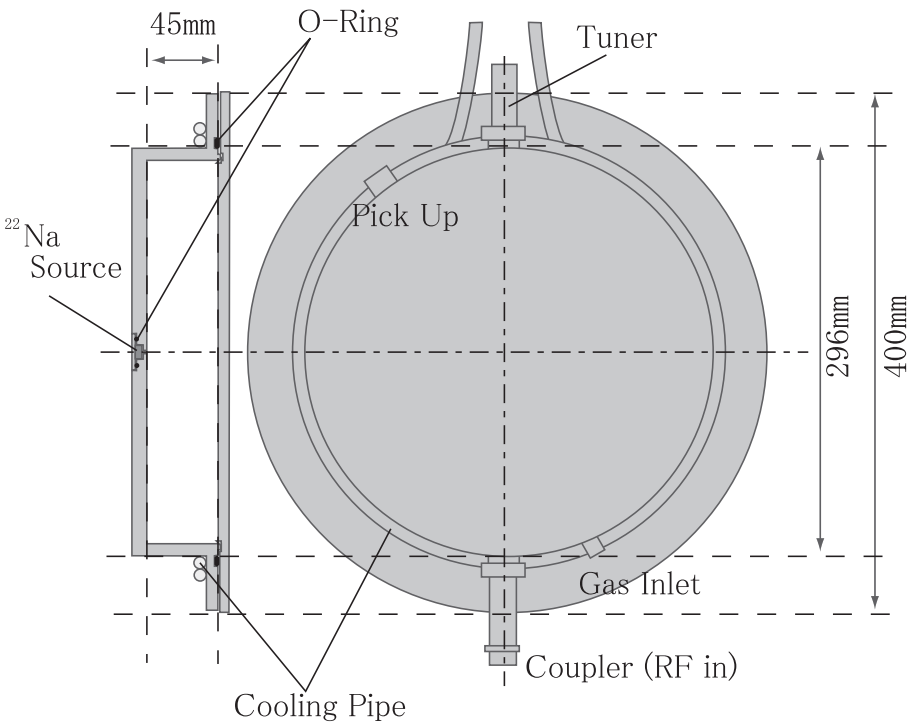


Figure 3.5: Cavity の Geometry

Coupler は Microwave の入力部で、同軸管の先端がループ状になっており、Cavity と電磁場でカップリングしている。
Tuner は Coupler と反対側の側面についていて、出し入れすることで共振周波数を調整できるようになっている。
Pickup は先端がアンテナ状になっており、Cavity 内部の Microwave を少し取り出すことができる。これは、Amp の FM 機能を持ちいたフィードバックシステムに用いる。
Cooling Pipe は水道水を流す事で Cavity の温度を一定に保ち、共鳴周波数を安定に保つ働きをする[11]。
また、RF の機能以外に、Cavity には ^{22}Na ソースのホルダーとしての役割と、Ar (またはその他の種類のガス) の密封容器としての役割を持つが、それぞれ別の項で述べる。

Q-value

共鳴空洞の内表面が完全導体ならば、空洞内に一度入ったマイクロ波はいつまでも振動を続けるはずである。実際には金属表面には抵抗があり、マイクロ波のパワーの損失が起こる。その指標となる値を Q 値と呼ぶ。
共振周波数を ω_0 の共鳴空洞で、ある時間での損失を P[W]、内部に蓄えられているエネルギーを W[J] とする。このとき、損失は蓄えられているエネルギーに比例する。

$$Q = \omega_0 W/P \tag{3.5}$$

損失を原因で分類すると、カップリングによる損失を P_c、内部壁面での損失 P_u とすることができ、対応した Q 値をそれぞれ couplingQ ($Q_c = \omega W/P_c$)、unloadedQ ($Q_c = \omega W/P_c$) とおく。全体での損失を P とすると、$P = P_c + P_u$ より

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_u} \tag{3.6}$$

の関係が得られる。
Q_u は空洞の材質とジオメトリに依存する量であり、理論的な計算が可能である。

$$Q_u = \frac{1}{1 + d/R}\frac{d}{\delta} \tag{3.7}$$

[11] 共鳴周波数が Cavity の熱膨張 or 収縮で変化する。

ここで、d は円筒の高さ、δ は Microwave が金属表面に染み込む深さ (skin depth) で、

$$\delta = (\frac{2}{\mu_c \omega \sigma})^{\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

と与えられる。1280MHz の電磁波に対する銅の skin depth は、1.847×10^{-6}m となる。これを用いて Q_u を計算すると、$Q_u = 1.9 \times 10^4$ を得る。
Cavity の Q 値は、共鳴付近の周波数の Microwave を入れて、その反射を測定する事で求められる。Cavity の共鳴周波数を ω_0、入力する Microwave の周波数を ω としたときの位相込みの (複素数での) 反射率は、

$$r = \frac{\omega_0/Q_c}{(\omega - \omega_0) - i(\omega_0/2Q)} - i \tag{3.9}$$

で与えられる。これより、電力としての反射率は、

$$R = |r|^2 = r^* r = \frac{(\Delta\omega/\omega_0)^2 + [(1/2Q) - (1/Q_c)]^2}{(\Delta\omega/\omega_0)^2 + (1/2Q)^2} \tag{3.10}$$

となる。ここで $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ である。さらに式 (3.6) を用いると、

$$R = \frac{(2\Delta\omega/\omega_0)^2 + (1/Q_u - 1/Q_c)^2}{(2\Delta\omega/\omega_0)^2 + (1/Q_u + 1/Q_c)^2} \tag{3.11}$$

となる。特に、$\Delta\omega = 0$ のときは、

$$R_0 = \left\{ \frac{(1/Q_u) - (1/Q_c)}{(1/Q_u) + (1/Q_c)} \right\}^2 \tag{3.12}$$

となる。
$Q_u = Q_c$ のとき、式 3.12 は 0 となり、反射が無くなる (臨界結合)。また、$2\Delta\omega/\omega_0 = 1/Q$ をみたす ω を入力した時、反射率 R は完全反射 $R = 1$ と共鳴周波数 $\omega = \omega_0$ での反射率 R_0 の和の半分 $(1 + R_0)/2$ となる。これを用いて、周波数をスキャンしながら反射率を測定し、反射率が $(1 + R_0)/2$ となる周波数 $\Delta\omega$ を求めると Q 値を得ることができる。(図 3.6)
我々の測定では $2\Delta\omega \sim 0.45$MHz であり、

$$Q = \frac{1280}{0.45} \sim 2850 \tag{3.13}$$

程度であった。

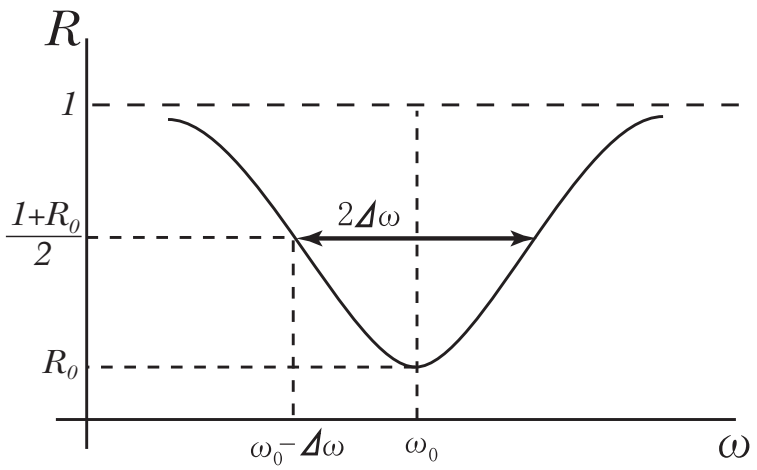


Figure 3.6: Q-value

3.3.3 Feedback System

今回我々が用いた SSG には、直流電圧入力に対して出力周波数を変化させる Frequency Modulation (FM) 機能がある。これと 2 つの入力信号の積を出力するモジュールである Double Balanced Mixer(DBM) を用いて、Cavity の共鳴周波数の時間変化に応じて出力する周波数を自動的に調整する Feedback System を構築し、安定した共鳴の維持につとめた。ここではその手法について説明する。回路は図 3.4 の通り。
SSG の出力周波数を Cavity の共鳴周波数になるように (手動で) 調整し、さらに Cavity への入力を分流させた信号 (以下 signal A) と pick up で取り出した信号 (以下 signal B) との位相差を $\frac{\pi}{2}$ となるように phase shifter[12] で調整したとする。このとき、signal A を $\cos\omega t$ とすると、signal B は $\sin\omega t$ と表される。
この状態で Cavity の共鳴周波数と SSG の出力周波数がずれると位相差 ϕ が生じ、signal A を $\cos\omega t$ とすると、signal B は $\sin(\omega t+\phi)$ となる。
DBM は 2 つの信号の積を出力するモジュールなので、DBM からの出力は

$$\sin(\omega t+\phi)\cos\omega t=\frac{1}{2}\{sin(2\omega t+\phi)+\sin\phi\} \tag{3.14}$$

となる。この出力を low pass filter にかけると $\sin(2\omega t)$ の項が落ちて、

$$\sin(\omega t+\phi)\cos\omega t=\sin\phi\sim\frac{\phi}{2} \tag{3.15}$$

という signal が得られる。(PLL Amp はこの low pass filter と、これを増幅する Amp 、さらに、phase shifter を用いて位相を調整するのに便利な鋸波を出す機能が組み込まれている。)
この位相差 ϕ に比例した signal を負帰還になるように極性を合わせて SSG に戻してやる事で、自動的に共鳴を維持するように周波数が調整される。

3.4 Gas Handling System

気体操作系は図 3.7 のようになっている。予定では Ar の他に空気や Ar(95%)+NO(5%)[13] といった気体でも測定を行う事になっていたが、時間的な都合で実質 Ar 1 種類のみの測定となってしまった。
Ar1atm を Cavity に充填する手順は、

1. 全てのバルブを閉め、真空ポンプで真空に引き始める。
2. バルブをポンプから順に開けていき、Cavity 以外の部分を真空にする。
3. ポンプと Cavity をつなぐラインを残してバルブを閉じ、Cavity を真空に引く。(およそ 10 分間) [14]
4. Ar ボンベの出口で約 1.2atm になるように調整し、ボンベから Cavity まで順にバルブを開けてゆっくりと流す。
5. しばらく経ったら Ar ボンベのバルブを閉じる。
6. リークバルブをゆっくりと開け、音がしなくなってから一呼吸置いてリークバルブから Cavity へいたるバルブを順に閉める。

という様にした。また、前回の run が 1 日以上前であったり、Cavity を開けたりして Cavity 内が Ar でないと思われるときは、上記操作を 3 回繰り返すことで不純物を減らすよう努めた。
しかし、この Cavity の気密性は高くなく、1.2atm の Ar を充填しても、数十分で 1atm になってしまうことが確認されている。このため、1 回の測定を短時間に終えることができるよう、注意を払った。さらに、各磁場スキャン毎に上記の Ar 詰め替え操作を行っている。

3.5 ^{22}Na e^+ Source

この実験では線源から出た e^+ が、Cavity 内部の気体電子とカップルしてできる Ps の 2γ 崩壊を捕らえる。この e^+ 線源として ^{22}Na を用いた。^{22}Na の崩壊系列は図 3.8 の通りである。

[12] 可変長同軸管。長さを変えることで位相を微調する。
[13] スピン交換衝突によって ortho-Ps → para-Ps となり、全ての Ps が 2γ 崩壊する [6]
[14] この間に Cavity の共鳴が変化、時には共鳴自体が失われるので Microwave System のモニターをする必要がある。可能な限り共鳴を維持するのは、温度変化による共鳴周波数の変化を最小にとどめるため。

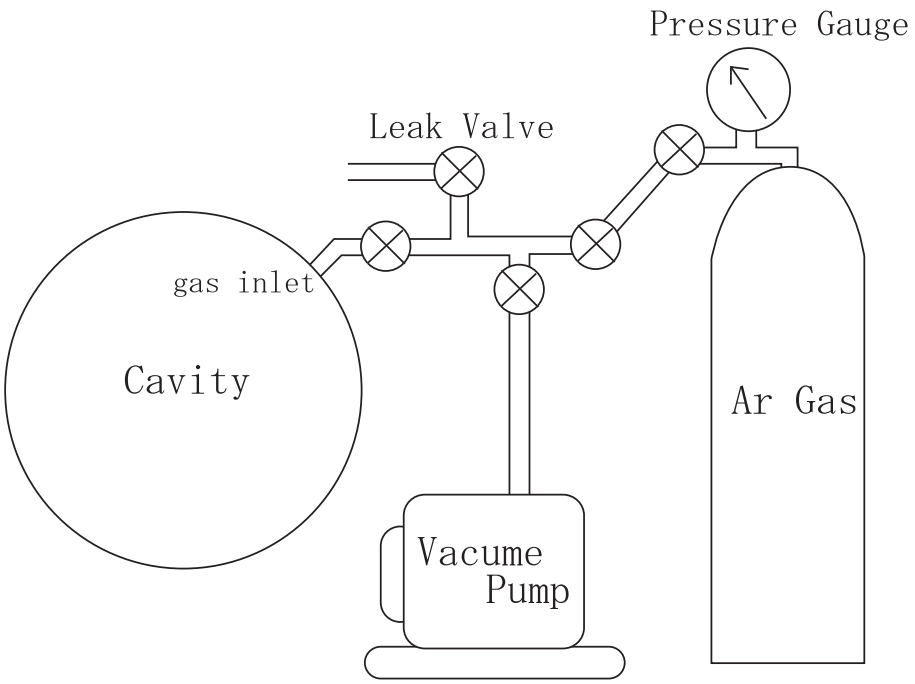


Figure 3.7: Gas Handling System

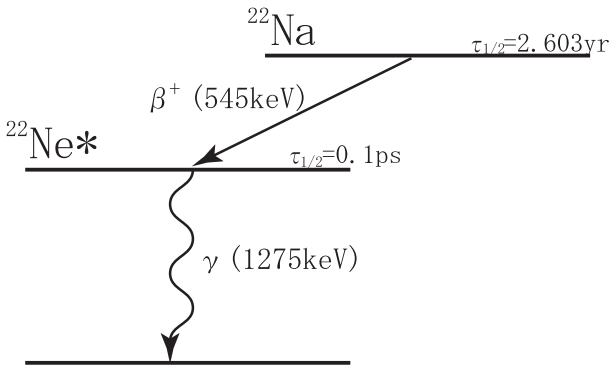


Figure 3.8: Decay Chain of ^{22}Na

3.6 Ditector and DAQ System

3.6.1 NaI Scintilator

Ps の 2γ 崩壊を detect するγ 線検出器には NaI シンチレータを用いた。NaI はγ 線に対してエネルギー分解能が良いのが特徴で、Ps が 2γ 崩壊した場合のエネルギー 511keV のγ 線を選択的にとることで、3γ 由来の低エネルギーγ 線によるバックグラウンドを防ぐ事ができる。
我々が捕らえたいのは Ar 中の electron につかまって生成された Ps の 2γ 崩壊である。Ps は生成時に殆ど boost されていないため、その 2γ 崩壊は運動量保存則から back-to-back にγ 線を出す。これを捕らえるため、Cavity の中心を中心点とするように 2 つの NaI を対称に配置し、これらの coincidence を取る事で 2γ の signeture とした。使用可能な NaI は 8 本であったので、4 組の NaI pair で測定した。(図 3.1) また、ソースや Cavity の壁面で e^+ が対消滅したときにできるγ は background になってしまうので、鉛ブロック[15]を用いてソースや Cavity の壁面が NaI から直接見えないようにしてある。
また、8 本の PMT に掛ける電圧は、この Setup でエネルギースペクトルを取り、2γ の peak が大体同じくらいの ADCcount になるよう調整した。

[15] 5cm×10cm×20cm。2 つの鉛ブロックの間隔は 30mm。図 3.1 参照

3.6.2 DAQ System

今回の実験で用いた DAQ System は図 3.9 のとおりである。

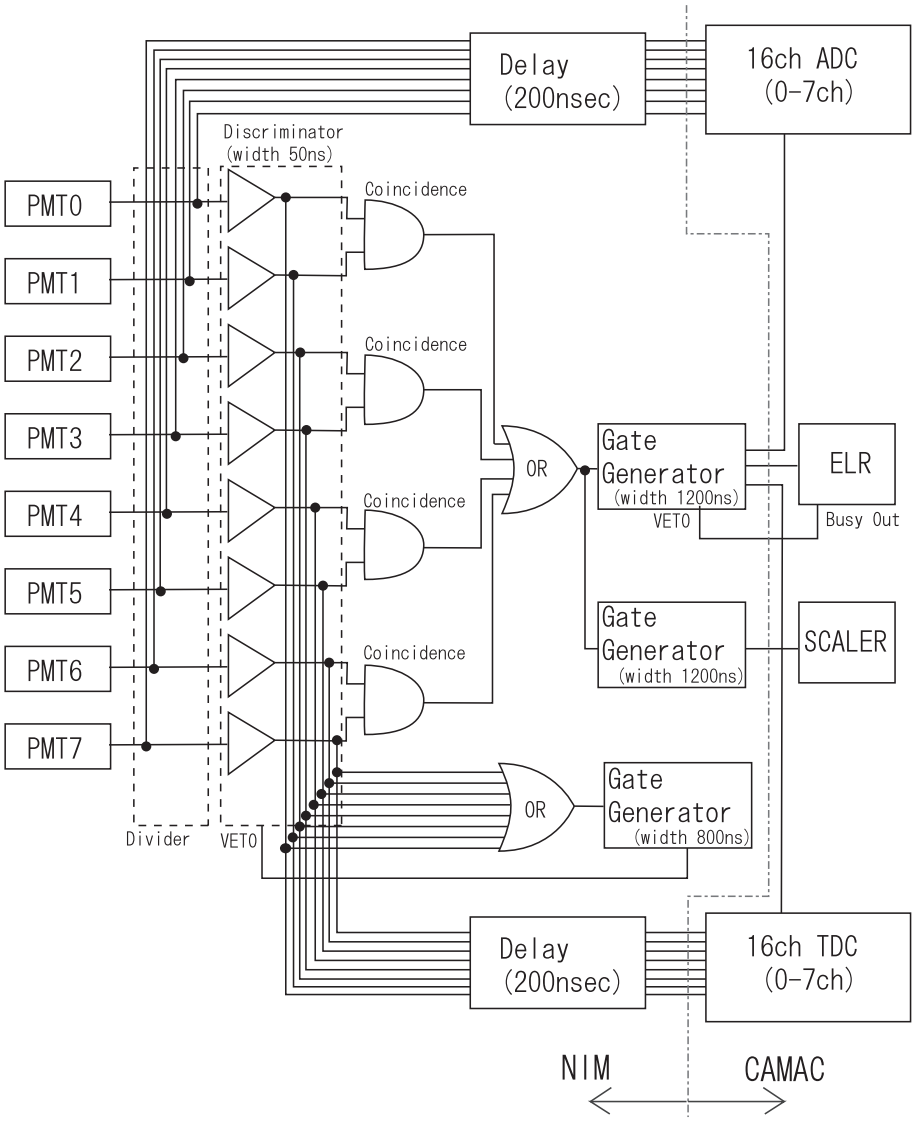


Figure 3.9: DAQ System

回路は、対になる 2 本の PMT が discriminator で定義される一定の光量以上 (約 300MeV 相当) で同時に光る事を条件に trigger される。trigger されると gate generator が幅 1200nsec の gate を、それぞれ ADC、TDC、ELR に送る。
ADC は 12bit で PMT のアナログ信号をデジタル情報に変換する。このエネルギー情報は Ps の崩壊による 2γ を選択し、精度を上げるために用いた。
TDC も同じく 12bit で時間情報を与える。当初、off line での解析で同時性を coincidence のタイミングより厳密にとる予定をしていたため TDC を取ったが、結局解析には用いなかった。
ELR は gate が開いている間に次の trigger がかかって gate が広がってしまうのを防ぐ目的で用いている。
また、全体の OR で 800nsec の veto をかけているが、これは PMT の信号の形がギザギザなため、discriminator で本来 1 回とカウントされるべきものが 2 ~ 3 回にカウントされるのを防止する目的である。
今回の実験では ^{22}Na のソースパワーが強く、また NaI を 8 本使用したため全ての event を DAQ で拾う事はできない。これを較正するため、Scaler で total のイベント数をカウントし、

$$(\text{total の } 2\gamma \text{ event の数}) = \frac{(\text{解析で } 2\gamma \text{ とされた event 数})}{(\text{DAQ にかかった event 数})} \times (\text{Scaler のカウント数}) \tag{3.16}$$

という式で total の 2γ event 数とした。

Chapter 4

Analysis

4.1 Fitting Function

前章の結果を解析する。ポジトロニウムの 2γ 崩壊確率 $P_{2\gamma}$ でフィットすると図 4.1 のように理論からの傾きとだいぶ異なる。この原因として、

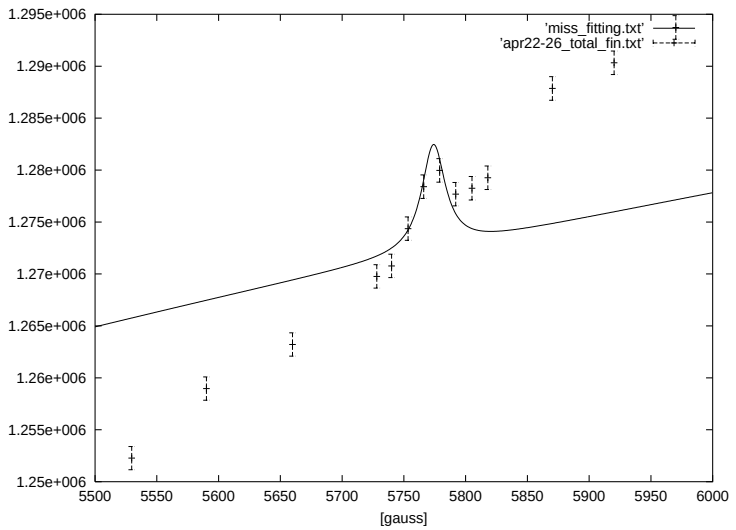


Figure 4.1: $P_{2\gamma}$ で fit した結果

1. ポジトロニウムの生成率が静磁場に依存する。
2. 測定効率が静磁場に依存する。

が考えられる。後者はフォトチューブが静磁場の影響を受ける可能性があると考えられるが、フォトチューブの設置位置での静磁場の大きさは地磁気程度以下であり、有効に効くとは考えにくい。一方前者は静磁場の大きさにより、線源から出てくる陽電子の軌跡が変化するので、観測されるカウント数に有効に効くと考えられる。4.3 節で詳しく述べるが、シミュレーションによる生成率の変化と傾きのずれが驚くべき一致を見せるので、前者によるものとして解析する。生成率の変化は 5500gauss ~ 6000gauss でほぼ liner なので fitting 関数として次のものを用意する。

$$f(B_0; R, grad, offset, B_1, \omega_0) = R(1 + B_0 grad)P_{2\gamma}(B_0; B_1, \omega_0) + offset \tag{4.1}$$

ここで、B_0 は静磁場の大きさで、フリーパラメーターは次の 5 つである。

1. B_1: 振動磁場の振幅
2. ω_0: ポジトロニウムの hyperfine structure
3. $grad$: $1 + B_0 grad$ がポジトロニウムの生成率の変化を表す。

4. R: 縦軸方向の倍率 (カウント数に依存)

5. offset: 図 4.7 で分かるように真空でもオフセットがのる。これをフリーパラメーターとするのはアルゴン中でのオフセットを今実験で観測できなかったからである。

この関数で fit すると、図 4.2 のようになる。fit はルベンバーグによる方法で χ^2 を最小とするパラメータを求めた。こ

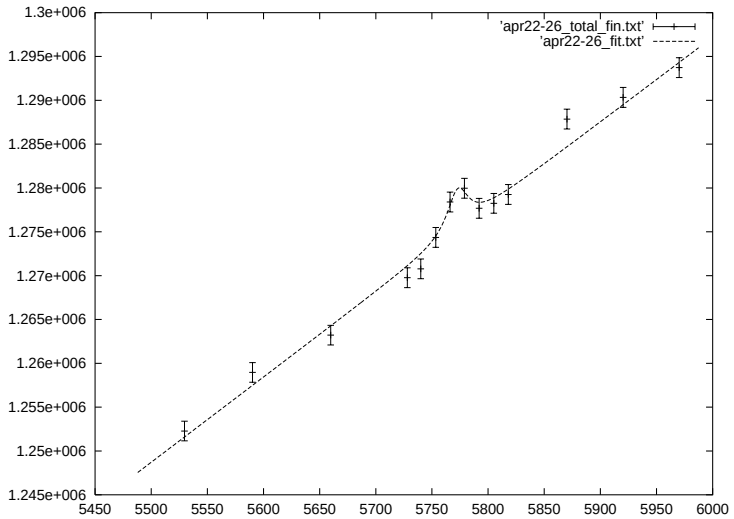


Figure 4.2: fit した結果、横軸は静磁場の値、縦軸はカウント数

れについては ChapterC で詳しく述べる。

4.2 Error Estimation

誤差として考えなければならないのは、

1. 縦軸方向の誤差

2. 横軸方向の誤差

がある。縦軸方向の誤差として考えられるのは、統計誤差、Microwave の power の誤差、データ収集系の誤差である。Microwave の power による誤差は統計誤差に比べて十分小さい。データ収集系の誤差は時間帯依存が激しいく、主にＰ２部屋の電力供給に依存すると考えられる。何ヶ月もこの誤差に苦しめられたが、電力供給が落ち着いていると考えられる時間帯においてこの誤差は経験的に十分小さいことが分かっていて、解析にかけた 13 回のランはすべてこの条件を満たす。すなわち、13 回のランすべての縦軸方向の揺らぎは統計誤差程度である。横軸方向の誤差は静磁場の誤差であるが、静磁場の一様性、一定性、測定誤差を考える必要がある。

4.2.1 Error Transmission

前述により縦軸方向の誤差は統計誤差によるものとして考える。縦軸方向の誤差の伝播を式で解析するには、$P_{2\gamma}$ をそれぞれのパラメータで微分する必要があるが、これはあまりに計算が複雑すぎて現実的でないので[1]、モンテカルロ法を用いる。すなわち、14 個の観測点を図 4.2 の fitting 曲線上を中心に統計誤差程度でばらまいて仮想の模擬データを作る。この模擬データで再び fit してＰＨＳを求める。これを何回も繰り返し、ＰＨＳの分布を求めれば、統計誤差のバラツキによるＰＨＳのバラツキが分かる。図 4.3 は 10000 個の模擬データによりＰＨＳの分布を histogram にしたものである。この分布の偏差 1.684×10^9Hz が統計誤差の伝播によるＰＨＳの誤差である。

4.2.2 Error of Static Magnetic Field

静磁場の誤差として

1. 磁場測定装置 Group3 のモニタ表示と実際の磁場との差

[1]賢明な読者は気づくであろうが, Levenberg 法の発動には Parameter についての偏微分が必要不可欠である. 現実的でなくても微分したのだ.

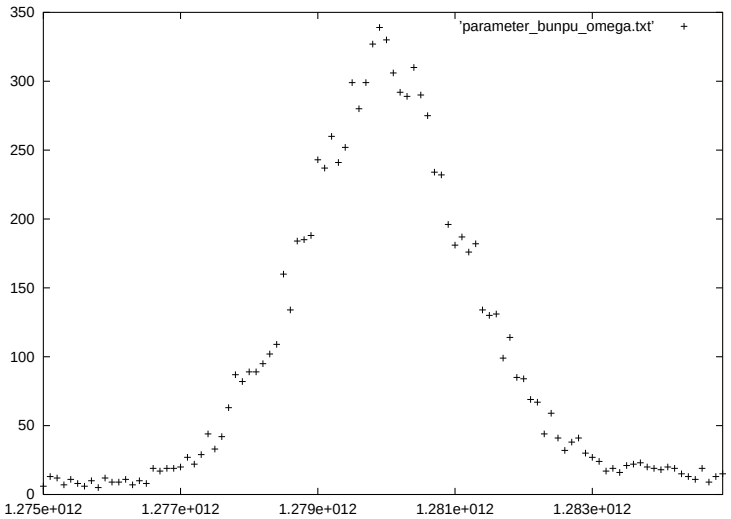


Figure 4.3: Histogram:統計誤差によるＰＨＳのばらつき

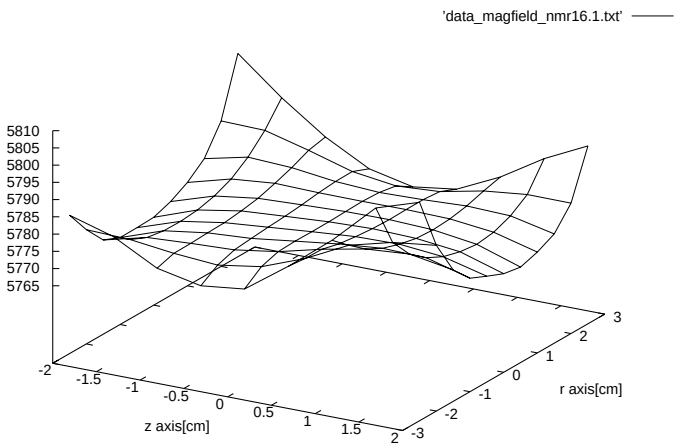


Figure 4.4: 磁場の分布

2. 磁場の空間的不均一による誤差

3. 磁場の時間的不安定による誤差

1 についてはＮＭＲを用いて校正する。このときコイルの中心点をＮＭＲで測定した値を真値とする。なお全てのグラフにおいて磁場の値はＮＭＲで測定したコイルの中心点の磁場の値にやきなおして表示する。ＮＭＲ及び Group3 の測定誤差は 0.01gauss で、上の２，３による誤差に比べて十分小さい。
2 については、磁場の空間分布図により評価する。図 4.4 はＮＭＲを用いて測定した磁場分布で、この分布から Group3 の読む値に対して、どの磁場でどれだけのポジトロニウムができるのかがシミュレーションにより求まる。図 4.5 は中心の磁場が 5775gauss のとき、ポジトロニウムができる磁場の値でのポジトロニウム生成数の histogram である。この図にポジトロニウム 2γ 崩壊の理論曲線を重ね合わせると、図 4.6 のように理論曲線とピークの形がわずかにずれる。このピークの位置のずれ分 1.0gauss を磁場の空間的不均一による誤差とする。
3 については、10 分測定の間の磁場の変動と、13 ランを足し合わせる時の同一磁場における磁場設定のずれがある。磁場設定は、小さい電源をコイルに並列につなげ細かく微調ができるようになり、この誤差も小さくできた。13 ランでの最大のずれはおよそ 0.8gauss 程度で、これを時間不安定による誤差とする。
1 ~ 3 より、静磁場の誤差は 1.3gauss で、式よりＰＨＳの誤差に換算すると、5.8×10^8Hz となる。これは統計誤差のおよ $\frac{1}{3}$ である。

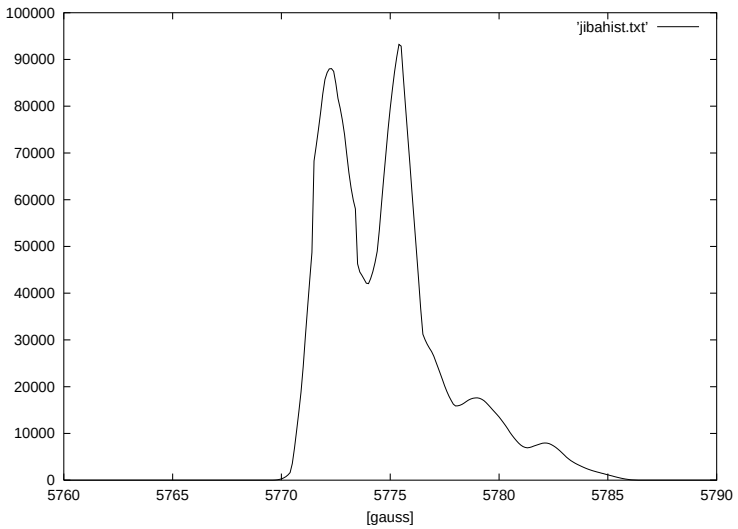


Figure 4.5: 中心磁場が 5775gauss のとき、ポジトロニウム生成数の histogram

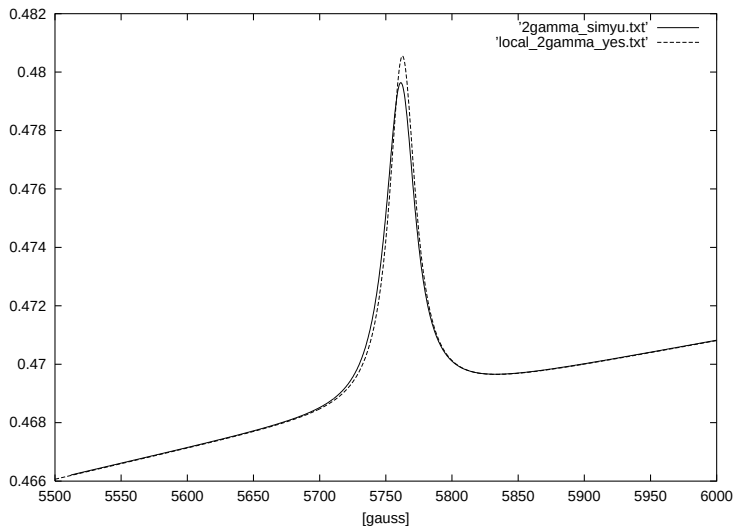


Figure 4.6: 理論曲線 (点線) と、シミュレーションによる磁場の histogram を重ねた理論曲線 (実線)

4.3 Ps Creation Rate Alternation

以上より誤差の評価ができたが、結果を出す前に本章の冒頭で仮定した、”5500gauss ~ 6000gauss でポジトロニウムの生成率の変化がほぼ liner である” ことを裏づけになければこの解析は意味をなさない。図 4.7 は 0gauss ~ 6400gsuss の真空中及びアルゴン中における 5 分測定の結果である。5500gauss ~ 6000gauss のピークの位置からＰＨＳの値がおよそ 1.28×10^{12}Hz と決まり、その値での (ポジトロニウムの生成率の磁場依存を考慮しない) 理論曲線がかけるが、その曲線は図 4.1 から分かるように測定値と大きくずれる。理論曲線と測定による変化が異なるのはポジトロニウムの生成率の磁場依存が原因として、生成率の変化を計算する。すなわち

$$(\text{ポジトロニウムの生成率}) = (\text{測定したカウント数})/(\text{理論曲線の値})$$

と計算する。一方ポジトロニウムの生成率をジオメトリーによるものとしてシミュレーションすると、生成率の変化を estimate できる。このシミュレーションについては D 章で詳しく述べる。測定値から計算した生成率の変化とシミュレーションによる生成率の変化を図 4.8 で与える。実線で結んだ点がシミュレーションによる生成率の変化で、がたついているのは実際の測定と同じくらいの統計をシミュレーションでためたからである。縦軸は相対的確率を与えるもので、実験値からの生成率は 0gauss で 1 に、シミュレーションからの生成率は 2000gauss で 1.5 となるように規格化してある。この図で 2 つの生成率変化曲線がほぼ一致していて、生成率の磁場依存性はジオメトリーによるものであることが説明できた。特に 5500gauss ~ 6000gauss でほぼ liner であり、その傾きもシミュレーションに一致している。

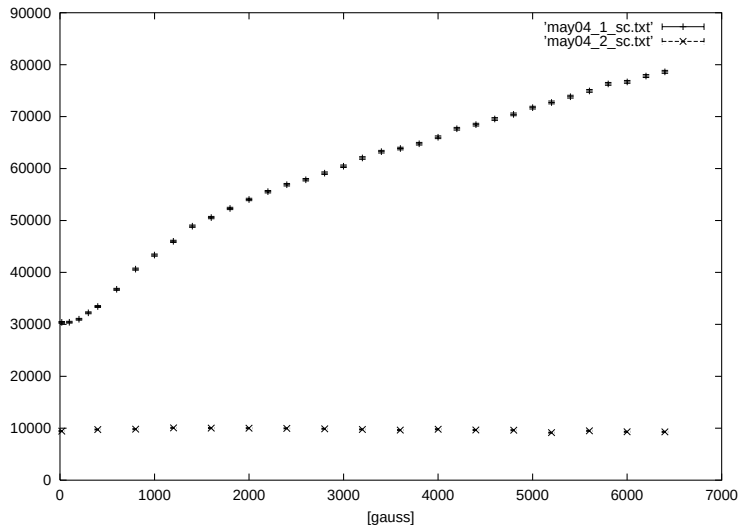


Figure 4.7: 0gauss ~ 6400gauss のアルゴン中 (上側の点)、及び真空中 (下側の点) における測定結果

4.4 Results

図 4.2 を fit した結果は次の通り。

$$\begin{aligned}
\chi^2/\text{ndf} &= 10.71/9 \\
\omega_0 &= 1.28005 \times 10^{12}\text{Hz} \\
grad &= 9.5423 \times 10^2 \\
offset &= 8.1448 \times 10^2 \\
R &= 1.9295 \times 10^3 \\
B_1 &= 2.3991 \times 10^{-4}
\end{aligned}$$

4.2 節より、ω_0 の誤差は 1.78×10^9 であるから、我々が得た Positronium の Hyperfine Structure は

$$\omega_0 = (1.28005 \pm 0.00178) \times 10^{12}\text{Hz}$$

であり、理論値 1.27817×10^{12}Hz とのずれは 1.1σ である。

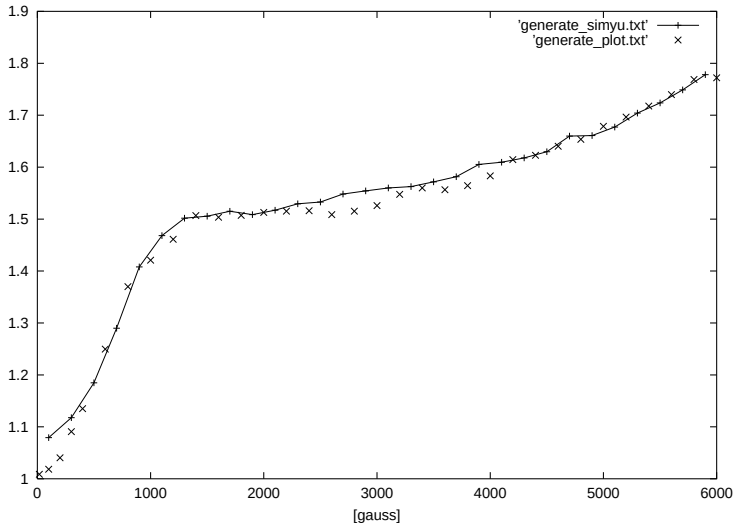


Figure 4.8: 生成率の変化、ラインで結んだ点はシミュレーションによるもの

Chapter 5

Discussion

5.1 Achievement of Vacuum

図 4.7 において、真空での測定では 0gauss と 6400gauss とでカウント数が統計誤差程度しか変化していない。このことを用いて真空の達成度を評価する。大雑把な評価 (order estimate) なので、次のことを仮定する。

1. offset は気圧、静磁場に依存しない
2. ベータ線の止まる個数は気圧に比例する
3. ポジトロニウムの 2γ 崩壊確率は気圧に依存しない

offset を x_0、0gauss・1atm でのポジトロニウム 2γ のカウント数を x_1、真空の気圧を p[atm]、0gauss でのポジトロニウム崩壊率を 1 としたときの 6400gauss でのポジトロニウム崩壊率を q、真空での統計誤差を δ とすると、図 4.7 より、

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 &= 30300 && (\text{1atm,0gauss でのカウント数}) \\ x_0 + qx_1 &= 78600 && (\text{1atm,6400gauss でのカウント数}) \\ x_0 + px_1 &= 9400 \pm \delta && (\text{patm,0gauss でのカウント数}) \\ x_0 + pqx_1 &= 9400 \pm \delta && (\text{patm,6400gauss でのカウント数}) \end{aligned}$$

辺々割って、

$$\begin{aligned} (q-1)x_1 &= 48300 \\ (q-1)px_1 &\lesssim 2\delta \end{aligned}$$

従って $\delta = 96$ より、

$$p \lesssim 4.0 \times 10^{-3}(\text{atm})$$

となる。

5.2 Improvement

Geometry に対する考察が進んだ事で、実験としては相当尽くされたものになったが、以下のような改善の余地が考えられる。

- NO
  今回の実験では、Ps の生成に Ar 1atm を用いたが、NO (一酸化窒素) を 5%混合する事で ortho-Ps → para-Ps のスピン交換衝突を起こす事ができ、Ps を結果的に全て 2γ decay させる事ができる。これを用いると解析の際のフリーパラメータである offset を取り除くことができる。前年度で入手してあった $1l$ の NO は今も健在であるが、gas system 構築の暇が無かったため今年度も結局使用せずに終わってしまった。但し、NO は人体に有毒であるため取り扱いには注意を要する。[1]

[1] 化学教室では割と気軽に扱っているようだが。

- Pressure Gauge
  Ar の気圧を正しく知る事は、Ps の生成率を正しく見積もるために重要である。しかし、結局 pressure gauge を入手できなかったため、1atm の到達が大気圧まかせになってしまった。pressure gauge で Ar の気圧をモニタする事で、Ps の生成率を較正できるだけでなく、気圧と hyperfine structure との関係を調べる実験へ発展させる事ができる。

- Cavity (Gas System として)
  今回実験で使用した Cavity は気密性に問題があり、1.2atm の Ar が十数分で 1atm 程度まで抜けてしまっていた。このため、長時間測定は空気が混入する恐れがあるため不可能。また、気圧を変化させての測定もできなかった。これを改善するには気密性をあげるとともに、gas outlet を設けて常に気体をフローさせる system にするのが望ましい。

- Cavity (RF System として)
  Cavity 内壁面はいくらか酸化が進んでおり[2]、伝導度が落ちていたと考えられる。このことは振動磁場の強さの低下につながり、2γ 生成率の peak を小さくすることになる。メッキなどして伝導度を高める事が望ましい。

- 空気
  前年度から疑問のまま残してしまったテーマに" 空気では peak が見えない " というものがある。我々は空気での測定も行ったが、時間的な制約で統計的に足りる量までデータをためる事ができず、何も言うことができなかった。

5.3 Beyond the World Record

M.Deutsch[3]から始まった, 磁場中の消滅 γ 線の研究は徐々に精度を上げ, その度に QED の精確さの強力な裏づけとなってきた. 現在の World Record は 1.2772×10^{12}Hz であり, より高次の Diagram の計算によると有効数字 4 桁まで予言できているようだ. さて我々の測定値は $\omega_0 = (1.28005 \pm 0.00178) \times 10^{12}$Hz なので, World Record と比較すると

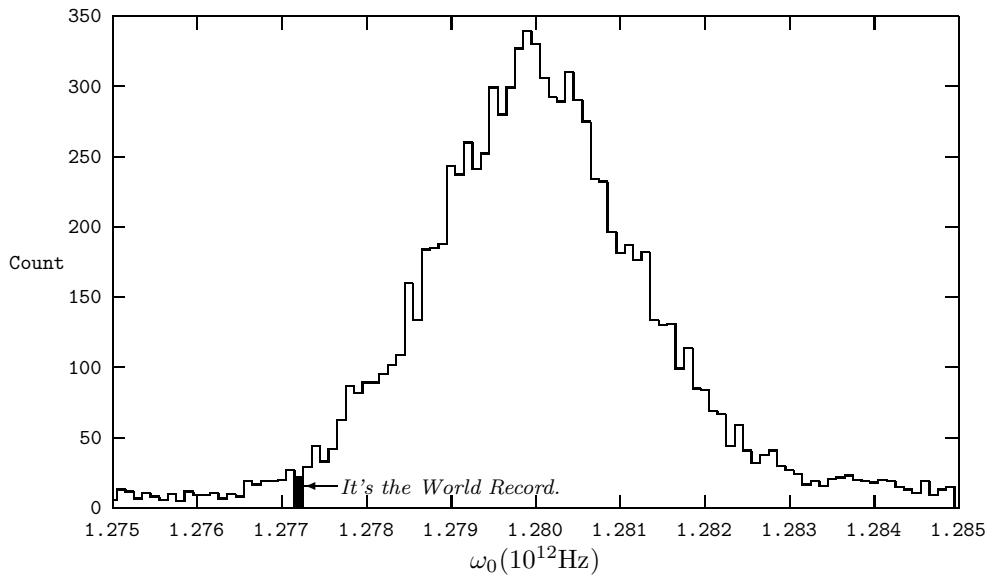


Figure 5.1: Position of the World Record

となる. World Record を目指すには後どれほどの精度が必要かを端的に要約している Figure である. 1bin でも射程に入ってよかったというべきか.

[2]理由は詳述しない。
[3]参照文献 [6]

Acknowledgement

季節はすでに晩夏.
2001 年 5 月 11 日の卒論発表会から, 早 4ヶ月.
永い永い時間を経て, 我々の研究がついにカタチを成し, 衆目の一致する所へ還るに至りました.
それをまずは祝う次第であります.
卒業研究の完成までの道程には, 多くの方々の支援がありました.

多忙ながら, 実験の要所では必ず強力な指導力を発揮していただいた笹尾先生.
この実験の理論背景を理解する上で必須となる場の理論, 特に QED を提供して頂いた畑先生.
直接我々の教育に当たり, 具体的な Plan や問題解決法に影響を強く与えてくださった野村先生.
今年度も実験機材を貸してくださり, MicroWave 関係でのトラブルの際には必ず相談にのって頂いた岩下先生.
そしてこの Theme の実験経験者としてリアルな意見を提供してくださった加藤さんと隅田さん.

この誌面にて感謝の言葉とします.
そしてこれほどの遅延をお詫びします.

Appendix A

QED with B and α

当初 Coulomb Gauge 上の QED を用いて 2γ Decay Width の導出を試みた. しかし非常に見通しの悪い計算となり, 事実断念を余儀なくされた. ここでは補助 Scalar 場 B と Gauge Parameter α を導入した QED を簡単に紹介し, 以後の計算に役立てる.

A.1 Field equations

自由な電磁場に対する Lagrangian が古典論からの類推で

$$\mathscr{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{A.1}$$

で与えられると考えると困難に直面する. A_0 の正準共役量 π_0 が存在しないからである. そこで $\mathscr{L}_{EM}$ として

$$\mathscr{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + B\partial^\mu A_\mu + \frac{1}{2}\alpha B^2 \tag{A.2}$$

を採用する. B は補助 Scalar 場であり, この時点では π_0 を存在させるためだけに導入されたものと考えて差し支えない. α は Gauge Parameter と呼ばれる実数で, $\alpha = 1$ のときを Feynman Gauge, $\alpha = 1$ のときを Landau Gauge と呼ぶ. さて Lagrangian(A.2) に変分原理

$$\delta \int d^4x \mathscr{L}_{EM} = 0 \tag{A.3}$$

を適用して得られる場の方程式は

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} - \partial_\mu B = 0 \tag{A.4}$$
$$\partial^\mu A_\mu + \alpha B = 0 \tag{A.5}$$

となる. (A.4) に ∂^μ を掛けると

$$\Box B = 0 \tag{A.6}$$

となることより[1], B は d'Alembert 方程式に従い質量 0 の場である事がわかる. また (A.5) を (A.4) に代入すると

$$\Box A_\mu - (1-\alpha)\partial_\mu B = 0 \tag{A.7}$$

となる. (A.5) から判るように, $\alpha = 0$ の場合に限り Lorentz 条件 $\partial^\mu A_\mu = 0$ が満たされ, 他方 (A.7) から判るように, $\alpha = 1$ の場合に限り $\Box A_\mu = 0$ が満足される. これが Landau Gauge と Feynman Gauge が特別な地位を占める理由である. さらに (A.4), (A.6), (A.7) から

[1] Lorenzian $\Box \equiv \partial^\mu\partial_\mu$

$$\Box^2 A_\mu = 0 \tag{A.8}$$

は α に無関係に成立している. ここで同値関係

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial^\nu F_{\nu\mu} - \partial_\mu B = 0 \\ \partial^\mu A_\mu + \alpha B = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial^\mu A_\mu + \alpha B = 0 \\ \Box B = 0 \\ \Box A_\mu - (1-\alpha)\partial_\mu B = 0 \\ \Box^2 A_\mu = 0 \end{array} \right. \tag{A.9}$$

に注意すると, (A.5), (A.6), (A.7), (A.8) が場の方程式であると帰結される.

A.2 Canonical Quantization

A.2.1 Same Time Commutation Relations

A_μ を正準変数とすると正準共役量 π_μ は

$$\pi_0 \equiv \partial \mathscr{L}_{EM}/\partial(\partial_0 A_0) = B \tag{A.10}$$
$$\pi_k \equiv \partial \mathscr{L}_{EM}/\partial(\partial_0 A_k) = F_{0k} \tag{A.11}$$

で定義される. よって確かに π_0 が変数として意味を持ち, 故に同時刻正準交換関係

$$[A_\mu(x), \pi_\nu(y)]_{et} = i\delta_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{A.12}$$
$$\textbf{The Others} = 0 \tag{A.13}$$

を設定しても困難は起こらない. (A.12), (A.13) を A_μ, $\partial_0 A_k$, B を用いて書き直すと

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)]_{et} = 0 \tag{A.14}$$
$$[A_\mu(x), \partial_0 A_l(y)]_{et} = i\delta_{\mu l}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{A.15}$$
$$[\partial_0 A_k(x), \partial_0 A_l(y)]_{et} = 0 \tag{A.16}$$
$$[A_\mu(x), B(y)]_{et} = i\delta_{\mu 0}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{A.17}$$
$$[\partial_0 A_k(x), B(y)]_{et} = i\partial_k^x\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{A.18}$$
$$[B(x), B(y)]_{et} = 0 \tag{A.19}$$

となる. さらに (A.4), (A.5) から $\partial_0 A_0$, $\partial_0 B$ は

$$\partial_0 A_0 = \partial_k A_k - \alpha B \tag{A.20}$$
$$\partial_0 B = \partial_k \partial_0 A_k - \partial_k \partial_k A_0 \tag{A.21}$$

と評価され, これらを用いると

$$[A_\mu(xx), \partial_0 A_0(y)]_{et} = -i\alpha\delta_{\mu 0}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{A.22}$$
$$[\partial_0 A_0(x), \partial_0 A_l(y)]_{et} = i(1-\alpha)\partial_l^x\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{A.23}$$
$$[\partial_0 A_0(x), B(y)]_{et} = 0 \tag{A.24}$$
$$[A_\mu(x), \partial_0 B(y)]_{et} = -i\delta_{\mu k}\partial_k^x\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{A.25}$$
$$[B(x), \partial_0 B(y)]_{et} = 0 \tag{A.26}$$

となる.

A.2.2 Four Dimensional Commutation Relations

さて, これより以上の同時刻交換関係から異時刻交換関係, すなわち 4 次元交換関係を導出する手続きに入る. そのための道具として D 関数と E 関数を定義する.

$$D(x) \equiv -\imath(2\pi)^{-3}\int d^4p\epsilon(p_0)\delta(p^2)e^{-ipx} \tag{A.27}$$

$$E(x) \equiv -\imath(2\pi)^{-3}\int d^4p\epsilon(p_0)\delta'(p^2)e^{-ipx} \tag{A.28}$$

これらは $x^2 < 0$ で 0 になるような Lorentz 不変な超関数であり,

$$\Box D(x) = 0 \tag{A.29}$$

$$D(0,\boldsymbol{x}) = 0 \tag{A.30}$$

$$\partial_0 D(0,\boldsymbol{x}) = -\delta^3(\boldsymbol{x}) \tag{A.31}$$

$$\Box E(x) = D(x) \tag{A.32}$$

$$E(0,\boldsymbol{x}) = \partial_0 E(0,\boldsymbol{x}) = (\partial_0)^2 E(0,\boldsymbol{x}) = 0 \tag{A.33}$$

$$(\partial_0)^3 E(0,\boldsymbol{x}) = -\delta^3(\boldsymbol{x}) \tag{A.34}$$

という性質を持つ. (A.6) は積分形で

$$B(x) = \int d^3\boldsymbol{z} D(x-z)\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z} B(z) \tag{A.35}$$

と書き改めることができる[2]. なぜならば, (A.35) の右辺を z_0 で微分すると

$$\begin{aligned}
&\partial_0^z \int d^3\boldsymbol{z} D(x-z)\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z} B(z) \\
&\quad = \int d^3\boldsymbol{z}[(\partial_0^z)^2 D(x-z)B(z) - D(x-z)(\partial_0)^2 B(z)] \\
&\quad = \int d^3\boldsymbol{z}[(\partial_k^z)^2 D(x-z)B(z) - D(x-z)(\partial_0)^2 B(z)] \\
&\quad = \int d^3\boldsymbol{z}[D(x-z)(\partial_k)^2 B(z) - D(x-z)(\partial_0)^2 B(z)] \\
&\quad = -\int d^3\boldsymbol{z} D(x-z)\Box B(z) \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

より z_0 に依存せず, 特に $z_0 = x_0$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\int d^3\boldsymbol{z} D(x-z)\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z} B(z) \\
&\quad = \int d^3\boldsymbol{z} D(0,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z} B(x_0,\boldsymbol{z}) \\
&\quad = \int d^3\boldsymbol{z}[\partial_0^z D(0,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})B(x_0,\boldsymbol{z}) - D(0,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\partial_0^z B(x_0,\boldsymbol{z})] \\
&\quad = \int d^3\boldsymbol{z}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})B(x_0,\boldsymbol{z}) \\
&\quad = B(x)
\end{aligned}$$

のように帰結されるからである. この導出に際して, D 関数の性質と (A.6) を用いた. (A.8) も積分形で

[2]記号 $\overset{\leftrightarrow}{\partial_0}$ は $f\overset{\leftrightarrow}{\partial_0}g \equiv (\partial_0 f)g - f(\partial_0 g)$ で定義される (符号に注意).

$$A_\mu(x) = \int d^3\boldsymbol{z}[D(x-z)\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}A_\mu(z) + E(x-z)\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}\Box A_\mu(z)] \tag{A.36}$$

と書き改めることが可能である. 導出は全く同様に行われ, その詳細は省略する. (A.35), (A.36) の表示では z_0 は任意であることを留意して A_μ, B の 4 次元交換関係を以下で導く.

- $[A_\mu(x), B(y)]$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3\boldsymbol{z}\{\partial_0^z D(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})[A_\mu(x), B(z)]_{et} - D(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})[A_\mu(x), \partial_0 B(z)]_{et}\} \\
&= \int d^3\boldsymbol{z}[\partial_0^z D(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}) i\delta_{\mu 0}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) - D(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}) i\delta_{\mu k}\partial_k^z\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})] \\
&= -i\partial_\mu^x D(x-y)
\end{aligned}$$

- $[B(x), B(y)]$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3\boldsymbol{z}\{\partial_0^z D(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})[B(x), B(z)]_{et} - D(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})[B(x), \partial_0 B(z)]_{et}\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

- $[A_\mu(x), A_\nu(y)]$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3\boldsymbol{z}\{\partial_0^z D(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})[A_\mu(x), A_\nu(z)]_{et} - D(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})[A_\mu(x), \partial_0 A_\nu(z)]_{et} \\
&\qquad + \partial_0^z E(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})[A_\mu(x), \Box A_\nu(z)]_{et} - E(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})[A_\mu(x), \partial_0\Box A_\nu(z)]_{et}\} \\
&= \int d^3\boldsymbol{z}\{-D(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})[A_\mu(x), \partial_0 A_\nu(z)]_{et} + (1-\alpha)\partial_0^z E(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})[A_\mu(x), \partial_\nu B(z)]_{et} \\
&\qquad - (1-\alpha)E(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})[A_\mu(x), \partial_0\partial_\nu B(z)]_{et}\}
\end{aligned}$$

  - $[A_\mu(x), A_0(y)]$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3\boldsymbol{z}\{-D(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})(-i\alpha\delta_{\mu 0}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})) + (1-\alpha)\partial_0^z E(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})(i\delta_{\mu k}\partial_k^z\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})) \\
&\qquad - (1-\alpha)E(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})(\partial_k^z)^2(i\delta_{\mu 0}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}))\} \\
&- i\delta_{\mu 0}D(x-y) + i(1-\alpha)\partial_\mu^x\partial_0^x E(x-y)
\end{aligned}$$

  - $[A_\mu(x), A_l(y)]$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3\boldsymbol{z}\{-D(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})(i\delta_{\mu l}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})) + (1-\alpha)\partial_0^z E(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\partial_l^z(i\delta_{\mu 0}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})) \\
&\qquad - (1-\alpha)E(y_0-x_0, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\partial_l^z(i\delta_{\mu k}\partial_k^z\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}))\} \\
&= i\delta_{\mu l}D(x-y) + i(1-\alpha)\partial_\mu^x\partial_l^x E(x-y)
\end{aligned}$$

まとめると

$$\begin{aligned}
[A_\mu(x), A_\nu(y)] &= -ig_{\mu\nu}D(x-y) + i(1-\alpha)\partial_\mu^x\partial_\nu^x E(x-y) && \text{(A.37)} \\
[A_\mu(x), B(y)] &= -i\partial_\mu^x D(x-y) && \text{(A.38)} \\
[B(x), B(y)] &= 0 && \text{(A.39)}
\end{aligned}$$

となる. 以上をもって, 自由場における 4 次元交換関係の計算を完了する.

A.3 Four Dimensional Momentum representation

$\alpha \neq 1$ のときは, A_μ は d'Alembert 方程式を満たさないから, 通常のように 3 次元的な運動量表示ができない. なぜなら $\exp \pm i(|\boldsymbol{p}|x_0 - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x})$ の重ね合わせは自動的に d'Alembert 方程式を満たしてしまうからである. ゆえに 4 次元的な運動量表示

$$A_\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^4p\theta(p_0)[a_\mu(p)e^{-ipx} + a^\dagger_\mu(p)e^{ipx}] \tag{A.40}$$

を採用する. 因みに B は d'Alembert 方程式を満たすため 3 次元的な運動量表示が可能であるが, 統一的に扱いたいので 4 次元的な運動量表示に移行させる. まず (A.8), あるいはそれの積分形である (A.36) を解くにあたって便利な関数を定義しておく.

$$D^{(+)}(x) \equiv (2\pi)^{-3} \int d^4p\theta(p_0)\delta(p^2)e^{-ipx} \tag{A.41}$$

$$D^{(-)}(x) \equiv -(2\pi)^{-3} \int d^4p\theta(-p_0)\delta(p^2)e^{-ipx} \tag{A.42}$$

$$E^{(+)}(x) \equiv (2\pi)^{-3} \int d^4p\theta(p_0)\delta'(p^2)e^{-ipx} \tag{A.43}$$

$$E^{(-)}(x) \equiv -(2\pi)^{-3} \int d^4p\theta(-p_0)\delta'(p^2)e^{-ipx} \tag{A.44}$$

ここで恒等式

$$\epsilon(p_0) = \theta(p_0) - \theta(-p_0) \tag{A.45}$$

に注意すると

$$D(x) = -i(D^{(+)}(x) + D^{(-)}(x)) \tag{A.46}$$

$$E(x) = -i(E^{(+)}(x) + E^{(-)}(x)) \tag{A.47}$$

は自明で成立し, また

$$(D^{(+)}(x))^* = -D^{(-)}(x) \tag{A.48}$$

$$(E^{(+)}(x))^* = -E^{(-)}(x) \tag{A.49}$$

という性質を持つ. さて (A.36), (A.35) は正エネルギー部分と負エネルギー部分, つまり

$$A^{(+)}_\mu(x) \equiv -i \int d^3\boldsymbol{z} \left(D^{(+)}(x-z) \overset{\leftrightarrow}{\partial^z_0} A_\mu(z) + E^{(+)}(x-z) \overset{\leftrightarrow}{\partial^z_0} \Box A_\mu(z) \right) \tag{A.50}$$

$$A^{(-)}_\mu(x) \equiv -i \int d^3\boldsymbol{z} \left(D^{(-)}(x-z) \overset{\leftrightarrow}{\partial^z_0} A_\mu(z) + E^{(-)}(x-z) \overset{\leftrightarrow}{\partial^z_0} \Box A_\mu(z) \right) \tag{A.51}$$

$$B^{(+)}(x) \equiv -i \int d^3\boldsymbol{z} D^{(+)}(x-z) \overset{\leftrightarrow}{\partial^z_0} B(z) \tag{A.52}$$

$$B^{(-)}(x) \equiv -i \int d^3\boldsymbol{z} D^{(-)}(x-z) \overset{\leftrightarrow}{\partial^z_0} B(z) \tag{A.53}$$

を用いて

$$A_\mu(x) = A^{(+)}_\mu(x) + A^{(-)}_\mu(x) \tag{A.54}$$

$$B(x) = B^{(+)}(x) + B^{(-)}(x) \tag{A.55}$$

$$(A^{(+)}_\mu(x))^\dagger = A^{(-)}_\mu(x) \tag{A.56}$$

$$(B^{(+)}(x))^\dagger = B^{(-)}(x) \tag{A.57}$$

と再評価されるため $A_\mu^{(+)}$, $B^{(+)}$ についてのみ以下で考察する.

$$\begin{aligned}
A_\mu^{(+)}(x) &= -i\int d^3\boldsymbol{z}[D^{(+)}(x-z)\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}A_\mu(z)+E^{(+)}(x-z)\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}\Box A_\mu(z)] \\
&= -i\int d^3\boldsymbol{z}\{[(2\pi)^{-3}\int d^4p\theta(p_0)\delta(p^2)e^{-ip(x-z)}]\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}A_\mu(z) \\
&\quad +[(2\pi)^{-3}\int d^4p\theta(p_0)\delta'(p^2)e^{-ip(x-z)}]\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}\Box A_\mu(z)\} \\
&= (2\pi)^{-3/2}\int d^4p\{-i(2\pi)^{-3/2}\theta(p_0)\int d^3\boldsymbol{z}[\delta(p^2)e^{ipz}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}A_\mu(z)+\delta'(p^2)e^{ipz}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}\Box A_\mu(z)]\}e^{-px} \\
&= (2\pi)^{-3/2}\int d^4pa_\mu(p)e^{-ipx} \\
B^{(+)}(x) &= -i\int d^3\boldsymbol{z}D^{(+)}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}B(z) \\
&= -i\int d^3\boldsymbol{z}[(2\pi)^{-3}\int d^4p\theta(p_0)\delta(p^2)e^{-ip(x-z)}]\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}B(z) \\
&= (2\pi)^{-3/2}\int d^4p[-i(2\pi)^{-3/2}\theta(p_0)\int d^3\boldsymbol{z}\delta(p^2)e^{ipz}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}B(z)]e^{-px} \\
&= (2\pi)^{-3/2}\int d^4pb(p)e^{-px}
\end{aligned}$$

ここで a_μ, b は 4 次元運動量の関数としての消滅演算子であり

$$a_\mu(p) \equiv -i(2\pi)^{-3/2}\theta(p_0)\int d^3\boldsymbol{z}[\delta(p^2)e^{ipz}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}A_\mu(z)+\delta'(p^2)e^{ipz}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}\Box A_\mu(z)] \tag{A.58}$$

$$b(p) \equiv -i(2\pi)^{-3/2}\theta(p_0)\int d^3\boldsymbol{z}\delta(p^2)e^{ipz}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}B(z) \tag{A.59}$$

によって定義される. これをもって (A.40) を具体的に構成したことなる. 次に興味ある量は a_μ, b の 4 次元交換関係であり, それは (A.37), (A.38), (A.39), (A.58), (A.59) を用いて算出される. 詳細は以下の通り.

- $\big[a_\mu(p),b^\dagger(q)\big]$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-3}\theta(p_0)\theta(q_0)\int d^3\boldsymbol{y}d^3\boldsymbol{z}e^{ipy-iqz}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^y}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}(\delta(p^2)\delta(q^2)+\delta'(p^2)\delta(q^2)\Box^y)[A_\mu(y),B(z)] \\
&= (2\pi)^{-3}\theta(p_0)\theta(q_0)\int d^3\boldsymbol{y}d^3\boldsymbol{z}e^{ipy-iqz}(p_0q_0+iq_0\partial_0^y-ip_0\partial_0^z+\partial_0^y\partial_0^z) \\
&\qquad (\delta(p^2)\delta(q^2)+\delta'(p^2)\delta(q^2)\Box^y)(-i\partial_\mu^yD(y-z)) \\
&= (2\pi)^{-3}\theta(p_0)\theta(q_0)\int d^3\boldsymbol{y}d^3\boldsymbol{z}e^{ipy-iqz}\int d^4l(p_0q_0+p_0l_0+q_0l_0+l_0l_0) \\
&\qquad i(2\pi)^{-3}\epsilon(l_0)e^{-il(y-z)}\delta(p^2)\delta(q^2)l_\mu\delta(l^2) \\
&= i\delta^4(p-q)p_\mu\delta(p^2)\theta(p_0)
\end{aligned}$$

- $\big[b(p),b^\dagger(q)\big]$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-3}\theta(p_0)\theta(q_0)\int d^3\boldsymbol{y}d^3\boldsymbol{z}e^{ipy-iqz}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^y}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z}\delta(p^2)\delta(q^2)[B(y),B(z)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

- $\big[a_\mu(p),a_\nu^\dagger(q)\big]$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-3}\theta(p_0)\theta(q_0)\int d^3\boldsymbol{y}d^3\boldsymbol{z}e^{ipy-iqz}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^y}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0^z} \\
&\qquad (\delta(p^2)\delta(q^2)+\delta'(p^2)\delta(q^2)\Box^y+\delta(p^2)\delta'(q^2)\Box^z+\delta'(p^2)\delta'(q^2)\Box^y\Box^z)[A_\mu(y),A_\nu(z)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-3}\theta(p_0)\theta(q_0)\int d^3\boldsymbol{y}d^3\boldsymbol{z}e^{ipy-iqz}(p_0q_0+iq_0\partial_0^y-ip_0\partial_0^z+\partial_0^y\partial_0^z)\\
&\qquad(\delta(p^2)\delta(q^2)+\delta'(p^2)\delta(q^2)\Box^y+\delta(p^2)\delta'(q^2)\Box^z+\delta'(p^2)\delta'(q^2)\Box^y\Box^z)\\
&\qquad(-ig_{\mu\nu}D(y-z)+i(1-\alpha)\partial_\mu^y\partial_\nu^y E(y-z))\\
&= (2\pi)^{-3}\theta(p_0)\theta(q_0)\int d^3\boldsymbol{y}d^3\boldsymbol{z}e^{ipy-iqz}\int d^4l(p_0q_0+p_0l_0+q_0l_0+l_0l_0)i(2\pi)^{-3}\epsilon(l_0)e^{-il(y-z)}\\
&\qquad[\delta(p^2)\delta(q^2)(ig_{\mu\nu}\delta(l^2)-i(1-\alpha)l_\mu l_\nu\delta'(l^2))+(\delta(p^2)\delta'(q^2)+\delta'(p^2)+\delta(q^2))i(1-\alpha)l_\mu l_\nu\delta(l^2)]\\
&= -\delta^4(p-q)[g_{\mu\nu}\delta(p^2)+(1-\alpha)p_\mu p_\nu\delta'(p^2)]\theta(p_0)
\end{aligned}
$$

まとめると, (A.6) と (A.8) の解の 4 次元表示は

$$
A_\mu(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d^4p(a_\mu(p)e^{-ipx}+a_\mu^\dagger(p)e^{ipx}) \tag{A.60}
$$

$$
B(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d^4p(b(p)e^{-ipx}+b^\dagger(p)e^{ipx}) \tag{A.61}
$$

で与えられ, (A.37), (A.38), (A.39) と同値な a_μ, b の 4 次元交換関係は

$$
\begin{aligned}
\left[a_\mu(p),a_\nu^\dagger(q)\right] &= -\delta^4(p-q)[g_{\mu\nu}\delta(p^2)+(1-\alpha)p_\mu p_\nu\delta'(p^2)]\theta(p_0) &\text{(A.62)}\\
\left[a_\mu(p),b^\dagger(q)\right] &= i\delta^4(p-q)p_\mu\delta(p^2)\theta(p_0) &\text{(A.63)}\\
\left[b(p),b^\dagger(q)\right] &= 0 &\text{(A.64)}\\
\textbf{The Others} &= 0 &\text{(A.65)}
\end{aligned}
$$

となる. しかし場の方程式は (A.5), (A.7) まで含めて完全なものとなるため a_μ, b の間には

$$
\begin{aligned}
p^\mu a_\mu(p) &= -i\alpha b(p) &\text{(A.66)}\\
p^2 a_\mu(p) &= i(1-\alpha)p_\mu b(p) &\text{(A.67)}
\end{aligned}
$$

が要求される. $a_\mu^\dagger(p)|0>$, $b^\dagger(p)|0>$ と一見 5 つの状態が存在するが, (A.66) のために実際は 4 つである[3]. $|0>$ は真空であり

$$
\begin{aligned}
a_\mu(p)|0> &= 0 &\text{(A.68)}\\
b(p)|0> &= 0 &\text{(A.69)}\\
<0|0> &= 1 &\text{(A.70)}
\end{aligned}
$$

をもって定義される状態である. ここで興味ある状態, すなわち物理的状態 $|\mathbf{phys}>$ に

$$
B^{(+)}(x)|\mathbf{phys}>=0 \tag{A.71}
$$

という条件を与える. これは補助条件と呼ばれ,

$$
b(p)|\mathbf{phys}>=0 \tag{A.72}
$$

と同値である. 電磁場の Lagrangian として (A.1) の代わりに (A.2) を用いたことによって共変的量子化が可能になったが, 古典論との対応が破壊されてしまった. この条件はそれを復元する役目を担う. 確かに (A.5), (A.7) より

$$
\begin{aligned}
<\mathbf{phys}|\partial^\mu A_\mu|\mathbf{phys}> &= 0 &\text{(A.73)}\\
<\mathbf{phys}|\Box A_\mu|\mathbf{phys}> &= 0 &\text{(A.74)}
\end{aligned}
$$

となり, 期待値の意味での, つまり古典的 Maxwell 方程式をもたらすに至る.

[3] (A.67) は一見すると (A.66) と矛盾する. この矛盾を解決するのが後述する補助条件である.

A.4 Propagator

ここでは QED の摂動計算に必要となる伝播関数 $<0|\mathbf{T}A_\mu(x)A_\nu(y)|0>$, $<0|\mathbf{T}A_\mu(x)B(y)|0>$, $<0|\mathbf{T}B(x)B(y)|0>$ を算出する.
まず真空の性質 (A.68) を用いて

$$\begin{aligned}
&<0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0> \\
&\quad = <0|(A_\mu^{(+)}(x)+A_\mu^{(-)}(x))(A_\nu^{(+)}(y)+A_\nu^{(-)}(y))|0> \\
&\quad = <0|A_\mu^{(+)}(x)A_\nu^{(-)}(y)|0> \\
&\quad = <0|[A_\mu^{(+)}(x),A_\nu^{(-)}(y)]|0>
\end{aligned}$$

と変形され

$$\begin{aligned}
&[A_\mu^{(+)}(x),A_\nu^{(-)}(y)] \\
&\quad = (2\pi)^{-3}\int d^4pd^4q[a_\mu(p),a_\nu^\dagger(q)]e^{-ipx+iqy} \\
&\quad = (2\pi)^{-3}\int d^4pd^4q\{-\delta^4(p-q)[g_{\mu\nu}\delta(p^2)+(1-\alpha)p_\mu p_\nu\delta'(p^2)]\theta(p_0)\}e^{-ipx+iqy} \\
&\quad = -g_{\mu\nu}D^{(+)}(x-y)+(1-\alpha)\partial_\mu^x\partial_\nu^xE^{(+)}(x-y)
\end{aligned}$$

より $[A_\mu^{(+)}(x),A_\nu^{(-)}(y)]$ が $c-number$ であることが判る. つまり

$$<0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0>=-g_{\mu\nu}D^{(+)}(x-y)+(1-\alpha)\partial_\mu^x\partial_\nu^xE^{(+)}(x-y) \tag{A.75}$$

が (A.70) より成立する. これと **T** 積の定義[4]から $<0|\mathbf{T}A_\mu(x)A_\nu(y)|0>$ は計算され, 具体的には以下のように行う.

$$\begin{aligned}
&<0|\mathbf{T}A_\mu(x)A_\nu(y)|0> \\
&\quad = \theta(x_0-y_0)<0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0>+\theta(y_0-x_0)<0|A_\nu(y)A_\mu(x)|0> \\
&\quad = \theta(x_0-y_0)[-g_{\mu\nu}D^{(+)}(x-y)+(1-\alpha)\partial_\mu^x\partial_\nu^xE^{(+)}(x-y)] \\
&\qquad +\theta(y_0-x_0)[+g_{\mu\nu}D^{(-)}(x-y)-(1-\alpha)\partial_\mu^x\partial_\nu^xE^{(-)}(x-y)] \\
&\quad = -g_{\mu\nu}D_F(x-y)+(1-\alpha)\partial_\mu^x\partial_\nu^xE_F(x-y)
\end{aligned}$$

ここで D_F, E_F は

$$D_F(x-y) \equiv \theta(x_0-y_0)D^{(+)}-\theta(y_0-x_0)D^{(-)}=\int\frac{d^4p}{i(2\pi)^4}\frac{1}{-p^2-i\epsilon}e^{-ip(x-y)} \tag{A.76}$$

$$E_F(x-y) \equiv \theta(x_0-y_0)E^{(+)}-\theta(y_0-x_0)E^{(-)}=\int\frac{d^4p}{i(2\pi)^4}\frac{1}{(-p^2-i\epsilon)^2}e^{-ip(x-y)} \tag{A.77}$$

と定義される超関数である. 全く同様の手続きにより $<0|\mathbf{T}A_\mu(x)B(y)|0>$, $<0|\mathbf{T}B(x)B(y)|0>$ も計算されるが, ここではその詳細は略す. まとめると

$$<0|\mathbf{T}A_\mu(x)A_\nu(y)|0> = -g_{\mu\nu}D_F(x-y)+(1-\alpha)\partial_\mu^x\partial_\nu^xE_F(x-y) \tag{A.78}$$

$$<0|\mathbf{T}A_\mu(x)B(y)|0> = -\partial_\mu^xD_F(x-y) \tag{A.79}$$

$$<0|\mathbf{T}B(x)B(y)|0> = 0 \tag{A.80}$$

となる.

[4] $\mathbf{T}\phi(x)\phi(y)\equiv\theta(x_0-y_0)\phi(x)\phi(y)\pm\theta(y_0-x_0)\phi(y)\phi(x)$
$\pm$: ϕ が Boson/Fermion
A_μ, B は Gauge Boson 場

A.5 Feynman Gauge

これまで Gauge を固定せずに量子化を行ってきたが, 以後伝播関数が単純になる Feynman Gauge$\alpha = 1$ に限定して話を進める. 以前述べたように Feynman Gauge においては A_μ の 3 次元運動量表示が可能であるので

$$a_\mu(p) \equiv \theta(p_0)\delta(p^2)\sqrt{2|\boldsymbol{p}|}\alpha_\mu(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{p}|}}\delta(p_0 - |\boldsymbol{p}|)\alpha_\mu(\boldsymbol{p}) \tag{A.81}$$

によって (A.36),(A.37) を書き直すと

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= (2\pi)^{-3/2}\int \boldsymbol{d^3p}\frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{p}|}}[\alpha_\mu(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + \alpha_\mu^\dagger(\boldsymbol{p})e^{ipx}] & \text{(A.82)} \\ [\alpha_\mu(\boldsymbol{p}), \alpha_\nu(\boldsymbol{q})] &= -g_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) & \text{(A.83)} \end{aligned}$$

となる. ただし $p_0 = |\boldsymbol{p}|$, $q_0 = |\boldsymbol{q}|$ とした.
さて $\alpha_\mu^\dagger(\boldsymbol{p})|0>$ で記述される 4 状態の物理的意味を明確にするため, $\alpha_\mu(\boldsymbol{p})$ の線形変換を行う. 具体的には

$$\alpha_\mu(\boldsymbol{p}) \equiv \sum_\sigma \alpha(\boldsymbol{p},\sigma)\epsilon_\mu(\boldsymbol{p},\sigma) \tag{A.84}$$

で与えられ, 新しい記号は

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu(\boldsymbol{p},\pm) &\equiv (0, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{p},\pm)) & \text{(A.85)} \\ \epsilon^\mu(\boldsymbol{p},L) &\equiv -i(|\boldsymbol{p}|,\boldsymbol{p}) & \text{(A.86)} \\ \epsilon^\mu(\boldsymbol{p},S) &\equiv i(|\boldsymbol{p}|,-\boldsymbol{p})/2|\boldsymbol{p}|^2 & \text{(A.87)} \end{aligned}$$

で定義される. ただし $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{p},\pm)$ とは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{p},\pm)\cdot\boldsymbol{p} &= 0 & \text{(A.88)} \\ \boldsymbol{\epsilon}^*(\boldsymbol{p},\pm)\cdot\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{p},\pm) &= 1 & \text{(A.89)} \\ \boldsymbol{\epsilon}^*(\boldsymbol{p},\pm)\cdot\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{p},\mp) &= 0 & \text{(A.90)} \end{aligned}$$

を満たす Vector である. ここで

$$\tilde{\eta}^{\sigma\tau} \equiv \begin{array}{c} \\ + \\ - \\ L \\ S \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & L & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{A.91}$$

という計量を用いると

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^*(\boldsymbol{p},\sigma)\epsilon^\mu(\boldsymbol{p},\tau) &= -\tilde{\eta}^{\sigma\tau} & \text{(A.92)} \\ \sum_{\sigma\tau}\epsilon_\mu(\boldsymbol{p},\sigma)\tilde{\eta}^{\sigma\tau}\epsilon_\nu^*(\boldsymbol{p},\tau) &= -g_{\mu\nu} & \text{(A.93)} \end{aligned}$$

は簡単に確認できる. (A.82), (A.84) より

$$A_\mu(x) = \int d^3\boldsymbol{p}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\sum_\sigma[\alpha(\boldsymbol{p},\sigma)\epsilon(\boldsymbol{p},\sigma)e^{-ipx} + \alpha^\dagger(\boldsymbol{p},\sigma)\epsilon^*(\boldsymbol{p},\sigma)e^{ipx}] \tag{A.94}$$

となり, この表式が最終結果である. また (A.83), (A.84), (A.93) からは

$$[\alpha(\boldsymbol{p},\sigma),\alpha^\dagger(\boldsymbol{q},\tau)] = \tilde{\eta}^{\sigma\tau}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{A.95}$$
$$\textbf{The Others} = 0 \tag{A.96}$$

という交換関係が算出される. 確かに α は消滅演算子として相応しい性質を持っているが, $\alpha^\dagger(\boldsymbol{p},\sigma)|0>$ $(\sigma=\pm,L,S)$ で作られる 4 種類の状態は何であろうか.
ここでは証明抜きで結果のみを与える.

- $\alpha^\dagger(\boldsymbol{p},\pm)|0>$
  Transverse Phton と呼ばれ, 実際に観測される Photon である.
  運動量 $\boldsymbol{p}$, Helicity±1 を有する 1 Photon 状態.

- $\alpha^\dagger(\boldsymbol{p},L)|0>$
  Longitudinal Photon と呼ばれ, 非物理状態である.

- $\alpha^\dagger(\boldsymbol{p},S)|0>$
  Scalar Photon と呼ばれ, 物理状態であるがノルムが 0 のため確立解釈に従えば決して観測されない粒子である.

最後に補助 Scalar 場 B の正体について言及しておく. (A.66) より A_μ と B は関係付けられていて, 特に b の 3 次元運動量表示 β について

$$-i\beta(\boldsymbol{p}) = p^\mu\alpha_\mu(\boldsymbol{p}) \tag{A.97}$$
$$= \sum_\sigma \alpha(\boldsymbol{p},\sigma)p^\mu\epsilon_\mu(\boldsymbol{p},\sigma) \tag{A.98}$$
$$= \sum_\sigma \alpha(\boldsymbol{p},\sigma)i\delta_{\sigma S} \tag{A.99}$$
$$= i\alpha(\boldsymbol{p},S) \tag{A.100}$$

という関係があり, つまり B は Scslar Photon の場であるといえる.

Appendix B

Positronium Hyperfine Structure

卒業研究の Theme である PHS(Positronium Hyperfine Structure) の導出をこの章で行う. それはすなわち, ChapterA で解説した QED を実践的に使用し, (1.1) に証明を与えることで帰結される. 方針は, 任意の Feynman Diagram から対応する不変振幅を書き下し, 非相対論極限 (今回は $\mathcal{O}(c^{-3})$) をとり, Born 近似の振幅との対応から実行 Potential を導出する方法を採用する.

B.1 Invariant Amplitude

$\mathbf{e}^-$ と $\mathbf{e}^+$ の間の相互作用として最低次のものは, 以下の Diagram にて評価されるものである.

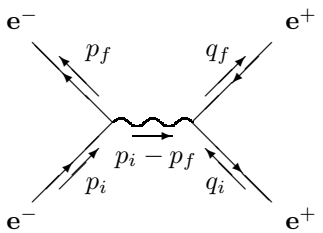


Figure B.1: Scattering Type

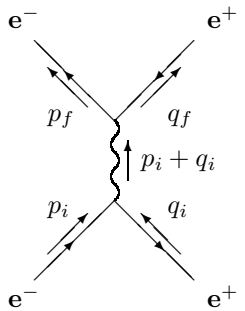


Figure B.2: Annihilation Type

故に不変振幅 $\mathscr{M}$ は

$$\begin{aligned}
\mathscr{M} &= \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2 && \text{(B.1)}\\
\mathscr{M}_1 &\equiv e^2\bar{u}(\boldsymbol{p_f}, r_f)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p_i}, r_i)D_{\mu\nu}(p_i - p_f)\bar{v}(\boldsymbol{q_i}, s_i)\gamma^\nu v(\boldsymbol{q_f}, s_f) && \text{(B.2)}\\
\mathscr{M}_2 &\equiv -e^2\bar{v}(\boldsymbol{q_i}, s_i)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p_i}, r_i)D_{\mu\nu}(p_i + q_i)\bar{u}(\boldsymbol{p_f}, r_f)\gamma^\nu v(\boldsymbol{q_f}, s_f) && \text{(B.3)}
\end{aligned}$$

で与えられる. $\mathscr{M}_1$ は FigureB.1 に, $\mathscr{M}_2$ は FigureB.2 に対応している. ただし

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p_f} + \boldsymbol{q_f} - \boldsymbol{p_i} - \boldsymbol{q_i} &= 0 && \text{(B.4)}\\
p_{f_0} &= \sqrt{|\boldsymbol{p_f}|^2 + m^2} && \text{(B.5)}\\
p_{i0} &= \sqrt{|\boldsymbol{p_i}|^2 + m^2} && \text{(B.6)}\\
q_{f_0} &= \sqrt{|\boldsymbol{q_f}|^2 + m^2} && \text{(B.7)}\\
q_{i0} &= \sqrt{|\boldsymbol{q_i}|^2 + m^2} && \text{(B.8)}
\end{aligned}$$

に注意する. ここで $D_{\mu\nu}$ は, CapterA で考察した $< 0|\mathbf{T}A_\mu(x)A_\nu(y)|0 >$ の Fourier 像であり具体的には

$$D_{\mu\nu}(k) \equiv \frac{-g_{\mu\nu}}{-k^2} - (1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{(-k^2)^2} \qquad \text{(B.9)}$$

で定義される量である. 実は

$$D_{\mu\nu}(k) \to D_{\mu\nu}(k) + k_\mu \chi_\nu + \chi_\mu k_\nu \tag{B.10}$$

という変換は物理量, この場合は $\mathscr{M}$ を不変に保つ. その証明は例えば

$$\begin{aligned}
&(p_i - p_f)_\mu \bar{u}(\boldsymbol{p_f}, r_f)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p_i}, r_i) \\
&\quad = \bar{u}(\boldsymbol{p_f}, r_f)(\not{p}_i - \not{p}_f)u(\boldsymbol{p_i}, r_i) \\
&\quad = \bar{u}(\boldsymbol{p_f}, r_f)(m - m)u(\boldsymbol{p_i}, r_i) \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

で与えられる. ここで特に

$$\chi_0 = -\frac{k_0}{2(k_0^2 - |\boldsymbol{k}^2|)\boldsymbol{k}^2} \tag{B.11}$$

$$\chi_i = \frac{k_i}{2(k_0^2 - |\boldsymbol{k}^2|)\boldsymbol{k}^2} \tag{B.12}$$

と設定した場合に得られる伝播関数を Coulomb Gauge Propagator と呼び

$$D_{\mu\nu}^{\mathbf{Coul}}(k) = \begin{cases} -\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2} & \mu = \nu = 0 \\ -\frac{1}{k_0^2 - |\boldsymbol{k}|^2}(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\boldsymbol{k}|^2}) & \mu = i,\ \nu = j \\ 0 & \textbf{otherwise} \end{cases} \tag{B.13}$$

がその詳細である. $D_{00}^{\mathbf{Coul}}$ が Coulomb Potential の Fourier 像となっていることから予想できる通り, この Gauge は非相対論的問題の応用に極めて力を発揮することが判っている. (B.2) の計算を簡単にするため,

$$\bar{v}(\boldsymbol{q_i}, s_i)\gamma^\nu v(\boldsymbol{q_f}, s_f) = \bar{u}(\boldsymbol{q_f}, s_f)\gamma^\nu u(\boldsymbol{q_i}, s_i) \tag{B.14}$$

という恒等式を利用する. ちなみに証明は

$$\gamma^2 \gamma^\nu \gamma^2 = \gamma^{\nu *} \tag{B.15}$$

の関係を用い, 以下のように行う.

$$\begin{aligned}
\bar{v}(\boldsymbol{q_i}, s_i)\gamma^\nu v(\boldsymbol{q_f}, s_f) &= (i\gamma^2 u^*(\boldsymbol{q_i}, s_i))^\dagger \gamma^0 \gamma^\nu (i\gamma^2 u^*(\boldsymbol{q_f}, s_f)) \\
&= u^{\dagger *}(\boldsymbol{q_i}, s_i)\gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^2 u^*(\boldsymbol{q_f}, s_f) \\
&= \bar{u}^*(\boldsymbol{q_i}, s_i)\gamma^{\nu *} u^*(\boldsymbol{q_f}, s_f) \\
&= (\bar{u}(\boldsymbol{q_i}, s_i)\gamma^\nu u(\boldsymbol{q_f}, s_f))^\dagger \\
&= \bar{u}(\boldsymbol{q_f}, s_f)\gamma^\nu u(\boldsymbol{q_i}, s_i)
\end{aligned}$$

以上より結果的に計算すべき $\mathscr{M}_1$ は

$$\mathscr{M}_1 = e^2 \bar{u}(\boldsymbol{p_f}, r_f)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p_i}, r_i) D_{\mu\nu}^{\mathbf{Coul}}(p_i - p_f)\bar{u}(\boldsymbol{q_f}, s_f)\gamma^\nu u(\boldsymbol{q_i}, s_i) \tag{B.16}$$

で与えられることが判った.

B.2 Non-Rela Limit by $\mathcal{O}(c^{-3})$

ここでは不変振幅 $\mathscr{M}$ を非相対論的極限であらわに計算するため, 前段階として Propagator と Spinor について考察する.

B.2.1 Propagator

まず

$$\begin{aligned}\frac{1}{(p_{i0}-p_{f0})^2-|\boldsymbol{p_i}-\boldsymbol{p_f}|^2} &= \frac{1}{2m^2+2\boldsymbol{p_i}\cdot\boldsymbol{p_f}-2m^2\sqrt{1+\frac{|\boldsymbol{p_i}|^2}{m^2}}\ \sqrt{1+\frac{|\boldsymbol{p_f}|^2}{m^2}}} \\ &= \frac{1}{2m^2+2\boldsymbol{p_i}\cdot\boldsymbol{p_f}-2m^2(1+\frac{|\boldsymbol{p_i}|^2}{2m^2}+\frac{|\boldsymbol{p_f}|^2}{2m^2})}+\mathcal{O}(c^{-3}) \\ &\longrightarrow -\frac{1}{|\boldsymbol{p_i}-\boldsymbol{p_f}|^2}\end{aligned}$$

という関係が成り立つから, $D_{\mu\nu}^{\mathbf{Coul}}$ は

$$D_{\mu\nu}^{\mathbf{Coul}}(p_i-p_f)\longrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{|\boldsymbol{p_i}-\boldsymbol{p_f}|^2} & \mu=\nu=0\\ \frac{1}{|\boldsymbol{p_i}-\boldsymbol{p_f}|^2}(\delta_{ij}-\frac{(p_i-p_f)_i(p_i-p_f)_j}{|\boldsymbol{p_i}-\boldsymbol{p_f}|^2}) & \mu=i,\ \nu=j\\ 0 & \textbf{otherwise}\end{cases} \tag{B.17}$$

を用いて計算すればよいことが判る. このことは, $\mathscr{M}_1$ に含まれる Spinor に要求される Order が $\mathcal{O}(c^{-3})$ であることを主張している. 他方

$$\begin{aligned}\frac{1}{(p_{i0}+q_{i0})^2-|\boldsymbol{p_i}+\boldsymbol{q_i}|^2} &= \frac{1}{2m^2-2\boldsymbol{p_i}\cdot\boldsymbol{q_i}+2m^2\sqrt{1+\frac{|\boldsymbol{p_i}|^2}{m^2}}\ \sqrt{1+\frac{|\boldsymbol{q_i}|^2}{m^2}}} \\ &= \frac{1}{2m^2-2\boldsymbol{p_i}\cdot\boldsymbol{q_i}+2m^2(1+\frac{|\boldsymbol{p_i}|^2}{2m^2}+\frac{|\boldsymbol{q_i}|^2}{2m^2})}+\mathcal{O}(c^{-3}) \\ &\longrightarrow \frac{1}{4m^2}\end{aligned}$$

という結果から, $D_{\mu\nu}$ は

$$D_{\mu\nu}(p_i+q_i)\longrightarrow\frac{-g_{\mu\nu}}{-4m^2} \tag{B.18}$$

で与えられ, すでに c^{-2} を満足していることが判る. ゆえに $\mathscr{M}_2$ に含まれる Spinor に要求される Order は $\mathcal{O}(c^{-1})$, すなわち最低次で問題は生じない.

B.2.2 Spinor for $\mathscr{M}_1$

厳密な Spinor の詳細は

$$u(\boldsymbol{p},s) = \begin{pmatrix}\sqrt{p_0+m}\ \omega_s\\ \sqrt{p_0-m}\ (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\ \omega_s\end{pmatrix} \tag{B.19}$$

$$v(\boldsymbol{p},s) = \begin{pmatrix}\sqrt{p_0-m}\ (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\ \omega'_s\\ \sqrt{p_0+m}\ \omega'_s\end{pmatrix} \tag{B.20}$$

で与えられ, 新しい記号は

$$\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}| \tag{B.21}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3) \tag{B.22}$$

$$\omega'_s \equiv -i\sigma^2\omega_s^* \tag{B.23}$$

で定義される量で

$$\omega_s^\dagger \omega_s = 1 \tag{B.24}$$
$$\omega_s'^\dagger \omega_s' = 1 \tag{B.25}$$

という規格化を受けている. とりわけ (B.23) は後で重要となる関係式なので注意しておく. 前小節での考察により $\mathcal{O}(c^{-3})$ で u を計算する.

$$\sqrt{p_0+m} = \sqrt{2m}\,(1+\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{8m^2}) + \mathcal{O}(c^{-3}) \tag{B.26}$$
$$\sqrt{p_0-m} = \sqrt{2m}\,\frac{|\boldsymbol{p}|}{2m} + \mathcal{O}(c^{-3}) \tag{B.27}$$
$$\omega_s = \xi_s + \mathcal{O}(c^{-3}) \tag{B.28}$$

ξ_s は今は不明の 2×1 行列である. これらを用いると

$$u(\boldsymbol{p},s) \longrightarrow \sqrt{2m}\begin{pmatrix} (1+\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{8m^2})\,\xi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\,\xi_s \end{pmatrix} \equiv \sqrt{2m}\,\varphi(\boldsymbol{p},s) \tag{B.29}$$

の表式を得ることができ, 確率解釈の観点から ξ_s を決定したい[1].

$$\begin{aligned} \omega_s^\dagger\omega_s = 1 &= \varphi^\dagger(\boldsymbol{p},s)\varphi(\boldsymbol{p},s) \\ &= \xi_s^\dagger\,[(1+\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{8m^2})^2 + (\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m})^2]\,\xi_s \\ &= \xi_s^\dagger\,(1+\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m^2})\,\xi_s + \mathcal{O}(c^{-3}) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\omega_s = \sqrt{1+\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m^2}}\,\xi_s \Longleftrightarrow \xi_s = (1-\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{4m^2})\,\omega_s \tag{B.30}$$

という関係があらわに判り, 最終結果

$$\varphi(\boldsymbol{p},s) = \begin{pmatrix} (1-\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{8m^2})\,\omega_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\,\omega_s \end{pmatrix} \tag{B.31}$$

を帰結する.

B.2.3 Spinor for $\mathscr{M}_2$

今度は $\mathcal{O}(c^{-1})$ で u と, そして v を書き下す作業に入る.

$$\sqrt{p_0+m} = \sqrt{2m}\ + \mathcal{O}(c^{-1}) \tag{B.32}$$
$$\sqrt{p_0-m} = 0 + \mathcal{O}(c^{-1}) \tag{B.33}$$
$$\omega_s = \xi_s + \mathcal{O}(c^{-1}) \tag{B.34}$$

だから

$$u(\boldsymbol{p},s) \longrightarrow \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \sqrt{2m}\,\varphi(\boldsymbol{p},s) \tag{B.35}$$

[1] Diagram 則の使い方からも自明なように, $\bar{u}(\boldsymbol{p},s)u(\boldsymbol{p},s) = 2m$ の趣味を用いている

また

$$v(\boldsymbol{p},s) \longrightarrow \sqrt{2m}\begin{pmatrix} 0 \\ \xi'_s \end{pmatrix} \equiv \sqrt{2m}\,\chi(\boldsymbol{p},s) \tag{B.36}$$

となり, 先ほどと同じ方針で ξ_s を求めることにする.

$$\begin{aligned} \omega_s^\dagger\omega_s = 1 &= \varphi^\dagger(\boldsymbol{p},s)\varphi(\boldsymbol{p},s) \\ &= \xi_s^\dagger\xi_s \end{aligned}$$

つまり

$$\omega_s = \xi_s \tag{B.37}$$

という結果になる. まとめると $\mathcal{O}(c^{-1})$ の Spinor は

$$\varphi(\boldsymbol{p},s) = \begin{pmatrix} \omega_s \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.38}$$

$$\chi(\boldsymbol{p},s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega'_s \end{pmatrix} \tag{B.39}$$

で与えられる.

B.3 Never Give Up Days

この節では不変振幅 (B.16) と (B.3) を, (B.17)(B.18)(B.31)(B.38)(B.39) を用いて書き下す作業に終始する. いささか退屈であるので, 計算の詳細に興味の無い方は飛ばしてもらっても結構である.

B.3.1 Detail of $\mathscr{M}_1$

- $\bar{u}(\boldsymbol{p_f},r_f)\gamma^0 u(\boldsymbol{p_i},r_i)$

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \quad 2m\ \varphi^\dagger(\boldsymbol{p_f},r_f)\varphi(\boldsymbol{p_i},r_i) \\ &= \quad 2m\ \omega_{r_f}^\dagger\ [(1-\frac{|\boldsymbol{p_f}|^2}{8m^2})(1-\frac{|\boldsymbol{p_i}|^2}{8m^2}) + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p_f}}{2m}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p_i}}{2m}]\ \omega_{r_i} \\ &= \quad 2m\ \omega_{r_f}^\dagger\ [1-\frac{|\boldsymbol{p_f}|^2}{8m^2}-\frac{|\boldsymbol{p_i}|^2}{8m^2}+\frac{\boldsymbol{p_f}\cdot\boldsymbol{p_i}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p_f}\times\boldsymbol{p_i})}{4m^2}]\ \omega_{r_i}+\mathcal{O}(c^{-3}) \\ &\longrightarrow \quad 2m\ \omega_{r_f}^\dagger\ (1-\frac{|\boldsymbol{p_f}-\boldsymbol{p_i}|^2}{8m^2}+\frac{i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p_f}\times\boldsymbol{p_i})}{4m^2})\ \omega_{r_i} \end{aligned}$$

- $\bar{u}(\boldsymbol{p_f},r_f)\gamma^i u(\boldsymbol{p_i},r_i)$

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \quad 2m\ \varphi^\dagger(\boldsymbol{p_f},r_f)\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\varphi(\boldsymbol{p_i},r_i) \\ &= \quad 2m\ \omega_{r_f}^\dagger\ [(1-\frac{|\boldsymbol{p_f}|^2}{8m^2})\sigma^i\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p_i}}{2m}+\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p_f}}{2m}\sigma^i(1-\frac{|\boldsymbol{p_i}|^2}{8m^2})]\ \omega_{r_i} \\ &= \quad 2m\ \omega_{r_f}^\dagger\ (\sigma^i\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p_i}}{2m}+\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p_f}}{2m}\sigma^i)\ \omega_{r_i}+\mathcal{O}(c^{-3}) \\ &\longrightarrow \quad 2m\ \omega_{r_f}^\dagger\ \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p_f}+\boldsymbol{p_i}+i\boldsymbol{\sigma}\times(\boldsymbol{p_f}-\boldsymbol{p_i}))^i\ \omega_{r_i} \end{aligned}$$

- $\bar{u}(\boldsymbol{q_f},s_f)\gamma^0 u(\boldsymbol{q_i},s_i)$

$$\longrightarrow \quad 2m\ \omega_{s_f}^\dagger\ (1-\frac{|\boldsymbol{q_f}-\boldsymbol{q_i}|^2}{8m^2}+\frac{i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{q_f}\times\boldsymbol{q_i})}{4m^2})\ \omega_{s_i}$$

- $\bar{u}(\boldsymbol{q_f}, s_f)\gamma^i u(\boldsymbol{q_i}, s_i)$

$$\longrightarrow \quad 2m\ \omega^\dagger_{s_f}\ \frac{1}{2m}(\boldsymbol{q_f} + \boldsymbol{q_i} + i\boldsymbol{\sigma} \times (\boldsymbol{q_f} - \boldsymbol{q_i}))^i\ \omega_{s_i}$$

ここで以上の表式を見やすくし, 物理的内容がより浮き彫りになるように

$$p_f - p_i = q_i - q_f \equiv k \tag{B.40}$$
$$p_i \equiv p_- \tag{B.41}$$
$$q_i \equiv p_+ \tag{B.42}$$
$$p_f = k + p_- \tag{B.43}$$
$$q_f = -k + p_+ \tag{B.44}$$
$$r_i \equiv - \tag{B.45}$$
$$s_i \equiv + \tag{B.46}$$
$$r_f \equiv -' \tag{B.47}$$
$$s_f \equiv +' \tag{B.48}$$

という記号の定義, および再設定を行う. さて統合を始めよう.

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}_1 \quad \longrightarrow \quad & e^2 2m\ \omega^\dagger_{-'}\ (1 - \frac{|\boldsymbol{k}|^2}{8m^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p_-})}{4m^2})\ \omega_- \\
& (-\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2})2m\ \omega^\dagger_{+'}\ (1 - \frac{|\boldsymbol{k}|^2}{8m^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p_+})}{4m^2})\ \omega_+ \\
& + e^2 2m\ \omega^\dagger_{-'}\ \frac{1}{2m}(\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{p_-} + i\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{k})^i\ \omega_- \\
& \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}(\delta_{ij} - \frac{\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j}{|\boldsymbol{k}|^2})2m\ \omega^\dagger_{+'}\ \frac{1}{2m}(-\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{p_+} - i\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{k})^j\ \omega_+ \\
= \quad & -2m2m\frac{e^2}{|\boldsymbol{k}|^2}\ \omega^\dagger_{-'}\ \omega^\dagger_{+'}\ \frac{1}{4m^2}[4m^2 - |\boldsymbol{k}| + i\boldsymbol{\sigma_-}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p_-}) - i\boldsymbol{\sigma_+}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p_+})]\ \omega_-\ \omega_+ \\
& + 2m2m\frac{e^2}{|\boldsymbol{k}|^2}\ \omega^\dagger_{-'}\ \omega^\dagger_{+'}\ \frac{1}{4m^2}[(\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{p_-} + i\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{k})\cdot(-\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{p_+} - i\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{k}) \\
& - \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{p_-})\boldsymbol{k}\cdot(-\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{p_+})]\ \omega_-\ \omega_+ + \mathcal{O}(c^{-3}) \\
\longrightarrow \quad & 2m2m\ \omega^\dagger_{-'}\ \omega^\dagger_{+'}\ \frac{e^2}{4m^2|\boldsymbol{k}|^2}[-4m^2 + |\boldsymbol{k}|^2 + 4\boldsymbol{p_-}\cdot\boldsymbol{p_+} - \frac{4(\boldsymbol{p_-}\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{p_+}\cdot\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|^2} \\
& - i\boldsymbol{\sigma_-}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p_-}) + 2i\boldsymbol{\sigma_-}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p_+}) + i\boldsymbol{\sigma_+}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p_+}) - 2i\boldsymbol{\sigma_+}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p_-}) \\
& - (\boldsymbol{\sigma_-}\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{\sigma_+}\cdot\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{\sigma_-}\cdot\boldsymbol{\sigma_+}|\boldsymbol{k}|^2]\ \omega_-\ \omega_+
\end{aligned} \tag{B.49}$$

$\boldsymbol{\sigma}^-$ と $\boldsymbol{\sigma}^+$ に関して注意があり, それぞれ ω_-, ω_+ にかかる $\boldsymbol{\sigma}$ と解釈する必要がある.

B.3.2 Detail of $\mathscr{M}_2$

- $\bar{v}(\boldsymbol{q_i}, s_i)\gamma^0 u(\boldsymbol{p_i}, r_i)$

$$\begin{aligned}
& \longrightarrow \quad 2m\ \chi^\dagger(\boldsymbol{q_i}, s_i)\varphi(\boldsymbol{p_i}, r_i) \\
& = \quad 0
\end{aligned}$$

- $\bar{v}(\boldsymbol{q_i}, s_i)\gamma^i u(\boldsymbol{p_i}, r_i)$

$$\begin{aligned}
& \longrightarrow \quad 2m\ \chi^\dagger(\boldsymbol{q_i}, s_i)\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\varphi(\boldsymbol{p_i}, r_i) \\
& = \quad 2m\ \omega'^\dagger_{s_i}\ \boldsymbol{\sigma}^i\ \omega_{r_i}
\end{aligned}$$

- $\bar{u}(\boldsymbol{p_f}, r_f)\gamma^0 v(\boldsymbol{q_f}, s_f)$
  $\longrightarrow \quad 0$

- $\bar{u}(\boldsymbol{p_f}, r_f)\gamma^i v(\boldsymbol{q_f}, s_f)$
  $\longrightarrow \quad 2m\ \omega^\dagger_{r_f}\ \boldsymbol{\sigma}^i\ \omega'_{s_f}$

ここでもまた記号の定義を行う.

$$r_i \equiv - \tag{B.50}$$
$$s_i \equiv + \tag{B.51}$$
$$r_f \equiv -' \tag{B.52}$$
$$s_f \equiv +' \tag{B.53}$$

$\mathscr{M}_2$ と決定的に異なるのは, Spinor に $\prime$ が付いていることと, 並び順である. ここで (B.23) が活躍し以下の計算を円滑に進めてくれる.

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}_2 \quad &\longrightarrow \quad -e^2 2m\ \omega'^\dagger_+\ \boldsymbol{\sigma}^i\ \omega_-\ (\frac{-g_{ij}}{-4m^2})\ 2m\ \omega^\dagger_{-'}\ \boldsymbol{\sigma}^j\ \omega'_{+'} \\
&= \quad 2m2m\frac{e^2\delta_{ij}}{4m^2}(\omega'^\dagger_+\ \boldsymbol{\sigma}^i\ \omega_-)(\omega^\dagger_{-'}\ \boldsymbol{\sigma}^j\ \omega'_{+'}) \\
&= \quad 2m2m\frac{e^2}{4m^2}[-\frac{1}{2}\delta_{ij}(\omega'^\dagger_+\ \boldsymbol{\sigma}^i\ \omega'_{+'})(\omega^\dagger_{-'}\ \boldsymbol{\sigma}^j\ \omega_-) + \frac{3}{2}(\omega'^\dagger_+\ \omega'_{+'})(\omega^\dagger_{-'}\ \omega_-)] \\
&= \quad 2m2m\frac{e^2}{4m^2}[+\frac{1}{2}\delta_{ij}(\omega^\dagger_{+'}\ \boldsymbol{\sigma}^i\ \omega_+)(\omega^\dagger_{-'}\ \boldsymbol{\sigma}^j\ \omega_-) + \frac{3}{2}(\omega^\dagger_{+'}\ \omega_+)(\omega^\dagger_{-'}\ \omega_-)] \\
&= \quad 2m2m\ \omega^\dagger_{-'},\ \omega^\dagger_{+'},\ \frac{e^2}{4m^2}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_- \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ + \frac{3}{2})\ \omega_-\ \omega_+
\end{aligned} \tag{B.54}$$

途中用いた関係については, Pauli 行列についての完全性関係

$$\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\delta\gamma} + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma} \tag{B.55}$$

を出発点に証明される

$$\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\delta\gamma} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\gamma} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\delta\beta} + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\delta\beta} \tag{B.56}$$

と, 具体的に (B.23) より導かれる

$$\begin{aligned}
\omega'^\dagger_+\ \boldsymbol{\sigma}^i\ \omega'_{+'} &= (-i\sigma^2\omega^*{}_+)^\dagger\ \boldsymbol{\sigma}^i\ (-i\sigma^2\omega^*{}_{+'}) \\
&= \omega^{*\dagger}_+\ \sigma^2\boldsymbol{\sigma}^i\sigma^2\ \omega^*{}_{+'} \\
&= \omega^{*\dagger}_+\ (-\boldsymbol{\sigma}^{i^*})\ \omega^*{}_{+'} \\
&= -(\omega^\dagger_+\ \boldsymbol{\sigma}^i\ \omega_{+'})^\dagger \\
&= -\ \omega^\dagger_{+'},\ \boldsymbol{\sigma}^i\ \omega_+
\end{aligned}$$

とがあることに注目する.

B.3.3 Detail of $\mathscr{M}$

(B.49) と (B.54) を足し合わせることで $\mathscr{M}$ を $\mathcal{O}(c^{-3})$ の Order で獲得することができる.

$$\mathscr{M} \longrightarrow 2m2m\ \omega_-^\dagger,\ \omega_+^\dagger,\ \frac{e^2}{4m^2|\boldsymbol{k}|^2}[-4m^2+|\boldsymbol{k}|^2+4\boldsymbol{p}_-\cdot\boldsymbol{p}_+-\frac{4(\boldsymbol{p}_-\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{p}_+\cdot\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|^2}$$
$$-i\boldsymbol{\sigma}_-\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}_-)+2i\boldsymbol{\sigma}_-\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}_+)+i\boldsymbol{\sigma}_+\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}_+)-2i\boldsymbol{\sigma}_+\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}_-)$$
$$-(\boldsymbol{\sigma}_-\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{\sigma}_+\cdot\boldsymbol{k})+\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_-\cdot\boldsymbol{\sigma}_+|\boldsymbol{k}|^2+\frac{3}{2}|\boldsymbol{k}|^2]\ \omega_-\ \omega_+ \tag{B.57}$$

B.4 PHS at Last

厄介な計算の末, 不変振幅 $\mathscr{M}$ を (B.57) の形で得られたので, この章の最初で宣言したように Born 近似との対応から実行 Potential を書き下すことにする. ChapterA から始まった抽象的な場の理論から, 馴染み深い Coulomb Potential や LS Force, そして Spin-Spin Interaction, はたまたそれ程馴染んでいない Tensor Force までもが導かれる様子は圧巻である.

B.4.1 Born Approximation

そのような驚異的な方法に, ここでは簡単であるが証明を与えておく. まず場の理論からの遷移振幅は, 不変振幅 $\mathscr{M}$ と

$$\begin{aligned}
<\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+|S|\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+> &= i(2\pi)^4\delta^4(p_f+q_f-p_i-q_i)\frac{\mathscr{M}}{\sqrt{(2\pi)^{12}2p_{f_0}2q_{f_0}2p_{i0}2q_{i0}}} \\
&\longrightarrow i(2\pi)^4\delta^4(p_f+q_f-p_i-q_i)(2\pi)^{-6}\frac{\mathscr{M}}{2m2m}
\end{aligned} \tag{B.58}$$

で関係付けられている. この式はいわば不変振幅 $\mathscr{M}$ の定義式であるとも言える. 証明の手続きは第 2 量子化前の理論をもちいて遷移振幅を記述することから始まる. 粒子が種類を変えない, $\mathbf{e}^-+\mathbf{e}^+\to\mathbf{e}^-+\mathbf{e}^+$ という反応を扱っているので第 2 量子化前の理論でも記述できるのである. まず

$$H = H_0+V \tag{B.59}$$
$$S \simeq 1-i\int_{-\infty}^{\infty}dt\,V_I(t) \tag{B.60}$$
$$= 1-i\int_{-\infty}^{\infty}dt\,e^{iH_0t}Ve^{-iH_0t} \tag{B.61}$$

が成立し, V はあらわに時間に依存しないと仮定する. すると

$$\begin{aligned}
<\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+|S|\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+> &= -i\int_{-\infty}^{\infty}dt\ <\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+|e^{iH_0t}Ve^{-iH_0t}|\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+> \\
&= -i\int_{-\infty}^{\infty}dt\,e^{i(p_{f_0}+q_{f_0}-p_{i_0}-q_{i_0})t}<\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+|V|\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+> \\
&= -i2\pi\delta(p_{f_0}+q_{f_0}-p_{i0}-q_{i0})<\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+|V|\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+>
\end{aligned}$$

と変形することができる. ここで更に V に制約を加え $<\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+|V|\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+>$ を計算する. その制約とは

- V は 2 粒子間の座標に依存する.
- V はもちろん Spin に依存する.
- V はあらわに運動量に依存しない.

である. 実は最後の制約は後に, 次の計算と Well-Defined な形で変更されることをここで主張しておく. 座標空間の完全性を使うと

$$\begin{aligned}
<\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+|V|\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+> &= \int\boldsymbol{d^3x_1}\boldsymbol{d^3x_2}\frac{1}{(2\pi)^6}e^{i(\boldsymbol{p_f}-\boldsymbol{p_i})\cdot\boldsymbol{x_1}}e^{i(\boldsymbol{q_f}-\boldsymbol{q_i})\cdot\boldsymbol{x_2}}<V(\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1};\mathbf{spin})>_{\mathbf{spin}} \\
&= \int\boldsymbol{d^3x}\boldsymbol{d^3x_2}\frac{1}{(2\pi)^6}e^{i(\boldsymbol{p_f}+\boldsymbol{q_f}-\boldsymbol{p_i}-\boldsymbol{q_i})\cdot\boldsymbol{x_2}}e^{-i(\boldsymbol{p_f}-\boldsymbol{p_i})\cdot\boldsymbol{x}}<V(\boldsymbol{x};\mathbf{spin})>_{\mathbf{spin}} \\
&= \frac{(2\pi)^3}{(2\pi)^6}\delta^3(\boldsymbol{p_f}+\boldsymbol{q_f}-\boldsymbol{p_i}-\boldsymbol{q_i})\int\boldsymbol{d^3x}\ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}<V(\boldsymbol{x};\mathbf{spin})>_{\mathbf{spin}}
\end{aligned} \tag{B.62}$$

と変形され, 最終的に遷移振幅は

$$< \mathbf{e}^-\mathbf{e}^+|S|\mathbf{e}^-\mathbf{e}^+ > \quad = \quad -i(2\pi)^4\delta^4(p_f+q_f-p_i-q_i)(2\pi)^{-6}\int \boldsymbol{d^3x}\ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} < V(\boldsymbol{x};\mathbf{spin}) >_{\mathbf{spin}} \tag{B.63}$$

で与えられる. (B.58)(B.63) の比較により

$$< V(\boldsymbol{x};\mathbf{spin}) >_{\mathbf{spin}} = e^{i\theta}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \boldsymbol{d^3k}\ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{\mathscr{M}}{2m2m} \tag{B.64}$$

が言える. 意味ある物理量は遷移振幅の絶対値の二乗で得られるため, Phase Factor $e^{i\theta}$ を Joint の際に設けた. この値は自明の Potential, つまり Coulomb Potential の符号に合わせて選択することで決定される.

B.4.2 Fourier Transform

(B.64) から (B.57) を Fourier 変換する必要があることがわかる. そのためには以下の計算を実行しておくと便利である.

- Case1.

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \boldsymbol{d^3k}\ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{4\pi}{|\boldsymbol{k}|^2} = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}$$

- Case2.

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \boldsymbol{d^3k}\ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{4\pi\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|^2} = -i\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} = \frac{i\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}$$

- Case3.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^3}\int \boldsymbol{d^3k}\ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{4\pi(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|^4} \\
&\quad = \quad \frac{i4\pi}{2(2\pi)^3}(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}})\int \boldsymbol{d^3k}\ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}})\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2} \\
&\quad = \quad \frac{i4\pi}{2(2\pi)^3}(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}})\int \boldsymbol{d^3k}\ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}(-i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x})\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2} \\
&\quad = \quad \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}})\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \\
&\quad = \quad \frac{1}{2|\boldsymbol{x}|}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|^2})
\end{aligned}$$

- Case4.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^3}\int \boldsymbol{d^3k}\ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{4\pi(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|^2} \\
&\quad = \quad -(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}})\frac{1}{(2\pi)^3}\int \boldsymbol{d^3k}\ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{4\pi}{|\boldsymbol{k}|^2} \\
&\quad = \quad -(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}})\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \\
&\quad = \quad \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^3}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|^2})+\frac{4\pi}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\delta^3(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

さてこれらの積分公式を (B.57) かつ (B.64), つまり

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{x};\mathbf{spin}) &= e^{i\theta}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \boldsymbol{d^3k}\; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{e^2}{4m^2|\boldsymbol{k}|^2}[-4m^2+|\boldsymbol{k}|^2+4\boldsymbol{p}_-\cdot\boldsymbol{p}_+-\frac{4(\boldsymbol{p}_-\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{p}_+\cdot\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|^2} \\ &\quad -i\boldsymbol{\sigma}_-\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}_-)+2i\boldsymbol{\sigma}_-\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}_+)+i\boldsymbol{\sigma}_+\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}_+)-2i\boldsymbol{\sigma}_+\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}_-) \\ &\quad -(\boldsymbol{\sigma}_-\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{\sigma}_+\cdot\boldsymbol{k})+\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_-\cdot\boldsymbol{\sigma}_+|\boldsymbol{k}|^2+\frac{3}{2}|\boldsymbol{k}|^2] \end{aligned} \tag{B.65}$$

において適用する前に話を重心系に限定しよう. 本質的な問題ではないが式を簡略化するにあたって効果的である.

$$\boldsymbol{p}_-=-\boldsymbol{p}_+\equiv\boldsymbol{p} \tag{B.66}$$

また (B.65) の積分内の第 1 項目が Coulomb Potential を与えるので

$$\theta=0 \tag{B.67}$$

と取っておけば良いだろう.

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{x};\mathbf{spin}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \boldsymbol{d^3k}\; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{e^2}{4m^2|\boldsymbol{k}|^2}[-4m^2+|\boldsymbol{k}|^2-4|\boldsymbol{p}|^2+\frac{4(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})^2}{|\boldsymbol{k}|^2} \\ &\quad -3i(\boldsymbol{\sigma}_-+\boldsymbol{\sigma}_+)\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}) \\ &\quad -(\boldsymbol{\sigma}_-\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{\sigma}_+\cdot\boldsymbol{k})+\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_-\cdot\boldsymbol{\sigma}_+|\boldsymbol{k}|^2+\frac{3}{2}|\boldsymbol{k}|^2] \end{aligned} \tag{B.68}$$

ここで疑問として現れるのが (B.65) の $\boldsymbol{p}$ の存在である. 前小節の V の制約に抵触しているようだが実は

$$\boldsymbol{p}=-i\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}} \tag{B.69}$$

と解釈すれば問題が無い. すると次の問題は $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{x}$ の順序であるが, $\boldsymbol{p}$ を全ての因子の右に置くのが正解である. そもそも (B.62) の計算が間違いでない為には, 運動量が座標の右側にあることが必要なのだ. このことを気に留め, 積分を実行すると

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p};\mathbf{spin}) &= -\frac{e^2}{|\boldsymbol{x}|}+4\pi\mu_B^2\delta^3(\boldsymbol{x})-\frac{e^2}{2m^2c^2|\boldsymbol{x}|}(|\boldsymbol{p}|^2+\frac{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x}|^2}) \\ &\quad +6\mu_B^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{S} \\ &\quad +6\mu_B^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^3}(\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|^2}-\frac{1}{3}|\boldsymbol{S}|^2)+4\pi\mu_B^2(\frac{7}{3}|\boldsymbol{S}|^2-2)\delta^3(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{B.70}$$

を得る. ただし $\hbar$ と c を復活させ, $e\to\sqrt{4\pi}\;e$ を施し[2]Gauss 単位系に持っていった. ここで新しい記号は

$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2mc} \tag{B.71}$$

$$\boldsymbol{S} \equiv (\boldsymbol{\sigma}_-+\boldsymbol{\sigma}_+)/2\equiv\boldsymbol{S}_-+\boldsymbol{S}_+ \tag{B.72}$$

$$\hbar\boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p} \tag{B.73}$$

で定義される量である. 以上より実行 Hamiltonian は運動項も含め

$$H=\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{m}-\frac{|\boldsymbol{p}|^4}{4m^3c^2}+V(\boldsymbol{x};\mathbf{spin})+\mathcal{O}(c^{-3}) \tag{B.74}$$

である. 以上をもって (1.1) の証明を完了したといえる.

[2]この操作が必要となる理由は電磁場の Lagrangian に (A.1) を使用したから. 最初から $-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ で量子化を行えばこの問題は生じない.

Appendix C

Numerical Recipes

PHS を実験的に導出するためには, Resonance Line と理論 Model を Fitting する必要がある. しかしこの場合 Model が Parameter について非線型で依存するために, 当てはめに対していささか困難が生じる. この Chapter では, M 個の未知 Parameter をもつ Model の Fitting についての標準的な処方を与える.

C.1 Inversed Hesse Matrix Method

当てはめたい Model は

$$f_i(\boldsymbol{a}) \equiv f(x_i;\boldsymbol{a}) \tag{C.1}$$

であり, χ^2 評価値は

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}(\frac{f_i^{\mathbf{ob}} - f_i(\boldsymbol{a})}{\sigma_i})^2 \equiv \chi^2(\boldsymbol{a}) \tag{C.2}$$

とする. ここで $\boldsymbol{a}$ は M 個の未知 Parameter の Vector 表示, x_i は測定点, さらに σ_i はその点での測定値 $f_i^{\mathbf{ob}}$ の標準偏差である.
Prameter$\boldsymbol{a}$ についての χ^2 の勾配は, χ^2 が最小のとき 0 となる. 勾配の成分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a_n}\chi^2 &= \sum_{i=1}^{N} 2((f_i^{\mathbf{ob}} - f_i(\boldsymbol{a}))/\sigma_i)(-\frac{\partial}{\partial a_n}f_i(\boldsymbol{a})/\sigma_i) \\ &= -2\sum_{i=i}^{N}\frac{1}{\sigma^2}(f_i^{\mathbf{ob}} - f_i(\boldsymbol{a}))(\frac{\partial}{\partial a_n}f_i(\boldsymbol{a})) \\ &\equiv -2\beta_n(\boldsymbol{a})\end{aligned} \tag{C.3}$$

である. 更に偏微分をとると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n}\chi^2 &= 2\sum_{i=i}^{N}\frac{1}{\sigma^2}(\frac{\partial}{\partial a_m}f_i(\boldsymbol{a}))(\frac{\partial}{\partial a_n}f_i(\boldsymbol{a})) - 2\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma^2}(f_i^{\mathbf{ob}} - f_i(\boldsymbol{a}))(\frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n}f_i(\boldsymbol{a})) \\ &\longrightarrow 2\sum_{i=i}^{N}\frac{1}{\sigma^2}(\frac{\partial}{\partial a_m}f_i(\boldsymbol{a}))(\frac{\partial}{\partial a_n}f_i(\boldsymbol{a})) \\ &\equiv 2\alpha_{mn}(\boldsymbol{a})\end{aligned} \tag{C.4}$$

となる.
(C.4) の変形の際, 2 階導関数を含む項を無視したがその理由を以下で述べる.

(C.4) において 2 階導関数には $f_i^{\mathbf{ob}} - f_i(\boldsymbol{a})$ が掛るが, もし Model の設定がうまくいっている場合にはこの項は各点のランダムな測定誤差になるはずである. この誤差は正負両方の値をとり, 一般には Model に依存しない. したがって, 2 階導関数の項は i について足しあげると相殺する傾向があるといえる. すなわち, 1 階導関数を含む項に比べ充分に小さいことが期待され, 無視を正当化するのである.
実際に, 2 階導関数の項を入れるとかえって不安定になることを体験した.

次に (C.2) を任意の $\boldsymbol{a'}$ のまわりで Taylor 展開して, (C.3) と (C.4) を用いて表すと

$$\chi^2(\boldsymbol{a}) = \chi^2(\boldsymbol{a'}) - 2\sum_{n=1}^{M} \beta_n(\boldsymbol{a'})(a_n - a'_n) + \sum_{m,n=1}^{M} \alpha_{mn}(\boldsymbol{a'})(a_m - a'_m)(a_n - a'_n) + \cdots \tag{C.5}$$

で与えられ, さらにこの表式を $\boldsymbol{a}$ で偏微分すると

$$-2\beta_n(\boldsymbol{a}) = -2\beta_n(\boldsymbol{a'}) + 2\sum_{m=1}^{M} \alpha_{mn}(\boldsymbol{a'})(a_m - a'_m) + \cdots \tag{C.6}$$

を得る. χ^2 を最小化する $\boldsymbol{a}$ を $\hat{\boldsymbol{a}}$ とすると

$$\beta_n(\hat{\boldsymbol{a}}) = 0 \tag{C.7}$$

が成立し, これを (C.6) に代入することによって

$$0 = -2\beta_n(\boldsymbol{a'}) + 2\sum_{m=1}^{M} \alpha_{mn}(\boldsymbol{a'})(\hat{a}_m - a'_m) + \cdots \tag{C.8}$$

となり, もし $\hat{\boldsymbol{a}} \simeq \boldsymbol{a'}$ であるなら

$$\begin{aligned} 0 &= -2\beta_n(\boldsymbol{a'}) + 2\sum_{m=1}^{M} \alpha_{mn}(\boldsymbol{a'})(\hat{a}_m - a'_m) \\ &\Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{11}(\boldsymbol{a'}) & \cdots & \alpha_{1M}(\boldsymbol{a'}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{M1}(\boldsymbol{a'}) & \cdots & \alpha_{MM}(\boldsymbol{a'}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 - a'_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_M - a'_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1(\boldsymbol{a'}) \\ \vdots \\ \beta_M(\boldsymbol{a'}) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{C.9}$$

と変形される. 行うべきことは

任意の $\boldsymbol{a'}$ を設定し (C.9) から $\hat{\boldsymbol{a}}$ を LU 分解[1]で導く.
$\hat{\boldsymbol{a}} \simeq \boldsymbol{a'}$ なら Self Consistency な結果を与え, $\hat{\boldsymbol{a}}$ は確かに χ^2 を最小化する.
$\hat{\boldsymbol{a}} \not\simeq \boldsymbol{a'}$ なら導かれた $\hat{\boldsymbol{a}}$ は意味の無い数となる.

を考慮すると

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a'}$;
while($\boldsymbol{\delta a} >$ 判定値){

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \alpha_{1M}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{M1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \alpha_{MM}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a_1 \\ \vdots \\ \delta a_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \beta_M(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix};$$

LU 分解;
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\delta a}$;
}
$\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}$;

というアルゴリズムになる. これが逆 Hesse 行列法と呼ばれているものの要約である. その特徴を以下にまとめておく.

[1]連立 1 次方程式を解くための標準的方法

- 逐次計算であるが解に近づいているわけではない.
- Loop を有限回で抜け出せるとは限らない.
- 抜け出せたら必ず $\boldsymbol{a}$ は $\hat{\boldsymbol{a}}$ を与える.
- 最適化 parameter が予想されている, すなわち χ^2 の谷底近傍で強力.

近似的ではあるが解析的解法を要とする逆 Hesse 行列法とは違い, χ^2 の谷を決まった Step 幅 $\boldsymbol{\epsilon}(>0)$ で小さくなる方向, つまり勾配と逆方向に移動させていく方法も存在する. それは最急降下法と呼ばれ

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a'}$;
while($\boldsymbol{\delta a} >$ 判定値){
$$\begin{pmatrix} \delta a_1 \\ \vdots \\ \delta a_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \beta_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \epsilon_M \beta_M(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix};$$
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\delta a}$;
}
$\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}$;

という比較的単純なアルゴリズムに要約されている. この特徴は

- $\boldsymbol{\epsilon}$:大なら $\hat{\boldsymbol{a}}$ に急接近できるが, Setp よりも小さい谷に侵入できないため Just Meet は困難.
- $\boldsymbol{\epsilon}$:小なら Just Meet は可能であるが接近に時間がかかる.

で与えられ, ちょうど逆 Hesse 行列法の特徴と背反していることが判る.

C.2 Levenberg-Marquardt Method

前節で見てきたように, 逆 Hesse 行列法と最急降下法の特徴は正反対なもので, これを組み合わせることによって強力な業が手に入ることが期待される. ここでは"谷底近傍に急接近し一撃にて止める方法", すなわち Levenberg-Marquardt 法を解説する. まず最急降下法のアルゴリズムの中にある

$$\begin{pmatrix} \delta a_1 \\ \vdots \\ \delta a_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \beta_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \epsilon_M \beta_M(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \tag{C.10}$$

を書き直すことから始めよう. 目標は, 逆 Hesse 行列法のアルゴリズムの中にある

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \alpha_{1M}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{M1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \alpha_{MM}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a_1 \\ \vdots \\ \delta a_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \beta_M(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \tag{C.11}$$

に近づけることにある. 具体的には (C.10) を

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\epsilon_M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a_1 \\ \vdots \\ \delta a_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \beta_M(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \tag{C.12}$$

と変形する. 次に, この方法の要である

$$\frac{1}{\epsilon_n} \propto \alpha_{nn} \tag{C.13}$$

つまり

$$\frac{1}{\epsilon_n} = \lambda \alpha_{nn} \tag{C.14}$$

という関係式について説明する.

Step 幅 ϵ について考えよう. この大きさの目安は何によって定まるのであろうか. 勾配からは何の情報も得られない. 与えるのは傾きであって, その坂がどこまで続くかはわからないからである. そこで既に手の内にある量で, 次元が等しいものを考えていよう. すると $\frac{1}{\alpha_{nn}}$ 以外は存在しないことが容易に確認される. これでは大きすぎるかも知れないので比例係数 λ を置き, 等号で結んだ. 特記すべきは, Step 幅が 1 つの parameter で記述されたことである.

新しい記号 $\gamma_{mn}(\boldsymbol{a}) \equiv \alpha_{mn}(\boldsymbol{a})(1+\delta_{mn}\lambda)$ を導入して

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \gamma_{1M}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{M1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \gamma_{MM}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a_1 \\ \vdots \\ \delta a_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \beta_M(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \tag{C.15}$$

を考えると

$$(C.15) \Longrightarrow \begin{cases} (C.11) & \text{逆 Hesse 行列法} \quad \lambda : \text{小} \\ (C.12) & \text{最急降下法} \quad \lambda : \text{大} \end{cases} \tag{C.16}$$

という論理が成立し, (C.15) は (C.11) と (C.12) を滑らかに Joint することが理解される. 一般に推奨される処方は, 初期値 $\boldsymbol{a}$ が与えられたとき

- $\chi^2(\boldsymbol{a})$ を計算する.
- λ を適当な値に置く. 例えば $\lambda = 0.001$ とする.
- (†) 連立方程式 (C.15) を解いて $\boldsymbol{\delta a}$ を求め, $\chi^2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\delta a})$ を計算する.
- もし $\chi^2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\delta a}) \geq \chi^2(\boldsymbol{a})$ ならば, λ を例えば 10 倍し, (†) に戻る.
- もし $\chi^2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\delta a}) < \chi^2(\boldsymbol{a})$ ならば, λ を例えば $\frac{1}{10}$ 倍し, 試行解を $\boldsymbol{a} \leftarrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{\delta a}$ に変更し, (†) に戻る.

である. 例によって C 言語風に書くと

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a'}$;
$\lambda = 0.001$;
while($\chi^2(\boldsymbol{a}) >$ 判定値){
　　$\begin{pmatrix} \gamma_{11}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \gamma_{1M}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{M1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \gamma_{MM}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a_1 \\ \vdots \\ \delta a_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \beta_M(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$;
　　LU 分解;
　　if($\chi^2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\delta a}) \geq \chi^2(\boldsymbol{a})$){
　　　　$\lambda = 10 * \lambda$;
　　}
　　else{
　　　　$\lambda = \frac{1}{10} * \lambda$;
　　　　$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\delta a}$;
　　}
}
$\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}$;

となる. このアルゴリズムに従い, PHS を求めた.

Appendix D

ジオメトリーによるポジトロニウム生成率の変化

この節ではキャビティー内のジオメトリーを表すのに (x,y,z) 座標と (r,θ ,z) 座標を用いるが、座標軸の設定は図 D.1 による。また座標の単位として cm(センチメートル) を用い、エネルギーの単位は基本的に MeV を、磁場の単位は gauss を用い、単位系により $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ を単に e^2 と書く。また、この節で用いる文字を以下に整理しておく。

電子 (陽電子) の質量	$m_0 = 0.5110\ (\mathrm{MeV}/c^2)$
陽電子の運動エネルギー	$E\ (\mathrm{MeV})$
	$\gamma = (E + m_0c^2)/m_0c^2$
	$\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$
磁場の値	$B(\mathrm{gauss})$
微細構造定数	$\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137$
電子の古典半径の自乗	$r_0^2 = (e^2/m_0c^2)^2 = 7.9402 \times 10^{-2}b$
バーン (面積の単位)	$1b = 10^{-24}cm^2$
原子番号	$Z = 13(\mathrm{Al}),\quad 18(\mathrm{Ar})$
原子量	$A = 26.98(\mathrm{Al}),\quad 39.94(\mathrm{Ar})$
密度	$\rho = 2.702\mathrm{gcm}^{-3}(\mathrm{Al}),\quad 1.849 \times 10^{-3}\mathrm{gcm}^{-3}(\mathrm{Ar}\ \ 1\mathrm{atm}, 10°C)$
アボガドロ定数	$N_0 = 6.022 \times 10^{23}$
陽電子の位置	$(x_p, y_p, z_p) = (r_p\cos\phi_p, r_p\sin\phi_p, z_p)$
陽電子の運動量	$\boldsymbol{p} = p(\sin\theta_m\cos\phi_m, \sin\theta_m\sin\phi_m, \cos\theta_m)$
らせん運動の半径	$r\ (\mathrm{cm})$

この節での目的は Na22 からでた陽電子の軌跡をトレースすることによって、実際に NaI ペアで観測される割合が静磁場にどのように依存するかをシミュレーションで考察する。陽電子をトレースするには準備として以下のことを考えねばならない。

1. Al 中での散乱、及び減速
2. Ar 中での散乱、及び減速

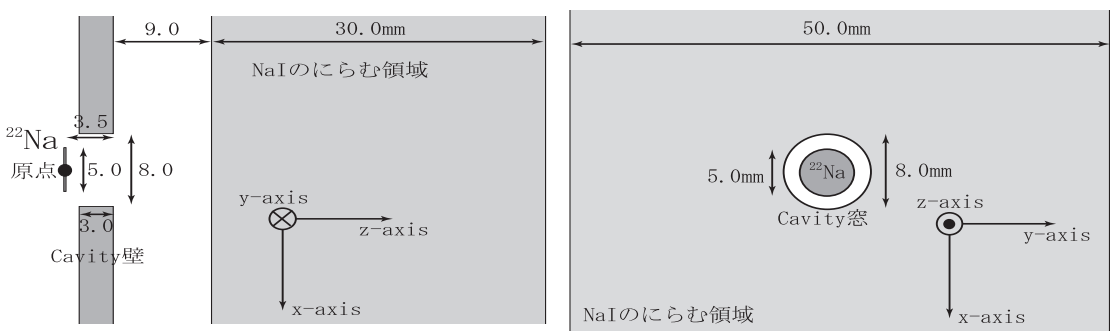


Figure D.1: 座標の設定

3. 散乱はクーロン多重散乱であるため、統計的に扱う
4. 陽電子の静磁場中での運動
5. NaI ペアのにらむ領域でポジトロニウムが 2 ガンマ崩壊した時、ガンマ線が観測される確率

以上のことを考慮して、ソースから陽電子のエネルギー運動量をランダムに打ち出して、微小距離進むたび散乱、減速、微小らせん運動を繰り返し、止まるまで追跡する。原則的にはこの方針でいくのだが、シミュレーションを効率よくするため、次の方法をとる。

1. キャビティーのソース側壁面 (z=0.35) でのベータ線の flux を、シミュレーションにより r (中心からの距離) の関数として求める。
2. NaI のにらむ領域で止まる陽子はキャビティー壁面 (z=0.35) で 100keV 程度であり、そのエネルギー帯での flux は $r < 0.4$ に集中している。つまりキャビティー壁内でベータ線が十分に止まっていることを確認する。
3. したがって、陽子の運動は Ar 中のみを考えればよく、シミュレーションで射出する陽子の最大エネルギーは高々 200keV 程度でよいので、シミュレーションの効率がよくなる。

D.1 Ar,Al 中での散乱断面積

物質中で陽電子は原子核による散乱 (Rutherford 散乱) と、軌道電子による散乱 (Bhabha 散乱) によって運動の方向が変わる。本来ならエネルギー損失も散乱角に依存するので、断面積と阻止能は同時に考えなければならないのだが、ここでは簡単のため別々に考える。

D.1.1 Rutherford 散乱

量子力学的計算にとると原子核による散乱断面積 $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ruth}$ は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ruth} = \xi(\theta) R(\beta, Z, \theta) \tag{D.1}$$

$$\tag{D.2}$$

で与えられ、ξ は古典的な rutherford 散乱断面積で

$$\xi(\theta) = \frac{Z^2}{4}\left(\frac{e^2}{m_0 c^2}\right)^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^4} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \tag{D.3}$$

$$\tag{D.4}$$

と書け、また R は $Z < 28$ のとき近似的に

$$R(\beta, Z, \theta) \simeq 1 - \beta^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + \pi\beta\alpha Z(1 - \sin\frac{\theta}{2})\sin\frac{\theta}{2} \tag{D.5}$$

と書ける。

D.1.2 bhabha 散乱断面積

bhabha 散乱は場の理論で次のように記述される。

$$\frac{d\sigma}{d\lambda_1} = 2\pi r_0^2 \frac{\gamma^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+\lambda_1\lambda_2(2\gamma-1+\lambda_1\lambda_2)}{\lambda_1^2\lambda_2^3(\lambda_2-2)} \tag{D.6}$$

$$\lambda_1 \equiv -(p'-p)^2/2m^2 = -1 + pp'/m^2 \tag{D.7}$$

$$\lambda_2 \equiv (q'-p)^2/2m^2 = 1 - pq'/m^2 \tag{D.8}$$

ここで、p、p' は電子の、$-q'$、$-q$ は陽電子の 4 元運動量である。(図 D.3 参照) 上の式を実験室系で計算する。陽電子のエネルギー (数 10KeV ~ 12MeV) に比べ、軌道電子のエネルギー (数 eV ~ 数 10eV) は十分に小さいので実験室系で電子

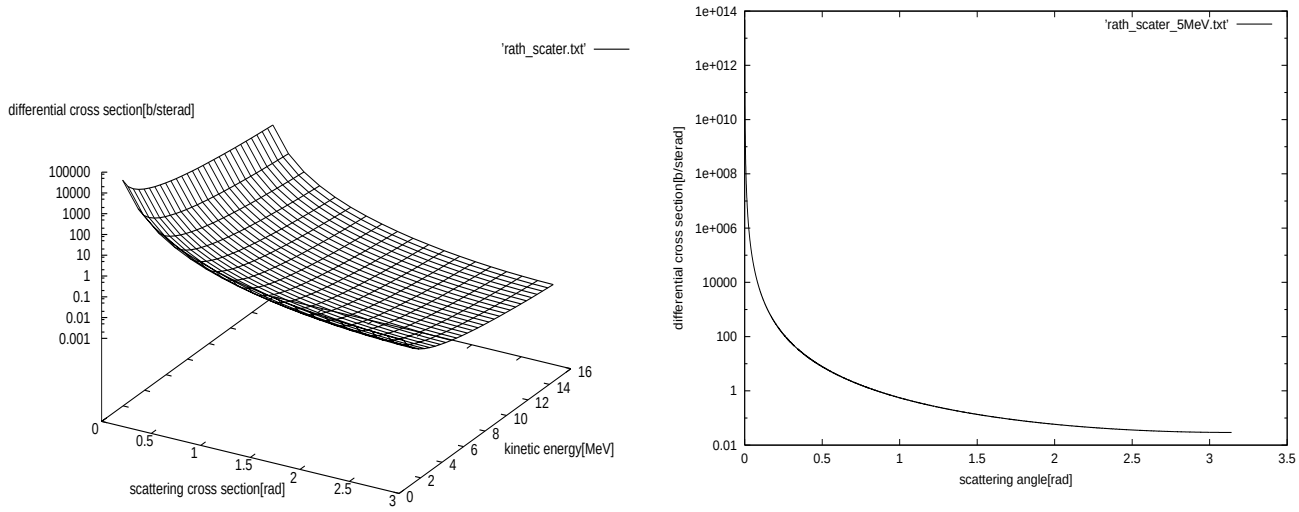


Figure D.2: ラザフォード散乱断面積の計算値 (左は 16MeV までの断面積を、右は 5MeV のときの断面積をそれぞれ散乱角 θ の値で見たもの)

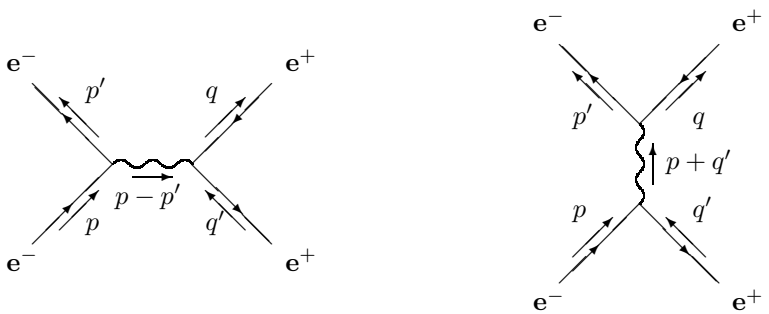


Figure D.3: bhabha 散乱

は静止しているとする。入射陽電子のエネルギーを γ, 散乱陽電子のエネルギーを γ', 散乱角を θ, 反跳電子のエネルギーを γ'', 反跳角を ϕ とすると、電子と陽電子の散乱方向で張る平面内の運動で、

$$\begin{aligned} q' &= mc(-\gamma, -\beta\gamma, 0) \\ p &= mc(1, 0, 0) \\ q &= mc(-\gamma', -\beta'\gamma' \cos\theta, -\beta'\gamma' \sin\theta) \\ p' &= mc(\gamma'', \beta''\gamma'' \cos\phi, \beta''\gamma'' \sin\phi) \end{aligned}$$

と表せる。エネルギー運動量保存 $p - q' = p' - q$ より γ, γ', ϕ について解くと、

$$\begin{aligned} \gamma' &= \frac{(1+\gamma)^2 + (\gamma^2-1)\cos^2\theta}{(1+\gamma)^2 - (\gamma^2-1)\cos^2\theta} \\ \gamma'' &= 1 + \gamma - \gamma' \\ \cos\phi &= \frac{\beta\gamma - \beta'\gamma'\cos\theta}{\beta''\gamma''} \end{aligned}$$

となる。また、このとき λ_1, λ_2 は、

$$\lambda_1 = \gamma'' - 1 \tag{D.9}$$

$$\lambda_2 = \gamma + 1 \tag{D.10}$$

となる。このとき、bahbah 散乱断面積 $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{bha}$ は、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{bha} = \frac{d\sigma}{d\lambda_1}\frac{d\lambda_1}{d\theta}\frac{d\theta}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\lambda_1}\frac{2(1+\gamma)^2\cos\theta}{\pi((1+\gamma)^2-(\gamma^2+1)\cos^2\theta)^2} \tag{D.11}$$

となる。ただしこの式は $\theta < \pi/2$ でしか定義できないが、$\theta > \pi/2$ で、$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{bha} = 0$ である。

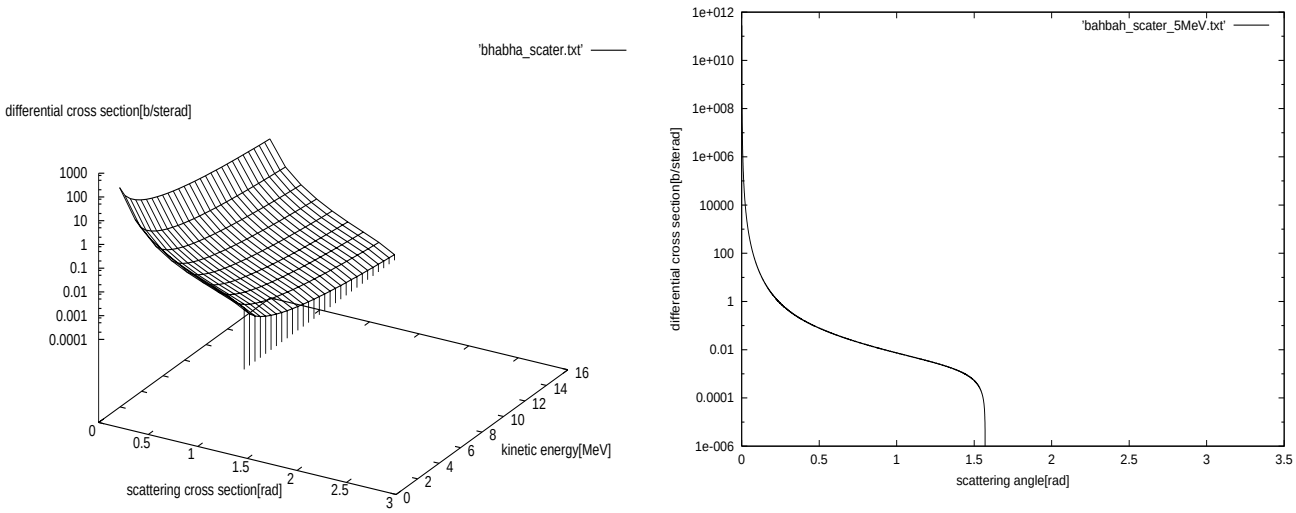


Figure D.4: バーバ散乱断面積 (左は 16MeV までの断面積を、右は 5MeV のときの断面積をそれぞれ散乱角 θ の値で見たもの)

D.2 多重散乱

陽電子が物質中を走るとき前節の散乱の理論により何度も散乱されることになる。この節では多重散乱を統計的に扱う時どうなるかを考察する。微小距離 d 走って多数回の散乱をした後での偏向角を Θ とおくと、偏向角が小さい場合に Θ の分布は $\Theta = 0$ のまわりにガウス分布となる。

$$P(\Theta)d\Theta = (\text{規格化定数}) \times e^{-\Theta^2/\overline{\Theta^2}}d\Theta \tag{D.12}$$

ここで $\overline{\Theta^2}$ は分散にあたる量で、

$$\overline{\Theta^2} = 2\pi\left(\frac{N_0\rho d}{A}\right)\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}}\theta^2\left(\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ruth} + Z\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{bha}\right)\sin\theta d\theta \tag{D.13}$$

と書ける。$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ruth}$ は式 D.1 ~ D.5 で与えられ、$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{bha}$ は式 D.6 ~ D.11 で与えらる。
d は、単一散乱する距離より十分大きく、また、距離 d 走っている間は運動エネルギー E がほぼ一定である必要がある。すなわち、

$$1/\sigma N \ll d \ll E/(dE/dx) \tag{D.14}$$

$$\sigma = 2\pi\int_{\theta_{min}}^{\pi}\left(\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ruth} + Z\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{bha}\right)\sin\theta d\theta$$
$$N = N_0\rho/A$$

を満たす必要がある。θ_{min} はクーロン遮蔽により、θ_{max} は原子核の密度により、近似的に有効な散乱角の最小値と最大を与える。

$$\theta_{min} = \left(\frac{\hbar}{p}\right) / \left(a_0 Z^{-1/3}\right)$$

$$\begin{aligned}\theta_{max} &= \sqrt{\frac{4\pi(N_0\rho d/A)Z^2e^4}{p^2\beta^2c^2}} \\ p &= \beta\gamma mc \\ a_0 &= \hbar^2/m_0c^2 \ \text{(Bohr 半径)}\end{aligned}$$

以上より式 D.13 を計算するわけだが、被積分関数は解析的には積分できない。そこで数値的に (区分求積) 求めるのだが、シミュレーションで、微小距離進むごとに区分求積をしていたのでは計算効率が悪いので、積分を近似することにする。式 D.14 により $d = 0.01cm(Al), 1cm(Ar)$ とおくと、Al,Ar 中ともに、

$$\theta_{min} \ll \theta_{max} \lesssim 10^{-2}rad$$

であるから、$\cos\theta \simeq 1-\theta^2/2$、$\sin\theta \simeq \theta$、$R \simeq 1$ とできて、式 D.1,D.6 の散乱断面積は簡単になって、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ruth} \simeq Z\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{bha} \simeq \frac{Z^2r_0^2(1-\beta^2)}{4\beta^4(\theta/2)^4}$$

とできる。実際ラザフォード散乱断面積とバーバ散乱断面積の比が Z となることが、図 D.5 から分かる。しただって、式 D.13 は積分できて、

$$\overline{\Theta^2} = 4\pi Z(Z+1)\frac{N_0\rho d r_0^2(1-\beta^2)}{A\beta^4}\log\left(4\pi Z^{4/3}\left(\frac{N_0\rho d}{A}\right)\left(\frac{\hbar}{m_0c\beta}\right)\right) \tag{D.15}$$

となる。

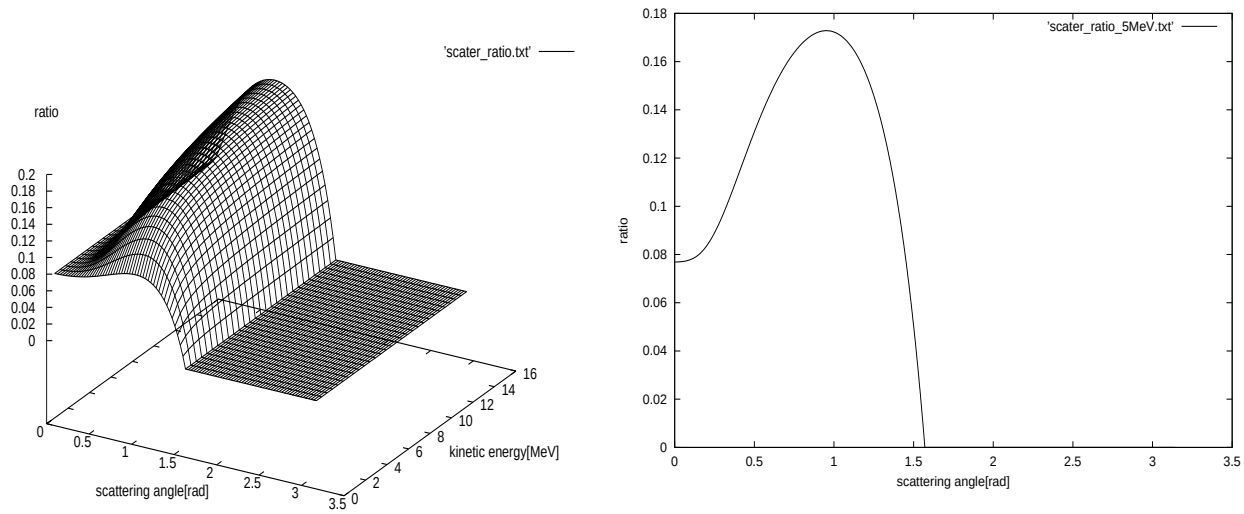


Figure D.5: Al(Z=13) における (bhabha 散乱断面積)/(ruthford 散乱断面積)、E=0 で 1/Z

D.3 陽電子のエネルギー損失

D.3.1 電離及び励起によるエネルギー損失

原子核との弾性散乱の計算により Bethe-Bloch の式が導かれる。

$$\begin{aligned}\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{col} &= \frac{2Cm_0c^2}{\beta^2}\left(\log\frac{(\gamma^2-1)m_0c^2E}{I^2} - \beta^2\right) \\ C &= \pi r_0^2\frac{N_0}{A}\rho Z\end{aligned} \tag{D.16}$$

ここで、I は平均励起ポテンシャルで、実験値から

$$\frac{I}{Z} \simeq \begin{cases} 12 + \frac{7}{Z}\ eV & Z < 13 \text{ のとき} \\ 9.76 + 58.8Z^{-1.19}\ eV & Z \geq 13 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。Bethe-Blch の式を導くのに散乱の反跳エネルギーで積分するが、反跳エネルギーは散乱角 θ の関数であるから、式 D.16 は $theta$ の情報は失われている。前節でも述べたが、散乱角と阻止能を別々に扱うため、すでに θ で積分されている、式 D.16 を用いる。

D.3.2 分極効果

陽電子が物質中を走るとき、陽電子によって原始が分極するため、理想的なクーロン場より小さくなり阻止能も減少する。この効果はこの章で考察する陽電子のエネルギー程度ではほとんど効かないのだが、いちおう補正項として加えることにする。この減少を分極効果と呼び、減少量を

$$\Delta_{pol} = -\frac{2Cm_0c^2}{\beta}\delta$$

とすると、δ は Sternheimer によると、$X = \log_{10}\beta\gamma$ として、

$$\delta = \begin{cases} 0 & (X < X_0) \\ 4.6052X + K + a(X_1 - X)^m & (X_0 < X < X_1) \\ 4.6502x + K & (X > X_1) \end{cases}$$

と表せる。ここで、X_0, X_1, a, K, m は物質に依存する定数で、Ar では、$X_0 = 2(E = 100MeV)$ なので $\delta = 0$。Al では、$X_0 = 0.05(E = 250KeV), X_1 = 3, K = -4.21, a = 0.0906, m = 3.51$ である。

D.3.3 制動放射によるエネルギー損失

陽電子は散乱における加速度運動の制動放射によってエネルギーをおとす。Bethe-Heitler によると、

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = \frac{N_0\rho\gamma m_0c^2}{A}\sigma_{rad} \tag{D.17}$$

$$\sigma_{rad} = \begin{cases} \frac{16}{3}Z(Z+1)\sigma_0 & \left(E \ll m_0c^2\right) \\ 4\left(\log(2\gamma) - \frac{1}{3}\right)Z(Z+1)\sigma_0 & \left(m_0c^2 \ll E \ll 137m_0c^2Z^{-1/3}\right) \\ 4\left(\log(183Z^{-1/3}) + \frac{1}{18}\right)Z(Z+\zeta)\sigma_0 & \left(137m_0c^2Z^{-1/3} \ll E\right) \end{cases} \tag{D.18}$$

$$\sigma_0 = \alpha r_0^2 = 0.5794\ mb \tag{D.19}$$

と書ける。今考えている陽電子のエネルギーでは式 D.18 の 3 番目のエネルギー領域には入らないので ζ の値は気にしなくてよい。

D.3.4 その他のエネルギー損失

この他に陽電子のエネルギー損失として、チェレンコフ光の放射、静磁場による制動放射があるが、いずれも無視できる。(チェレンコフ光でおよそ 3 桁、静磁場の制動放射ではそれ以下である。)

D.3.5 陽電子の平均走行距離

以上より、陽電子の阻止のは、

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right) = \left(-\frac{dE}{dx}\right)_{col} - \Delta_{pol} + \left(-\frac{dE}{dx}\right)_{rad}$$

で与えられ、陽電子の平均走行距離はこれを積分すればよい。

$$L(E) = \int_{E_1}^{E}\left(\frac{dE}{dx}\right)^{-1}dE + L_1$$

ただし、Bethe の式は Born 近似をしているため低エネルギーでは近似がよくなく、およそ近似が成り立つ最低エネルギー E_1 からの積分をする。E_1, L_1 の値として、

$$E_1 = 0.01\text{MeV}$$

$$L_1 = \begin{cases} 0.162\text{ cm} & (\text{Ar}) \\ 1.11 \times 10^{-4}\text{ cm} & (\text{Al}) \end{cases}$$

とする。

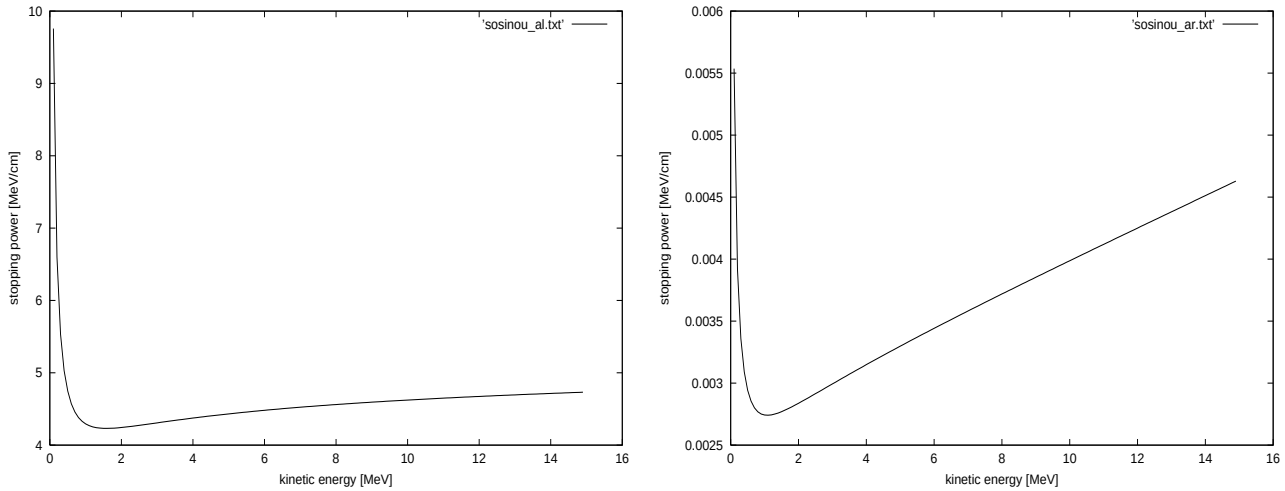


Figure D.6: 阻止能 (左がアルミニウムの阻止能、右がアルゴンの阻止能)

D.4 陽電子の磁場中の運動

陽電子は磁場中でらせん運動する (厳密には、エネルギー損失、及び散乱によりらせん半径が刻一刻と変化するのでらせん運動ではない)。らせん運動の軌跡は Δd =0.01cm おきに追跡し、微小距離 d 進むごとに散乱のシミュレーションを行う。(d =0.01cm(Al)、d =1cm(Ar)) らせん運動の半径は

$$r \quad = \frac{p \sin\theta_m}{eB} = \frac{\beta\gamma \sin\theta_m}{B} \times 1704.5 \text{ cm}$$

で、微小らせん運動の回転角 $\Delta\phi$ は、$B < 6000$、$\beta\gamma \gtrsim 0.3$ より、

$$\Delta\phi = \frac{\Delta d \sin\theta_m}{r} = \frac{\Delta d B}{\beta\gamma} \times 5.868 \times 10^{-4} < 0.1 \text{ rad}$$

また、らせん運動の中心座標 O_x, O_y は、

$$\begin{aligned} O_x &= x_p - r\sin\theta_m \cos\phi_m \\ O_y &= y_p + r\sin\theta_m \sin\phi_m \end{aligned}$$

より、微小らせん運動後の陽電子の座標 x'_p, y'_p, z'_p、運動方向 θ'_m, ϕ'_m は、

$$\begin{aligned} x'_p &= O_x + (x_p - O_x)\cos\Delta\phi - (y_p - O_y)\sin\Delta\phi \\ y'_p &= O_y + (x_p - O_x)\sin\Delta\phi + (y_p - O_y)\cos\Delta\phi \\ z'_p &= z_p + \Delta d \cos\theta_m \\ \theta'_m &= \theta_m \\ \phi'_m &= \phi_m + \Delta\phi \end{aligned}$$

となる。さらに散乱によって運動量の方向が変わる場合を考える。
図 D.7 のように運動量 $\boldsymbol{p}'$ が pole となる極座標系で $\theta_{rand}, \phi_{rand}$ の散乱を行う。ただし図中の $\hat{p'_{xy}}$ は $\hat{p'}$ を xy 平面への射影した方向である。ただし ϕ_{rand} は、原点を通り $\boldsymbol{p}'$ と z 軸で張る平面からの角度である。θ_{rand} は式 D.12 より、平均が 0 で偏差が $\sqrt{\overline{\theta^2}}$ であるガウス分布となる乱数で与える。ϕ_{rand} は $0 \sim 2\pi$ の乱数を与える。このとき、散乱後の運動量方向を $\hat{\boldsymbol{p}''} = (\hat{p''_x}, \hat{p''_y}, \hat{p''_z}) = (\sin\theta''_m \cos\phi''_m, \sin\theta''_m \sin\phi''_m, \cos\theta''_m)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \hat{p''_x} &= \cos\theta'_m \cos\phi'_m \sin\theta_{rand} \cos\phi_{rand} - \sin\phi'_m \sin\theta_{rand} \sin\phi_{rand} + \sin\theta'_m \cos\phi'_m \cos\theta_{rand} \\ \hat{p''_y} &= \cos\theta'_m \sin\phi'_m \sin\theta_{rand} \cos\phi_{rand} + \cos\phi'_m \sin\theta_{rand} \sin\phi_{rand} + \sin\theta'_m \sin\phi'_m \cos\theta_{rand} \\ \hat{p''_z} &= -\sin\theta'_m \sin\theta_{rand} \cos\phi_{rand} + \cos\theta'_m \cos\theta_{rand} \\ \theta'' &= \cos^{-1}\hat{p''_z} \\ \phi'' &= \tan^{-1}(\hat{p''_y}/\hat{p''_x}) \end{aligned}$$

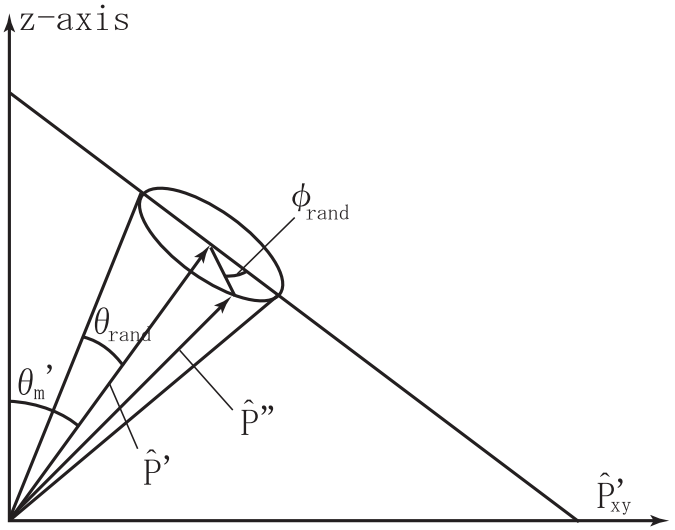


Figure D.7: 散乱による運動方向の変化

と書ける。微小らせん運動後のエネルギー E' は、

$$E' = E - \frac{dE}{dx}(E)\Delta d$$

で与えられる。

D.5 2γ 崩壊した時 NaI ペアで観測される確率

NaI のにらむ領域で止まった陽電子がポジトロニウムをつくり back to back で 2γ 崩壊した時、NaI で γ 線のエネルギー 511KeV すべて落とす確率は、陽電子の止まった位置に依存する。511KeV のエネルギーを落とすには NaI を 10cm 走る必要がある。その分も含め、キャビティーの中心から NaI は 45cm 離れていると考えて、2γ が観測される確率は、陽電子の止まった位置から両側の NaI をのぞむ立体角に比例するので、シミュレーションでカウントする時はこの補正を入れる。

D.6 生成率を求めるシミュレーション

いよいよシミュレーションを走るわけだが、次のように行う。

1. ソース $(z = 0, r < 0.25)$ からランダムに陽電子の射出ポイントを選ぶ。これは 22Na が、$z = 0, r < 0.25$ で一様分布していると仮定しているが、仮に $z = 0, r = 0$ でデルタ関数的に分布しているとして、射出ポイントをすべて原点にしても、結果はそんなには変化しない。ここでは前者の方法で射出ポイントをランダムに選ぶ。
2. 射出時のエネルギーは確率分布が図 D.8 のようになる乱数で与える。
3. 射出時の運動の方向は、単位立体角あたりのとりうる確率が一定である方向をランダムに選ぶ。すなわち、θ_m は確率分布が $\sin\theta(0 < \theta < \pi/2)$ となる乱数を、ϕ_m は $0 < \phi < 2\pi$ の乱数を与える。
4. 陽電子の追跡は D.4 節の方法で行う。
5. $z > 0.35$ でかつキャビティーの境界に達するか、$z < 0$ になるか、エネルギーが 10KeV 以下になるまで走る。

この章の冒頭でも述べたが、この方法ではほとんどのエネルギー帯で NaI のにらむ領域をはずしてしまうので、シミュレーションの効率が悪い。この方法で走ったとき、キャビティー壁面 $(z = 0.35)$ でのエネルギーフラックスを図 D.9 に、また、NaI のにらむ領域で止まった陽電子のうち射出時のエネルギーを図 D.10 にヒストグラムで示す。これから、陽電子はキャビティーの壁で十分止まるため、NaI のにらむ領域で止まるものは射出時のエネルギーが 200KeV 以下で、壁にあたらずアルゴン中のみを運動してきたものである。すなわち、高エネルギー (200KeV 以上) で打ち出されて、キャビティー壁内でエネルギーを 100KeV 程度まで落とし、再びキャビティー内のアルゴンを走って NaI のにらむ領域で止まるものはほとんどいないということである。

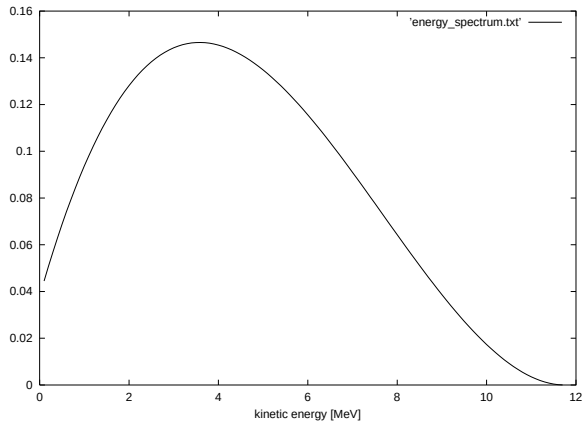


Figure D.8: Na22 から出てくる陽電子のエネルギースペクトル

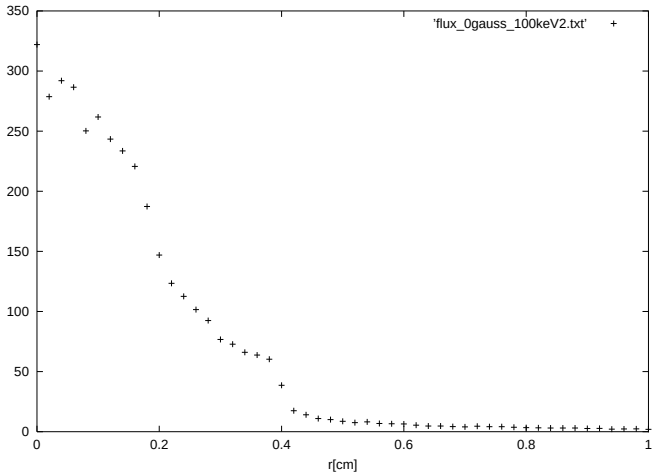


Figure D.9: キャビティー壁面 (z=0.35) を通過する陽電子のうち 100KeV のエネルギーを持つものの単位面積単位エネルギーあたりの flux 密度 [$\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{MeV}^{-1}$]、横軸は中心からの距離 [cm]

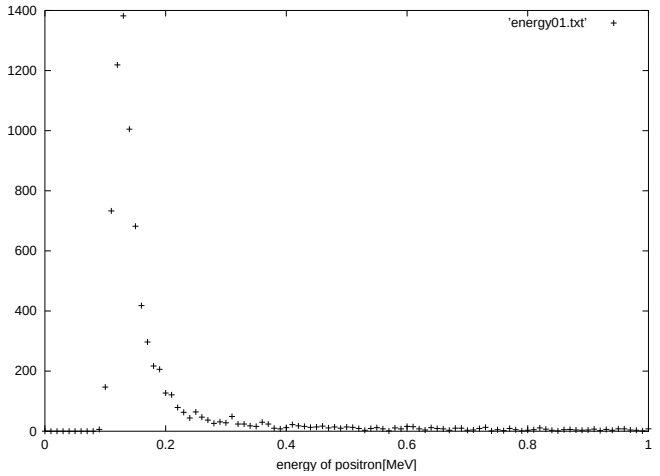


Figure D.10: NaI のにらむ領域で止まった陽電子の射出時のエネルギーの Histogram

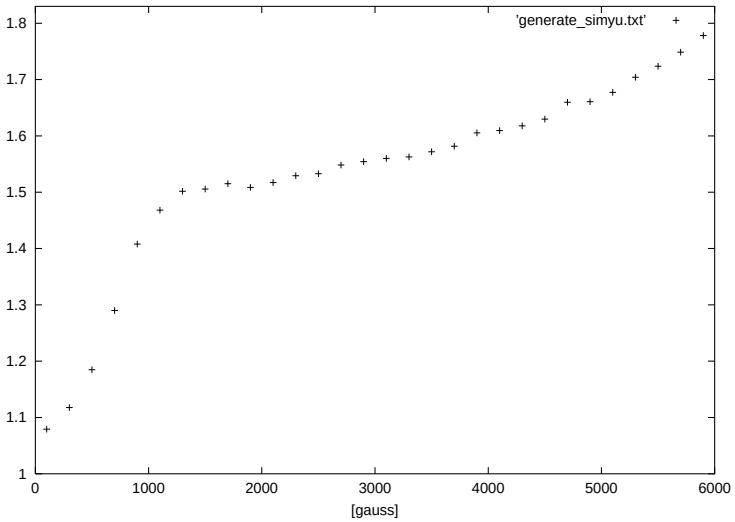


Figure D.11: シミュレーションによるポジトロニウムの生成率

したがって、射出するエネルギーは 200KeV までとして、キャビティーの壁にあたったら止まることにする。図 D.11 はそれぞれの磁場につき 10^6 回陽電子を打ち出したシミュレーションの結果である。ただし、カウント数は 2000gauss で 1.5 となるように規格化してある。これは実験値から計算した生成率とよく一致する。

Bibliography

[1] 中西襄著『新物理学シリーズ 19 場の量子論』(培風館, 1975)

補助 Scalar 場を導入した QED. Coulomb Gauge での量子化に伴う不自然さを見事に克服している.

[2] 九後汰一郎著『新物理学シリーズ 23 ゲージ場の量子論 1』(培風館, 1989)

ひたすら難しい. Gauge 理論として統一的に Gauge 場 (特に QCD) の量子化を行いたいので, 現在学習中. Interaction のカタチが一意的に決まったり, 場の量が Lorentz 群の表現空間の元であったり, とにかく刺激的な本.

[3] Landau, Lifshiz 著『相対論的量子力学 1, 2』(東京図書, 1969)

上の 2 冊とは趣が異なり, 場の理論で様々な物理量を導出してみようという趣味. こういう本は好きだ. Hyperfine Structure はこれを参考に算出した.

[4] Peskin, Schroeder 著『An Introduction to Quantum Field Theory』

院生になってから読み始めた本. この本で繰り込み中. 紫外発散を確認した最初の例として Landé g-factor を導出し, 納得した. 時間の都合で提示を断念.

[5] T.D.Lee 著『Particle Physics and Introduction to Field Theory』

P2 において伝統的に読み込む本. 記号がおかしいものの短期間で具体的な物理量の計算に入れるので, お得感が強い. また QED の CPT 不変を定量的に表し, 選択則 ($^1S_0$ は 2γ, $^3S_1$ は 3γ の放出を伴って対消滅) に証明が与えてあることも特徴である.

[6] M.Deutsch: Progr.Nucl.Phys. *3*, 131(1953)

NO5%でなんと 3γ が 2γ に。という事らしい。夢のような話でにわかに信じがたい。

[7] 阿部英太郎著『マイクロ波技術』物理工学実験 11 (東京大学出版会, 1975)

マイクロ波はこれで学ぶ。あと経験、というか試行錯誤。

[8] W.H.Press, B.P.Flannery, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling 著『Numerical Recipes in C』(技術評論社, 1993)

鮮やかな印象を残す本. それは表紙に留まらず, 中身にも及ぶ. 機会に恵まれれば実行してみたくなる Simulation の本質が満載.

[9] 2000 年度 HFS[1] 班著『Positronium Hyperfine Structure』(卒業研究 P2, 2000)

Chapter2 の基本的 Idea は正にこの Report の仕事. この卒業研究におけるバイブルと言っても良いほどだ.

[10] 1999 年度 P2 Positronium Group 著『Hyperfine Structure of Positronium in its Ground State』(卒業研究 P2, 1999)

[11] 1999 年度 P2 Positronium Group 著『Hyperfine Structure of Positronium in its Ground State -Technical Reports』(卒業研究 P2, 1999)

Microwave system の理解にはこの technical report が重要な役割を果たした。

[12] 山崎文男著『実験物理学講座 26 放射線』(共立出版, 1973)

我らの隊長 hunk の Simulation のデータベース. 詳しい説明を聞く前に, 彼は次なる任務に就いてしまった.

[1] Hyperfine Structure の略. 実はこれが学術的に正しい. しかし我々は$\dot{\mathrm{P}}\dot{\mathrm{H}}\dot{\mathrm{S}}$ と呼んだ.

Members Memo and End Title

hunk

桜の花が散る頃、我々の実験も散っていた … 。それからいかほどの苦悩があったことだろう。まあ、それでもあの危険極まりないあの部屋で (おっとっと！) 、無事実験を成し遂げられたことを感謝すべきでしょう。数知れぬトラブルの原因は、おおむね我々の知識と技術と経験の乏しさがトリガーであったが、あらゆるトラブルが干渉しあって事故に向かっていった原因はどちらかというと実験そのものの性質、否、実験者４人の性格に強くひきつけられたようである。一言で言えば、好奇心という名の悪魔は時に科学を妨げる、といった感じでしょうか。事情を知らない人は何のことを言っているのかさっぱり分からないでしょうが、道具の使い方は深く学ばせていただきました。最後に我々の実験において多くの人に迷惑をかけてしまって大変申し訳なく思います。ただ、我らが代表Ｍ氏が少なくとも 2 年間は贖罪してくれるはずですから、この実験は全体としてうまくいったといっておこう。

Sub

その日、人類は“ 火 ” を手にした。それを手にした人物の瞳は怪しく輝き、何かに憑依されたかの様にその“ 作業 ” に集中していた。後に、その結果の恐ろしさを実感するとも知らずに … 。

この事件に限らず、色々とトラブルはあったのだが、苦労話はやめにしよう。数多くの方々の支えのおかげでようやくレポート提出まで漕ぎつける事ができました。ここに、心から感謝の意を表します。特に、実験終了直前とレポート完成直前には実験メンバーに多大な迷惑を掛けてしまいました。ごめんなさい、そしてありがとう。最後に、この実験で得た教訓を。

“ 失敗の大きさに比例して人は成長する。失敗が大きすぎなければの話だが。”

tmura

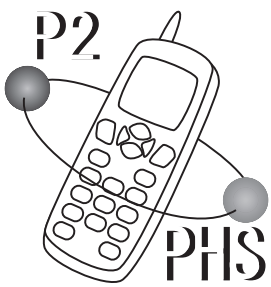
ことの始まりは年の暮れ, 師走の喧騒の中.
我々の関心は μ 粒子にあり, 情熱の向かう先は Count Rate の見積もり.
滑稽な現実.
暫しの流転.
たどり着くは「黒船」, これに乗る.

とんでもないポンコツでした.

以下 Homepage より抜粋.

- RELS.C
  Resonant Line Shaper の略. 2 光子性対消滅の静磁場依存性を Plot する. この Simulation により, 測定すべき静磁場の値がおおよそ 5750Gauss と判明した. しかしながら実験終了間際になって Programing Miss の可能性が発現. 結局それは未遂に終わったが, 2ヶ月間意味のない領域を測定していたかもしれないという想像に下呂を吐きかけた Golden Week は記憶に新しい.
- RELS3G.C
  Resonant Line Shaper for 3gamma の略. S Wave かつ Spin Triplet の Positronium は 3 光子性の対消滅をする. これの測定は Detector の都合上困難であるため, この Simulation を行う必然はない. それにも拘らず決行したのは, rels.c の結果と足し合わせて静磁場依存がなくなるかどうかに対して個人的に関心があったからだ. 結果は予想通り Flat. 実は理論式を導く際 Ps の Initial State に対して Phase 平均をとっているため, これはそう自明なことではない.

- ARELS.C
  我らの隊長が根性で導き出した磁場 Hist. それはまさに人力の賜物である. その Hist を用いて 2gamma Decay 率を数値積分したものを Plot する. Resonant Peak が鈍くなるかと思いきや, 低 Gauss 方向に並進移動するだけに留まった. Average Resonant Line Shaper の略.
- FRELS.C
  後述の fima.c を用いて測定 Data に Resonant Line を Fitting する. そうして得られた Parameter を Input にしたときの Resonant Line を, 測定 Data に重ねてこの目で見てみたいという欲求に答える Program である. fima.c を組んで良かったと思える瞬間を提供してくれた. Fitting Resonant Line Shaper の略である.
- GEL.C
  Generation Line の略にして, 実は歴代の Hyperfine Structure 測定の要. GW の悲劇が結果的に未遂で終わったのは正にこの Line 故である. しかも Ps の生成率静磁場依存性論・Project code[NOP] は単なる仮説に留まらず, それへの物理的説明が我々の代で充分な完成度に至ったのだ. 発表会での聴講者の感嘆は今なお心地良いが, Geometry の持つ影響力の凄まじさを痛感した出来事でもあった.
- FIMA.C
  Fitting Machine の略. 非線型 Parameter の Fitting を可能にした偉大なる Levenberg-Marquardt Method の呼び水. その LMM 自体は subroutine.h にて外部処理されている. 詳しくは次項にて.
- SUBROUTINE.C
  今回の数値計算の根幹. 一様乱数, Gauss 型乱数, LU 分解, それを用いた N 次連立方程式の解法, χ^2・α matrix・β vector の算出, そして Levenberg-Marquardt Method. 自作簡易版の所為か LMM は初期値を上手く選ばないと, とんでもない値を最適化 Parameter として提出するが, さすがは現在最高の方法. 10000 回の Fitting にもめげずに走り通した. またこれは、引数にポインタを使用した初の Program. ポインタに C 言語の神髄を見た.
- FUNCTION.C
  subroutine.h と対を成す Header File. QED 曰く, Ps の系は S Wave Spin Singlet と Triplt を基底とする Hilbert 空間で近似できる. 我々は静磁場と振動磁場を加えて得られる Hamiltonian に, 崩壊形式を反映させるための非 Hermite 項を付け足す技を披露し, 系の時間発展を考察した.
- SELP.C
  Select Goog Parameter の略で日の光を見ることなかった Program. LMM の正常動作条件に合致する Nice な初期値を見つけてくるという仕様. しかし内部で行われているのは, 乱数をばらまく「数打ちゃ... 」法である. Project code[NOP] の元では無力すぎる故滅ぼされた.
- OFFSET3G.C
  Offset Detail with 3gamma の略. これも出番なしの Program である. 測定対象を真空に引いて Offset を測定するという試みが GW 中に決行された. Offset にもかかわらず何故か磁場依存性が僅かに存在した. それを説明する Logic に必要な絵を描き出すことが動機である. しかしその絵は我々にとってもオーパーツ過ぎたため, 発表会の観衆にとってはなおさらという観点から眠ってもらった.

w-taru

みんなありがとう。そしておつかれさま。