

4

Dirac 場

担当：細谷享平

5 月 13 日（月）

概 要

本章では、Fermi-Dirac 統計に従う、フェルミオン粒子の系を考える。
4.1 節において交換条件を反交換条件に修正し、その後 Dirac 方程式に
応用し、フェルミオンのスピンや統計性を見ていく。

4.1 フェルミオンの表現

節 1.2.2 や 1.2.3 で行ったボゾンの表現は以下のようなものであった。

$$[a_r, a_s^\dagger] = \delta_{rs}, \quad [a_r, a_s] = [a_r^\dagger, a_s^\dagger] = 0 \quad (1)$$

$$N_r = a_r^\dagger a_r \quad (2)$$

$$[N_r, a_s] = -\delta_{rs} a_s, \quad [N_r, a_s^\dagger] = \delta_{rs} a_s^\dagger \quad (3)$$

これらより、 $a_r, a_r^\dagger, N_r$ がそれぞれ、消滅（吸収）演算子、生成演算子、粒子数演算子と解釈できる。また、 N_r の取りうる固有値は、 $n_r = 0, 1, 2, \dots$ となっている。

もう一つの関係性として、交換関係を反交換関係に置き換えるものがある。
ここでは反交換関係を以下のように記述、及び定義する。

$$[A, B]_+ \equiv AB + BA \quad (4)$$

よく用いられる恒等式として次が成立。

$$[AB, C] = A[B, C]_+ - [A, C]_+ B \quad (5)$$

生成消滅演算子の関係性を、この反交換関係に置き換えると、

$$[a_r, a_s^\dagger]_+ = \delta_{rs}, \quad [a_r, a_s]_+ = [a_r^\dagger, a_s^\dagger]_+ = 0 \quad (6)$$

この関係性で特に、

$$(a_r)^2 = (a_r^\dagger)^2 = 0 \quad (7)$$

が成立する。さらに、粒子数演算子について

$$N_r^2 = a_r^\dagger a_r a_r^\dagger a_r = a_r^\dagger (1 - a_r^\dagger a_r) a_r = N_r \quad (8)$$

ゆえに、

$$N_r (N_r - 1) = 0 \quad (9)$$

が成立する。これより、演算子 N_r の固有値は、 $n_r = 0, 1$ である。これらは、Fermi-Dirac 統計をよく表している。最後に、真空状態、1 粒子状態、2 粒子状態は以下のようにかける。

$$a_r |0\rangle = 0 \quad (\text{all } r) \quad (10)$$

$$|1_r\rangle = a_r^\dagger |0\rangle \quad (11)$$

$$|1_r 1_s\rangle = a_r^\dagger a_s^\dagger |0\rangle = -a_s^\dagger a_r^\dagger |0\rangle = -|1_s 1_r\rangle \quad (r \neq s) \quad (12)$$

当然、同じ状態に 2 粒子が入る場合は、

$$|2_r\rangle = (a_r^\dagger)^2 |0\rangle = 0 \quad (13)$$

となり、これはパウリの排他律に一致する。

4.2 Dirac 方程式

静止質量 m の Dirac 方程式は、

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = [c\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\hbar \boldsymbol{\nabla}) + \beta mc^2] \psi(x) \quad (14)$$

となる（導出は「クォークとレプトン」で行ったので、割愛）。これは以下のように書き直せる。

$$i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu} - mc\psi(x) = 0 \quad (15)$$

ここで γ は、

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (16)$$

であり、次が成立。

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu} \quad (17)$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (18)$$

また、随伴的な場を次で定義。

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0 \quad (19)$$

この場は、次の方程式を満たす。

$$i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x^\mu} \gamma^\mu + mc\bar{\psi}(x) = 0 \quad (20)$$

Dirac 方程式 (15) や (20) を導くラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = c\bar{\psi}(x) \left[i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right] \psi(x) \quad (21)$$

とかける。実際に確認すると、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_{,\alpha}} \Rightarrow 0 = c \left[i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right] \psi \quad (22)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\alpha}} \Rightarrow -mc^2 \bar{\psi} = ci\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\alpha} \gamma^\alpha \quad (23)$$

と、式 (15)、(20) が導かれる。共役な場合は、

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \bar{\psi} i\hbar \gamma^0 = i\hbar \psi^\dagger(x) \quad (24)$$

$$\bar{\pi}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0 \quad (25)$$

これらを用いて、Dirac 場のハミルトニアンと運動量を求めていく。まずハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} \left(\pi(x) \dot{\psi}(x) - \mathcal{L} \right) \\ &= \int d^3\mathbf{x} \left(i\hbar \psi^\dagger(x) \dot{\psi}(x) - \bar{\psi}(x) \left[i\hbar c \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc^2 \right] \psi(x) \right) \\ &= \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi}(x) \left[i\hbar c \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} - i\hbar c \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc^2 \right] \psi(x) \\ &= \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi}(x) \left[-i\hbar c \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} + mc^2 \right] \psi(x) \end{aligned} \quad (26)$$

同様にして、運動量は

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int d^3\mathbf{x} \pi(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial \mathbf{x}} \\ &= -i\hbar \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(x) \nabla \psi(x) \end{aligned} \quad (27)$$

となる。

次に角運動量を見ていく。まず、角運動量を導く微小変換は、微小ローレンツ変換であり、それは

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x) - \frac{i}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha} \sigma^{\mu\nu} \psi(x) \quad (28)$$

とかける（導出は「クォークとレプトン」参照）。ここで、 $\sigma^{\mu\nu}$ は μ と ν で指定される各々が 4×4 行列であり、

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (29)$$

2章で見た、角運動量の表式を思い出すと、

$$cM^{\alpha\beta} = \int d^3\mathbf{x} ([x^\alpha \mathcal{T}^{0\beta} - x^\beta \mathcal{T}^{0\alpha}] + c\pi(x)S^{\alpha\beta}\phi(x)) \quad (30)$$

であり、今

$$S^{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}\sigma^{\alpha\beta}, \quad \mathcal{T}^{0\alpha} = c\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} = c i \hbar \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} \quad (31)$$

である。具体的に、1つの成分 M^{23} を計算すると、

$$\begin{aligned} cM^{23} &= \int d^3\mathbf{x} \left(\left[x^{(2)} c i \hbar \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial x^{(3)}} - x^{(3)} c i \hbar \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial x^{(2)}} \right] - \frac{i}{2} c i \hbar \psi^\dagger \sigma^{23} \psi \right) \\ &= c \int d^3\mathbf{x} \left([\psi^\dagger \quad \mathbf{x} \times (-i\hbar \nabla) \quad \psi]^{(1)} + \psi^\dagger \left(\frac{\hbar}{2} \sigma^{23} \right) \psi \right) \end{aligned} \quad (32)$$

右肩の括弧の数字は成分を表す。他成分も同様に計算し、

$$\mathbf{M} = (M^{23}, M^{31}, M^{12}), \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}) \quad (33)$$

とおくと、

$$\mathbf{M} = \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(x) [\mathbf{x} \times (-i\hbar \nabla)] \psi(x) + \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(x) \left(\frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \right) \psi(x) \quad (34)$$

とかける。この表式から、第1項が軌道角運動量、第2項がスピン角運動量に相当していることがわかる。以上のような形で、Dirac 方程式から、スピンの導かれる。

対称性と保存量の関係として最後に、位相変換不変性と電荷をみていく。今、 $\psi(x)$ 、 $\psi^\dagger(x)$ それぞれで位相変換に対して不変である。再び2章での表式を用いることで、電荷は

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{iq}{\hbar} \int d^3\mathbf{x} \pi(x) \psi(x) \\ &= q \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(x) \psi(x) \end{aligned} \quad (35)$$

(*今、 $\pi(x) = 0$ である。) また、電荷・電流密度は

$$s^\alpha(x) = (c\rho(x), \mathbf{j}(x)) = c q \bar{\psi}(x) \gamma^\alpha \psi(x) \quad (36)$$

実際に、電荷・電流密度に対する連続の方程式は、Dirac 方程式から直接的に示すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial s^\alpha}{\partial x^\alpha} &= c q \bar{\psi} \gamma^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} + c q \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\alpha} \gamma^\alpha \psi \\ &= \frac{mc^2 q}{i\hbar} \bar{\psi} \psi - \frac{mc^2 q}{i\hbar} \bar{\psi} \psi = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

1行目から2行目への変形で、Dirac 方程式 (15)、(20) を用いた。

Dirac 方程式の平面波解については、「クォークとレプトン」でやったので、割愛する。

4.3 第二量子化

Dirac 方程式の解を、平面波解で展開したものを、

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi^+(x) + \psi^-(x) \\ &= \sum_{\mathbf{r}\mathbf{p}} \left(\frac{mc^2}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[c_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) u_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}x/\hbar} + d_{\mathbf{r}}^{\dagger}(\mathbf{p}) v_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}x/\hbar} \right] \quad (38)\end{aligned}$$

とかく。この時、共役な場は

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) \\ &= \sum_{\mathbf{r}\mathbf{p}} \left(\frac{mc^2}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[d_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) \bar{v}_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}x/\hbar} + c_{\mathbf{r}}^{\dagger}(\mathbf{p}) \bar{u}_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}x/\hbar} \right] \quad (39)\end{aligned}$$

ここで、 $\bar{u}_{\mathbf{r}} = u_{\mathbf{r}}^{\dagger} \gamma^0$ とした。

Klein-Gordon 場の場合との類推から、次のような反交換関係を適用する。

$$[c_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}), c_{\mathbf{s}}^{\dagger}(\mathbf{p}')]_{+} = [d_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}), d_{\mathbf{s}}^{\dagger}(\mathbf{p}')]_{+} = \delta_{\mathbf{rs}} \delta_{\mathbf{pp}'} \quad (40)$$

なお、この他の反交換関係の組は、すべてゼロとする（反可換）。また、

$$N_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) = c_{\mathbf{r}}^{\dagger}(\mathbf{p}) c_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}), \quad \bar{N}_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) = d_{\mathbf{r}}^{\dagger}(\mathbf{p}) d_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) \quad (41)$$

と定義する。これら、 $c_{\mathbf{r}}, c_{\mathbf{r}}^{\dagger}, N_{\mathbf{r}}$ 及び $d_{\mathbf{r}}, d_{\mathbf{r}}^{\dagger}, \bar{N}_{\mathbf{r}}$ はそれぞれ 2 種類の粒子の、消滅、生成、粒子数演算子に対応する。

真空状態は、次式で定義される。

$$c_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) |0\rangle = d_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) |0\rangle = 0, \quad \text{all } \mathbf{p} \quad \text{and} \quad r = 1, 2 \quad (42)$$

もしくは同値な表現として、

$$\psi^+(x) |0\rangle = \bar{\psi}^+(x) |0\rangle = 0, \quad \text{all } x \quad (43)$$

4.2 節で導出した、エネルギーや運動量の表示は、真空状態においてゼロではない。そこで再び、normal product を導入する。反交換関係に注意し、次で定義する。

$$\begin{aligned}N(\psi_{\alpha} \psi_{\beta}) &= N \left[(\psi_{\alpha}^{+} + \psi_{\alpha}^{-})(\psi_{\beta}^{+} + \psi_{\beta}^{-}) \right] \\ &= \psi_{\alpha}^{+} \psi_{\beta}^{+} - \psi_{\beta}^{-} \psi_{\alpha}^{+} + \psi_{\alpha}^{-} \psi_{\beta}^{+} + \psi_{\alpha}^{-} \psi_{\beta}^{-} \quad (44)\end{aligned}$$

以下では、normal product を用いて種々の物理量を再定義し、それらを消滅、生成、粒子数演算子で表現することを試みる。まず、エネルギーは、normal product を用いると、改めて

$$H = \int d^3\mathbf{x} N \left\{ \bar{\psi}(x) \left[-i\hbar c \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} + mc^2 \right] \psi(x) \right\} \quad (45)$$

とかける。ここで、 $\psi(x)$ は Dirac 方程式の解であることから、

$$i\hbar\gamma^j\frac{\partial\psi}{\partial x^j} = -i\hbar\frac{1}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} + mc\psi \quad (46)$$

であるから、

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} \, N \left\{ \bar{\psi}(x)(i\hbar)\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} \right\} \\ &= i\hbar c \int d^3\mathbf{x} \, N \left(\psi^\dagger(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^0} \right) \end{aligned} \quad (47)$$

平面波展開より、

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^0} = \sum_{\mathbf{r}\mathbf{p}} \left(\frac{mc^2}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{-ip_0}{\hbar} \left[c_{\mathbf{r}}(\mathbf{p})u_{\mathbf{r}}(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} - d_{\mathbf{r}}^\dagger(\mathbf{p})v_{\mathbf{r}}(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar} \right] \quad (48)$$

$$\psi^\dagger(x) = \sum_{s\mathbf{p}'} \left(\frac{mc^2}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[d_s(\mathbf{p}')v_s^\dagger(\mathbf{p}')e^{-ip'x/\hbar} + c_s^\dagger(\mathbf{p}')u_s^\dagger(\mathbf{p}')e^{ip'x/\hbar} \right] \quad (49)$$

これらを代入すると、

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x} \, N \left(\psi^\dagger(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^0} \right) &= \sum_{\mathbf{r}\mathbf{p}} \frac{mc^2}{E_{\mathbf{p}}} \frac{-i}{\hbar} \frac{E_{\mathbf{p}}}{c} \frac{E_{\mathbf{p}}}{mc^2} c_{\mathbf{r}}^\dagger(\mathbf{p})c_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) \\ &\quad + \sum_{\mathbf{r}\mathbf{p}} \frac{mc^2}{E_{\mathbf{p}}} \frac{-i}{\hbar} \frac{E_{\mathbf{p}}}{c} \frac{E_{\mathbf{p}}}{mc^2} d_{\mathbf{r}}^\dagger(\mathbf{p})d_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) \\ &= \frac{-i}{\hbar c} \sum_{\mathbf{r}\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} \left[c_{\mathbf{r}}^\dagger(\mathbf{p})c_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) + d_{\mathbf{r}}^\dagger(\mathbf{p})d_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) \right] \end{aligned} \quad (50)$$

式変形においては、

$$p_0 = \frac{E_{\mathbf{p}}}{c}, \quad (51)$$

体積積分でのデルタ関数の定義式

$$\frac{1}{V} \int d^3\mathbf{x} \, e^{\frac{i(p-p')x}{\hbar}} = \delta(p-p') \quad (52)$$

及び、平面波解の直交関係

$$u_{\mathbf{r}}^\dagger(\mathbf{p})u_{\mathbf{s}}(\mathbf{p}) = v_{\mathbf{r}}^\dagger(\mathbf{p})v_{\mathbf{s}}(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{mc^2}\delta_{\mathbf{rs}} \quad (53)$$

$$u_{\mathbf{r}}^\dagger(\mathbf{p})v_{\mathbf{s}}(-\mathbf{p}) = 0 \quad (54)$$

を用いた。以上より、

$$H = \sum_{\mathbf{r}\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} \left[N_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) + \bar{N}_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) \right] \quad (55)$$

とかける。

同様にして、

$$\nabla\psi = \sum_{\mathbf{r}\mathbf{p}} \left(\frac{mc^2}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{i\mathbf{p}}{\hbar} \right) \left[c_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}x/\hbar} - d_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}x/\hbar} \right] \quad (56)$$

より、

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{r}\mathbf{p}} \mathbf{p} [N_r(\mathbf{p}) + \bar{N}_r(\mathbf{p})] \quad (57)$$

とかける。また、

$$Q = -e \sum_{\mathbf{r}\mathbf{p}} [N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p})] \quad (58)$$

なお、 $\bar{N}_r$ の前の負符号は、normal product による負符号である。

スピンについては、運動量方向の成分をとり、4.2 節の結果から次のように定義する。

$$S_{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{2} \int d^3\mathbf{x} N [\psi^\dagger(x)\sigma_{\mathbf{p}}\psi(x)] \quad (59)$$

今、デルタ関数の積分表示 (52) を用いることで、

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}} = & \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{p}'} \frac{mc^2}{E_{\mathbf{p}'}} [d_s(\mathbf{p}')c_t(-\mathbf{p}')v_s^\dagger(\mathbf{p}')\sigma_{\mathbf{p}}u_t(-\mathbf{p}') \\ & - d_t^\dagger(\mathbf{p}')d_s(\mathbf{p}')v_s^\dagger(\mathbf{p}')\sigma_{\mathbf{p}}v_t(\mathbf{p}') \\ & + c_s^\dagger(\mathbf{p}')c_t(\mathbf{p}')u_s^\dagger(\mathbf{p}')\sigma_{\mathbf{p}}u_t(-\mathbf{p}') \\ & + c_s^\dagger(\mathbf{p}')d_t^\dagger(-\mathbf{p}')u_s^\dagger(\mathbf{p}')\sigma_{\mathbf{p}}v_t(-\mathbf{p}')] \end{aligned} \quad (60)$$

この $S_{\mathbf{p}}$ を 1 粒子状態 $c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ と $d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ に作用させたときにどうなるかを考えてみる。まず、 $c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ の場合、生成消滅演算子の反交換関係を用いると、式 (60) の第 3 項のみが残ることになり、その項は

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}}c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle &= \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{p}'} \frac{mc^2}{E_{\mathbf{p}'}} c_s^\dagger(\mathbf{p}') (\delta_{r,t}\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} - c_r^\dagger(\mathbf{p})c_t(\mathbf{p}')) u_s^\dagger(\mathbf{p}')\sigma_{\mathbf{p}}u_t(\mathbf{p}')|0\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{s}} \frac{mc^2}{E_{\mathbf{p}}} c_s^\dagger(\mathbf{p})u_s^\dagger(\mathbf{p})\sigma_{\mathbf{p}}u_r(\mathbf{p})|0\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{s}} (-1)^{r+1} \frac{mc^2}{E_{\mathbf{p}}} c_s^\dagger(\mathbf{p})u_s^\dagger(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})|0\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{s}} (-1)^{r+1} \frac{mc^2}{E_{\mathbf{p}}} c_s^\dagger(\mathbf{p}) \frac{E_{\mathbf{p}}}{mc^2} \delta_{r,s} |0\rangle \\ &= (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \end{aligned} \quad (61)$$

となる。 $d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ に作用させた場合は、第 2 項のみが残り、同様に計算できる。以上まとめると、

$$S_{\mathbf{p}}c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \quad (62)$$

$$S_{\mathbf{p}}d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \quad r = 1, 2 \quad (63)$$

この式から、 $r=1$ の解は運動量方向のスピン成分が正である右巻きの粒子、 $r=2$ の解は運動量方向のスピンが負である左巻きの粒子に対応することがわかる。

ここで、粒子と反粒子の対称性を見てみよう。対称性はマヨラナ表現を用いると、はっきりと見える。マヨラナ表現においては、

$$\gamma_M^{\mu*} = -\gamma_M^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (64)$$

が成立する。このことから、作用子

$$\left(i\hbar\gamma_M^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \quad (65)$$

は実であり、 $\psi(x)$ が解のとき、その複素共役 $\psi^*(x)$ も解である。つまり、正エネルギー解が

$$u_{Mr}(\mathbf{p}) \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{V}} \quad (66)$$

と書けるとき、

$$u_{Mr}^*(\mathbf{p}) \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{V}} \quad (67)$$

も解であり、これが負エネルギーとなる。以上より、マヨラナ表現においては、

$$\psi_M(x) = \sum_{r\mathbf{p}} \left(\frac{mc^2}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[c_r(\mathbf{p}) u_{Mr}(\mathbf{p}) e^{-ipx/\hbar} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) u_{Mr}^*(\mathbf{p}) e^{ipx/\hbar} \right] \quad (68)$$

$$\psi_M^{\dagger T}(x) = \sum_{r\mathbf{p}} \left(\frac{mc^2}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[d_r(\mathbf{p}) u_{Mr}(\mathbf{p}) e^{-ipx/\hbar} + c_r^\dagger(\mathbf{p}) u_{Mr}^*(\mathbf{p}) e^{ipx/\hbar} \right] \quad (69)$$

この表式から、粒子と反粒子の対称性が明瞭に見て取れる。

最後に、Dirac 場 $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)$ の反交換関係をみてみよう。以下添え字の α, β は 4×4 行列の成分を表すとする。まず明らかに、

$$[\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)]_+ = [\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)]_+ = 0 \quad (70)$$

である。また、

$$\left[\psi_\alpha^\pm(x), \bar{\psi}_\beta^\mp(y) \right]_+ = i \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right)_{\alpha\beta} \Delta^\pm(x-y) \quad (71)$$

が成立する。以下でこれを示す。

まず、

$$\begin{aligned} \left[\psi_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(y) \right]_+ &= \sum_{r,s,\mathbf{p},\mathbf{p}'} \frac{mc^2}{V} \frac{1}{(E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'})^{1/2}} \\ &\quad \left[c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}') \right]_+ u_{r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{u}_{s\beta}(\mathbf{p}') e^{-\frac{i(px-p'y)}{\hbar}} \\ &= \sum_{r,\mathbf{p}} \frac{mc^2}{VE_{\mathbf{p}}} u_{r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) e^{-ik(x-y)} \\ &= \sum_r mc \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{E_{\mathbf{p}}/c} u_{r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) e^{-ik(x-y)} \quad (72) \end{aligned}$$

と展開できる。次に、積分の中身の $u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p})$ を考える。 u_r と v_r については、次の関係式が成り立つ。

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u_r = 0, \quad \bar{u}_r(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0 \quad (73)$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc)v_r = 0, \quad \bar{v}_r(\gamma^\mu p_\mu + mc) = 0 \quad (74)$$

$$\sum_r (u_r \bar{u}_r - v_r \bar{v}_r) = 1 \quad (75)$$

ここで、次式のように表される射影演算子 Λ^+ を導入する。

$$\Lambda^+ = \frac{\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc} \quad (76)$$

この演算子は、正エネルギー解 u_r のみを取り出す射影演算子である。実際、

$$\Lambda^+ u_r = \frac{(\gamma^\mu p_\mu - mc)u_r + 2mcu_r}{2mc} = u_r, \quad \Lambda^+ v_r = 0 \quad (77)$$

この射影演算子を完全性関係式 (75) に左から作用させると、

$$\sum_r u_r \bar{u}_r = \Lambda^+ \quad (78)$$

成分を明確に書くと、

$$\sum_r u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) = \Lambda^+_{\alpha\beta} = \left(\frac{\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc} \right)_{\alpha\beta} \quad (79)$$

これを用いると、

$$\begin{aligned} [\psi_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(y)]_+ &= mc \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{E_{\mathbf{p}/c}} \left(\frac{\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc} \right)_{\alpha\beta} e^{-ik(x-y)} \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{E_{\mathbf{p}/c}} \left(-\frac{\hbar}{i} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc \right)_{\alpha\beta} e^{-ik(x-y)} \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{E_{\mathbf{p}}/\hbar c} \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right)_{\alpha\beta} e^{-ik(x-y)} \\ &= i \frac{-ic}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right)_{\alpha\beta} e^{-ik(x-y)} \\ &= i \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right)_{\alpha\beta} \Delta^+(x-y) \end{aligned} \quad (80)$$

なお、途中で

$$\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c} = k_0 = \frac{p_0}{\hbar} = \frac{E_{\mathbf{p}}}{\hbar c} \quad (81)$$

を用いた。もう一方の反交換関係も同様に求められ、まとめると

$$[\psi^\pm(x), \bar{\psi}^\mp(y)]_+ = i \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \Delta^\pm(x-y) \quad (82)$$

とかける（行列成分の添え字は省略した）。今、

$$S^\pm(x) \equiv \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \Delta^\pm(x-y) \quad (83)$$

とすると、

$$[\psi^\pm(x), \bar{\psi}^\mp(y)]_+ = iS^\pm(x) \quad (84)$$

以上より、

$$\begin{aligned} [\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+ &= [\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)]_+ + [\psi^-(x), \bar{\psi}^+(y)]_+ \\ &= i(S^+(x-y) + S^-(x-y)) \end{aligned} \quad (85)$$

また、

$$\begin{aligned} S(x) &\equiv S^+(x) + S^-(x) \\ &= \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right) (\Delta^+(x) + \Delta^-(x)) \\ &= \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \Delta(x) \end{aligned} \quad (86)$$

とおくと、

$$[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+ = iS(x-y) \quad (87)$$

もう一つの表記

$$\Delta^\pm(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2} \quad (88)$$

を用いた場合を考える。このとき、

$$\begin{aligned} S^\pm(x) &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} d^4k \frac{e^{-ikx}}{\left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2} \left(\gamma^\mu k_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right) \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \hbar^2 \frac{1}{\hbar} \int_{C^\pm} d^4k \frac{e^{-i\frac{p}{\hbar}x}}{p^2 - m^2c^2} (\gamma^\mu p_\mu + mc) \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hbar^3} \int_{C^\pm} d^4p \frac{\gamma^\mu p_\mu + mc}{p^2 - m^2c^2} e^{-i\frac{p}{\hbar}x} \\ &= -\frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^4} \int_{C^\pm} d^4p \frac{\gamma^\mu p_\mu + mc}{p^2 - m^2c^2} e^{-i\frac{p}{\hbar}x} \end{aligned} \quad (89)$$

途中、

$$\mu = \frac{mc}{\hbar} \quad (90)$$

$$k^\mu = \frac{p^\mu}{\hbar}, \quad d^4k = \frac{d^4p}{\hbar^4} \quad (91)$$

を用いた。最後に、

$$(\gamma^\mu p_\mu \pm mc)(\gamma^\mu p_\mu \mp mc) = p^2 - m^2c^2 \quad (92)$$

より、形式的に

$$S^{\pm}(x) = \frac{-\hbar}{(2\pi\hbar)^4} \int_{C^{\pm}} d^4p \frac{e^{-i\frac{p}{\hbar}x}}{\gamma^{\mu}p_{\mu} - mc} \quad (93)$$

とかける。