

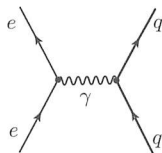
8

クォークの電気力学と色力学

電磁相互作用はよく理解されているので、電子はハドロン構造を調べるためのプローブとして役立つ。7章でレプトンに述べたことすべてはクォークにもそのまま当てはまる（もちろん、 $(2/3)e$ あるいは $-(1/3)e$ という適切な電荷を使う必要はある）。しかし、クォーク自身は決して日の目を見ないという事実が実験をややこしくしていて、中間子やバリオンの振る舞いの観測からそれらが何でできているのかを推測しなければならない。この章では、二つの重要な例を見ていく。電子-陽電子衝突におけるハドロン生成（8.1節）と電子-陽電子弾性散乱（8.2節）だ。その後量子色力学に移る。ファインマン則（8.3節）、色荷（8.4節）、QCDにおける対消滅（8.5節）、そして漸近的自由（8.6節）を見ていく。

8.1 e^+e^- 衝突におけるハドロン生成

電子と陽電子が衝突すると、 $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ （バーバー散乱）のように（もちろん）弾性的に散乱することができるし、 $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ （対消滅）のように二つの光子を生成することもできるし、あるいはエネルギーが十分高ければ、 $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ のようにミュー粒子（あるいは、タウ）対をつくることができる。また、 $e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}$ のようにクォーク対を生成することもでき、この過程をこの後考察したい。最低次のQEDダイアグラムは以下である。



生成されたクォーク同士は短時間だけ自由粒子のように離れていくが、クォーク間の距離が 10^{-15} m（ハドロンの直径）に達すると、クォーク同士に働く（強い）相互作用があまりにも強いため、今度はおもにグルーオンから新たなクォーク-反クォーク

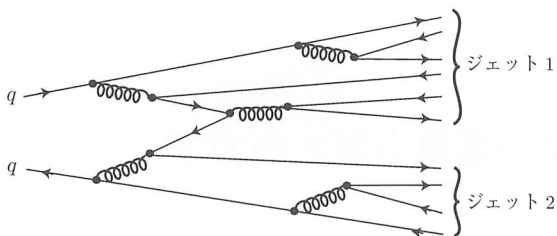
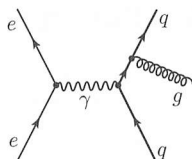


図 8.1 ハドロン化とジェットの形成

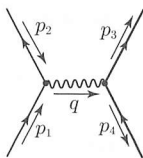
対が生成される (図 8.1). これらの (現代の典型的な実験では文字通り膨大な数の) クォークと反クォークは, 無数の組み合わせで一緒になり, 検出器で実際に記録される中間子やバリオンをつくる. この過程は「ハドロン化」として知られている. つまり, われわれが実験室で観測するのは $e^+ + e^- \rightarrow$ ハドロンなのだ.

すべての反応の終状態中には, 元々のクォーク-反クォーク対の疑うことなき痕跡が残っていることがほとんどだ. ハドロンは二つの背中合わせの「ジェット」として現れる. 一つは元々のクォークの方向に沿って*1, もう一つは反クォークの方向に沿って飛び出す (図 8.2). ときには, 3 ジェット事象もある (図 8.3). それは, 元々あった $q\bar{q}$ 生成



に伴って, 全エネルギーのかなりの部分を担ったグルーオンが放出されたことを示している. 実際, 一般的には 3 ジェット事象の観測がグルーオンの存在に対する最も直接的な証拠だとみなされている.

さて, この過程 ($e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow q + \bar{q}$) における最初のステップは通常の QED だ. その計算は $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ のそれとまったく同じだ.



*1 (たとえば) クォークはジェットを無色にするために, 「後ろに届き」別の枝から反クォークを拾い出さなければならないが, エネルギー遷移が比較的小さければジェットの構造を壊さないことに注意.

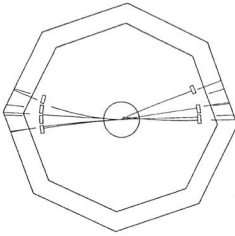


図 8.2 典型的な 2 ジェット事象
(出典：Dorfan, SLAC)

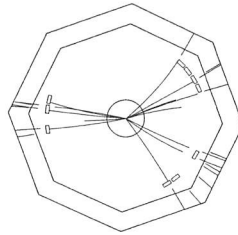


図 8.3 3 ジェット事象
(出典：Dorfan, SLAC)

振幅は

$$\mathcal{M} = \frac{Qg_e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3)\gamma_\mu v(p_4)] \quad (8.1)$$

である。 Q は e を単位とした (u, c, t に対しては $2/3$, d, s, b に対しては $-1/3$) クォークの電荷である。カシミール・トリックを使うと

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \left[\frac{Qg_e^2}{(p_1 + p_2)^2} \right]^2 \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p}_1 + mc)\gamma^\nu (\not{p}_2 - mc)] \\ &\quad \times \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{p}_4 - Mc)\gamma_\nu (\not{p}_3 + Mc)] \end{aligned} \quad (8.2)$$

を得る。ここで、 m は電子の質量、 M はクォークの質量である (問題 8.1)。7 章のトレース定理を思い出すと、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 8 \left[\frac{Qg_e^2}{(p_1 + p_2)^2} \right]^2 [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \\ &\quad + (mc)^2(p_3 \cdot p_4) + (Mc)^2(p_1 \cdot p_2) + 2(mc)^2(Mc)^2] \end{aligned} \quad (8.3)$$

あるいは、(重心系での) 入射電子のエネルギー E と、入射電子と出て行くクォークとの間の角度 θ で表すと

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= Q^2 g_e^4 \left\{ 1 + \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 + \left(\frac{Mc^2}{E} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[1 - \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{Mc^2}{E} \right)^2 \right] \cos^2 \theta \right\} \end{aligned} \quad (8.4)$$

となる。微分散乱断面積は式 (6.47) で与えられているので、 θ と ϕ について積分すると

$$\sigma = \frac{\pi Q^2}{3} \left(\frac{\hbar c \alpha}{E} \right)^2 \sqrt{\frac{1 - (Mc^2/E)^2}{1 - (mc^2/E)^2}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Mc^2}{E} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 \right] \quad (8.5)$$

を得る (問題 8.2).

$E = Mc^2$ というしきい値に注意しよう. このエネルギー以下では平方根が虚数になってしまう. これが意味するのは, $q\bar{q}$ 対を生成するに足るエネルギーがないとその過程は運動学的に許されないということだ. しきい値よりもはるかにエネルギーが大きくなると ($E > Mc^2 \gg mc^2$), 式 (8.5) はずっとすっきりとする*2.

$$\sigma = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\hbar Q c \alpha}{E} \right)^2 \quad (8.6)$$

ビームエネルギーを上げていくと, 以下のしきい値が次々と現れる. まずミュー粒子と軽いクォーク, その後 (約 1300 MeV で) チャームクォーク, (1777 MeV で) タウ, (4500 MeV で) ボトムクォーク, そして最後にはトップクォークのしきい値が現れる. この構造をきれいに見せる方法がある. ハドロン生成頻度とミュー粒子生成頻度の比を考えてみよう.

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{ハドロン})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (8.7)$$

分子はすべてのクォーク-反クォーク事象を含んでいるので*3, 式 (8.6) から

$$R(E) = 3 \sum Q_i^2 \quad (8.8)$$

が得られる. ここで, 和はしきい値 E より下で生成されるすべてのクォーク種に対して取る. 先頭の 3 に注意しよう. それぞれのクォークのフレーバーに 3 種類の色があるという事実を反映している. そして, $R(E)$ は「階段」状のグラフになると予想できる. 新たなクォーク生成のしきい値を超えると階段を一つ上がり, その高さはクォークの電荷によって決まる. u , d , s クォークだけが寄与する低エネルギーでは,

$$R = 3 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right] = 2 \quad (8.9)$$

*2 運よく代数で打ち消し合うので, この近似は実際のところ見た目よりはよい. 平方根を展開すると, $\sqrt{1 - (Mc^2/E)^2} [1 + (1/2)(Mc^2/E)^2] = 1 - (3/8)(Mc^2/E)^4 \dots$ となり, 誤差は $(Mc^2/E)^2$ ではなく $(Mc^2/E)^4$ だ. 電子の質量項は, 2 次のオーダーの補正はあるものの, これらは元々かなり小さい. そして, これらの項は R の計算において完全に打ち消される (式 (8.7)).

*3 テレプトンは多くの場合ハドロンに崩壊するので, 1777 MeV 以上ではその効果が R に少し加わる. そのために, 図 8.4 では「 $u + d + s + c$ 」の線よりも実験値がわずかに大きくなっている.

が期待される。 c のしきい値と b のしきい値との間では

$$R = 2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} = 3.33 \quad (8.10)$$

となるはずで、 b のしきい値では少しだけ増えて

$$R = \frac{10}{3} + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{3} = 3.67 \quad (8.11)$$

となり、 トップクォークまでいくと $R = 5$ に跳ね上がるはずだ。

実験結果は図 8.4 に示されている。理論と実験との一致はとてもよい。とりわけ高いエネルギーでは素晴らしい。しかし、それがなぜ完璧ではないのかと問いたくなるかもしれない。式 (8.5) から (8.6) へ行くときの近似（これがそれぞれのしきい値での角を人工的に鋭くする）と τ を無視したことを除いても、 $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ (QED) と $q\bar{q} \rightarrow$ ハドロン (QCD) が二つの独立した過程だとした仮定に単純化がありすぎた。実際のところ、最初のステップで生成されたクォークはディラック方程式に従う自由粒子ではなく、むしろ、それらは 2 番目の過程へ向かう途中の仮想粒子なのだ。これは、とりわけエネルギーが束縛状態 ($\phi = s\bar{s}$, $\psi = c\bar{c}$, $\Upsilon = b\bar{b}$) の生成エネルギーに近いときに致命的になる。そのような「共鳴」の近くでは、二つのクォーク間の相互作用をとて無視できない。それゆえ、グラフ上の鋭いピークが存在する。典型的に、それぞれのしきい値のすぐ下にできる。そして、とうとう 50 GeV を超えると、グラフは 91 GeV の Z^0 ピークを目指して増加を始めてしまう。

しかし、これらすべては本当にこじつけだ。というのも、図 8.4 の重要性はわずかな不一致にあるのではなく、全体的一致が雄弁に物語っている。式 (8.8) には因子 3 があるということ。それがなければ、理論は大きくずれてしまっている（図 8.4 の破線を参照）。しかも、そのずれはたんに分離された共鳴のところだけではなく、全体にわたっている。その 3 が色の数だということを忘れてはならない。そこで、これが、色に関する仮説の確固たる実験的証拠となったのだ。元々は深遠な理論的理由により導入された仮説だったが、現在では、強い相互作用に対するレシピに必要不可欠な材料となっている。

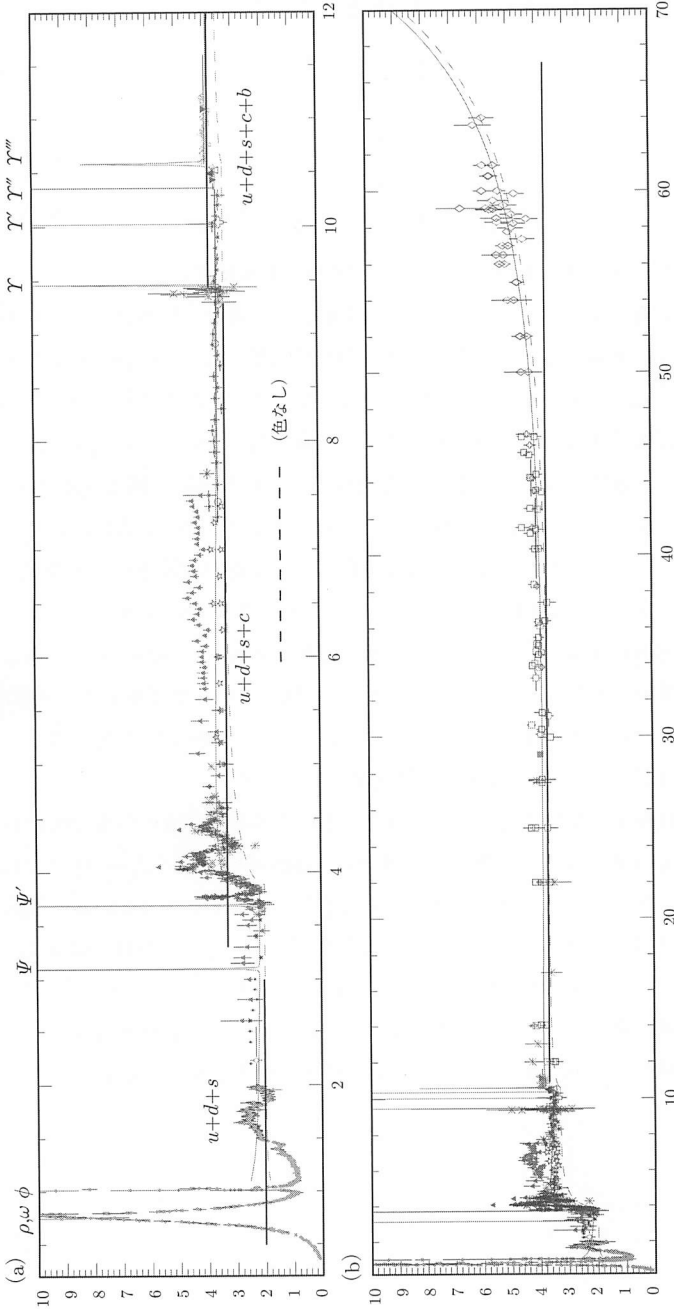
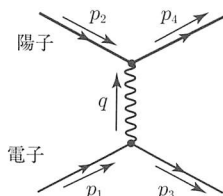


図 8.4 データに基づいた R のグラフ. 横軸は GeV 単位の全エネルギー ($2E$) (提供は COMPAS (IHEP, ロシア) と HEPDATA (Durham 大, 英国) で P. Janot (CERN) と M. Schmitt (ノースウエスタン大) による修正を加えてある)

8.2 弾性電子-陽子散乱

さて今度は、陽子の内部構造に対する最もよいプローブである電子-陽子散乱を見ていこう。もし陽子がディラック方程式に従う単純な点電荷だったとしたら、電子-ミュー粒子散乱の解析での M を陽子の質量に置き換えるだけでよい。最低次のファインマン図は以下になり、



(スピンについて平均をとった) 振幅は、

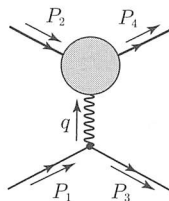
$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_e^4}{q^4} L_{\text{electron}}^{\mu\nu} L_{\text{proton}}^{\mu\nu} \tag{8.12}$$

となるだろう (式 (7.126)). ここで $q = p_1 - p_3$ で、そして (式 (7.128))

$$L_{\text{electron}}^{\mu\nu} = 2\{p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu + g^{\mu\nu}[(mc)^2 - (p_1 \cdot p_3)]\} \tag{8.13}$$

である ($L_{\text{proton}}^{\mu\nu}$ についても同様で、 $m \rightarrow M$ と 1, 3 \rightarrow 2, 4 の置き換えを行う)。モット散乱とラザフォード散乱の公式を導き出すための例題 7.7 でこれらの結果を使った。

しかし、陽子は単純な点電荷ではなく、それゆえクォークモデルの降臨よりもずっと以前から、電子-陽子散乱を記述するためのより柔軟な定式化が導入されていた。QED の最低次の過程をこのようなダイアグラムで表現する。



ここで、ほんやりとした塊は、(仮想) 光子が陽子とどのように相互作用するかは本当はわからないのだということを忘れないようにする役目を担っている (しかし、 $e + p \rightarrow e + p$

のように散乱は弾性であることを強く仮定している。 $e + p \rightarrow e + X$ という非弾性電子-陽子散乱ははるかに複雑になってしまい、本書ではそのような過程を取り扱わない。いまここで本質的な点は、電子のバーテックスと光子の伝播関数は変わっていないということだ。それゆえ、式 (8.12) のように、 $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ をうまく因数分解できて

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_e^4}{q^4} L_{\text{electron}}^{\mu\nu} K_{\mu\nu \text{ proton}} \quad (8.14)$$

となる。ここで $K_{\mu\nu}$ は光子-陽子バーテックスを記述する未知の量だ。

だがしかし……一切がわからないわけではない。これだけはいえる。それは、間違いなく2階のテンソルで、依存性もち得る変数は、 p_2, p_4 、そして q だ。 $q = p_2 - p_4$ なので、これら三つは独立ではなく、どれか二つを任意に選んで使ってよい。慣習的に選ばれているのは q と p_2 だ（ここから下付きの添字を省略する。 $p \equiv p_2$ は陽子の初期運動量である）。さて、二つの4元ベクトルから構築することのできるテンソルはそれほど多くない。最も一般的で可能なかたちは

$$K^{\mu\nu} = -K_1 g^{\mu\nu} + \frac{K_2}{(Mc)^2} p^\mu p^\nu + \frac{K_4}{(Mc)^2} q^\mu q^\nu + \frac{K_5}{(Mc)^2} (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) \quad (8.15)$$

である。ここで、 K_i は、いま扱っている問題で唯一のスカラー量、すなわち q^2 の（未知の）関数である*4。すべての K が同じ次元をもつように、 K_2, K_4, K_5 を定義する際に因子 $(Mc)^{-2}$ を引っぱり出した*5。原理的には反対称の組み合わせ $(p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu)$ を加えてもよいのだが、 $L^{\mu\nu}$ が対称なので（式 (8.13)）、そのような項は $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ に対して何の寄与もない。さて、これら四つの関数は独立ではない。

$$q_\mu K^{\mu\nu} = 0 \quad (8.16)$$

であることから（問題8.4）、

$$K_4 = \frac{(Mc)^2}{q^2} K_1 + \frac{1}{4} K_2, \quad K_5 = \frac{1}{2} K_2 \quad (8.17)$$

となる（問題8.5）。よって、 $K^{\mu\nu}$ はたった二つの（未知の）関数 $K_1(q^2)$ と $K_2(q^2)$ によって

$$K^{\mu\nu} = K_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{K_2}{(Mc)^2} \left(p^\mu + \frac{1}{2} q^\mu \right) \left(p^\nu + \frac{1}{2} q^\nu \right) \quad (8.18)$$

*4 $p^2 = (Mc)^2$ は定数で、 $p_4^2 = (q+p)^2 = q^2 + 2q \cdot p + p^2 = (Mc)^2 \Rightarrow q \cdot p = -q^2/2$ であることに注意せよ。

*5 下付き添字の3は、ニュートリノ-陽子散乱の同様の解析をする際に出てくる項のために伝統的に使わずに取ってある。しかし、ここではそれをやらない。

と表される。

「形状因子」 K_1 と K_2 は電子-陽子弾性散乱断面積に直接関係している。式 (8.13) と (8.18) によると (問題 8.7),

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \left(\frac{2g_e^2}{q^2} \right)^2 \left\{ K_1 [(p_1 \cdot p_3) - 2(mc)^2] + K_2 \left[\frac{(p_1 \cdot p)(p_3 \cdot p)}{(Mc)^2} + \frac{q^2}{4} \right] \right\} \quad (8.19)$$

を得る。標的陽子が静止している $p = (Mc, 0, 0, 0)$ の実験系を考える。入射エネルギー E の電子が角度 θ だけ散乱され、エネルギーが E' になって出てきたとする。適度に高エネルギーの散乱 ($E, E' \gg mc^2$) を仮定しよう。そうすると、電子の質量を安全に無視することができる ($m = 0$ とする)*⁶。すると、 $\hat{p}_i \cdot \hat{p}_f = \cos \theta$ として、 $p_1 = (E/c)(1, \hat{p}_i)$, $p_3 = (E'/c)(1, \hat{p}_f)$ となり、

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_e^4 c^2}{4EE' \sin^4(\theta/2)} \left(2K_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + K_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (8.20)$$

を見出す (問題 8.8)。外に出て行く電子のエネルギー E' は独立な変数ではなく、運動学的に E と θ によって決まる (問題 8.9)。

$$E' = \frac{E}{1 + (2E/Mc^2) \sin^2(\theta/2)} \quad (8.21)$$

入射粒子の質量がゼロの場合は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar E'}{8\pi M c E} \right)^2 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \quad (8.22)$$

を得る (問題 6.10)。よって、弾性電子-陽子散乱に対しては

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha \hbar}{4ME \sin^2(\theta/2)} \right)^2 \frac{E'}{E} [2K_1 \sin^2(\theta/2) + K_2 \cos^2(\theta/2)] \quad (8.23)$$

となる。ここで、 E' は式 (8.21) によって与えられる。これはローゼン-ブルースの式として知られ、1950年に初めて導き出された [1]。ある一定の入射エネルギー幅のときに、与えられた角度に散乱される電子の数を数えることで $K_1(q^2)$ と $K_2(q^2)$ を実験的に決めることができる。実際のところは、それらの代わりに「電氣的」そして「磁

*⁶ モットの公式 (式 (7.131)) は陽子の構造と反跳を無視している。それは $E \ll Mc^2$ の領域だが、 $E \gg mc^2$ という仮定はしていない。今度ここでは $E \gg mc^2$ の領域を考えているが、陽子の構造と反跳を無視はしていない (すなわち、 $E \ll Mc^2$ という仮定をしていない)。中間エネルギー領域 $mc^2 \ll E \ll Mc^2$ では、その二つの結果は同じになる (問題 8.10)。

氣的」形状因子 $G_E(q^2)$ と $G_M(q^2)$ を使うのが伝統的だ。

$$K_1 = -q^2 G_M^2, \quad K_2 = (2Mc)^2 \frac{G_E^2 - [q^2/(2Mc)^2] G_M^2}{1 - [q^2/(2Mc)^2]} \quad (8.24)$$

$G_E(q^2)$ と $G_M(q^2)$ は、それぞれ電気と磁気モーメントの分布に関連している [2]。

ここまでには貴重な物理はほとんどない。われわれがやったのは、陽子の模型に対する議題を設定しただけだ。成功した理論なら形状因子を計算できなければならないが、この段階では完全に任意だ。最も単純な模型なら陽子を単純な点電荷として扱う。この場合は (問題 8.6),

$$K_1 = -q^2, \quad K_2 = (2Mc)^2 \Rightarrow G_E = G_M = 1 \quad (8.25)$$

となる。低エネルギーでは悪い近似ではない。そこでは、電子は陽子の中を「見る」のに十分なところまで近づけない。しかし、高エネルギーではひどく不適当になる (図 8.5)。あきらかに陽子は多彩な内部構造をもつ。クォーク模型の観点からはそこに驚きはない。しかし、まだ陽子が真に素粒子だと考えていた人々にとっては衝撃だったはずだ。

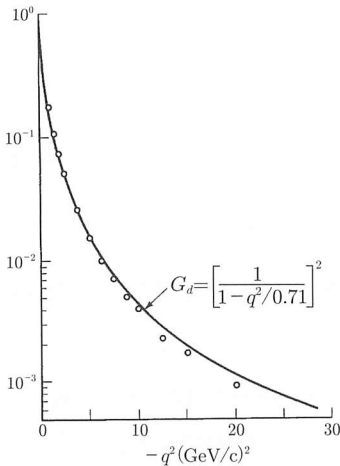


図 8.5 陽子の弾性形状因子。全体に掛かる定数を除いては、電気と磁気モーメント G_E と G_M は実際上同じである。少なくとも約 $10 (\text{GeV}/c)^2$ までは、現象論的な「双極」関数 G_d でうまくフィットできる (実線)。丸印は $G_M (1 + K)$ ($\approx G_E$) の実験値 (出典: H. Frauenfelder and E.M. Henley: *Subatomic Physics*, 2nd edn (Prentice-Hall, 1991) 141; P. N. Kirk *et al.*: *Phys. Rev.*, D 8, 63 (1973) のデータに基づく)

8.3 色力学のファインマン則

量子電気力学 (QED) は荷電粒子の相互作用を記述する. 量子色力学 (QCD) は色をもつ粒子の相互作用を記述する. 電磁気力は光子によって媒介され, 色による力はグルーオンによって媒介される. 電磁気力の強さは結合定数

$$g_e = \sqrt{4\pi\alpha} \quad (8.26)$$

によって決まる. 適切な単位系では, g_e は素電荷になる (陽電子の電荷). 色力学の強さは「強い力」の結合定数で決まる.

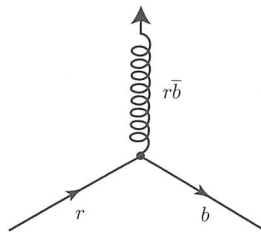
$$g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s} \quad (8.27)$$

これを色の力の根本的な単位とみなしてよいのかもしれない. クォークには「赤」(r) 「青」(b) 「緑」(g) という 3 種類の色がある*7. ゆえに, QCD においてクォークの状態を指定するには, 運動量とスピンを与えるディラックスピノル $u^{(s)}(p)$ だけでなく, 色を与える 3 成分の列ベクトル c

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{赤}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{青}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{緑} \quad (8.28)$$

が必要となる. たとえば c_i というように, アルファベットの真ん中辺りの文字の下付き添字で c の要素をラベルづけする. すると, i, j, k, \dots はクォークの色について 1 から 3 までを取り得る*8.

典型的には, クォーク-グルーオンのバーテックスでクォークの色は変わり, その変化はグルーオンによってもって行かれる. たとえば次のように.



*7 クォークにはもちろん違ったフレーバーもある. しかし, 異なるフレーバーのクォークは異なる質量をもつという点を除いては, QCD には無関係である. QED が粒子の電荷しか見ないように, QCD はその色にしか関心をもたない.

*8 たいていの教科書では, クォークの色の状態を明示的に指定していないことに注意すべきだ. 色は「暗示されて」いたり, 「 $u(p)$ に含まれていると理解される」べきだったりする. 表記が多少面倒になるという対価を支払っても, いまの時点では明示的に書く方が賢い.

このダイアグラムでは、赤のクォークが青のクォークに変わり、赤・反青のグルーオンを放出している。それぞれのグルーオンは、色を一つと反色を一つ運んでいる。ということは、グルーオンには、赤反赤 ($r\bar{r}$), 赤反青 ($r\bar{b}$), 赤反緑 ($r\bar{g}$), 青反赤 ($b\bar{r}$), 青反青 ($b\bar{b}$), 青反緑 ($b\bar{g}$), 緑反赤 ($g\bar{r}$), 緑反青 ($g\bar{b}$), 緑反緑 ($g\bar{g}$) という9種類が存在するはずだ。そのような9種類のグルーオンが存在する理論は原理的には完璧に可能だ。しかし、その世界はいまのわれわれの世界とは非常に違ったものになってしまう。色に関する $SU(3)$ 対称性 (これから見ていくように、QCD はその上に立脚している) によると、これらの九つの状態は「色の八重項」

$$\begin{aligned} |1\rangle &= (r\bar{b} + b\bar{r})/\sqrt{2} & |2\rangle &= -i(r\bar{b} - b\bar{r})/\sqrt{2} \\ |3\rangle &= (r\bar{r} - b\bar{b})/\sqrt{2} & |4\rangle &= (r\bar{g} + g\bar{r})/\sqrt{2} \\ |5\rangle &= -i(r\bar{g} - g\bar{r})/\sqrt{2} & |6\rangle &= (b\bar{g} + g\bar{b})/\sqrt{2} \\ |7\rangle &= -i(b\bar{g} - g\bar{b})/\sqrt{2} & |8\rangle &= (r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g})/\sqrt{6} \end{aligned} \quad (8.29)$$

と、「色の一重項」

$$|9\rangle = (r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})/\sqrt{3} \quad (8.30)$$

を構成する (5.5 節を参照。そこでは色ではなくフレーバーについて議論したが、数学的には同一だ。たんに $u, d, s \rightarrow r, b, g$ の置き換えをすればよい。われわれはここでは同位体のスピンを扱っているわけではなく、八重項に属する状態の別の線形結合を使った。これにより後々表記がすっきりする)。もしグルーオンの一重項が存在したとすればそれは見かけ上光子と共通であるとみなされてしまうだろう*⁹。閉じ込めによって自然界に存在するすべての粒子は色の一重項になり、なぜ八重項のグルーオンが自由粒子として自然界に現れないかを「説明」できる*¹⁰。しかし、|9> は色一重項で

*⁹ たぶん「9番目のグルーオン」が光子なのだ！ それによって強い相互作用と電磁相互作用の美しい統一がなされる。もちろん、結合定数はまったく正しくないが、それはあらゆる統一方法に共通の問題で、おそらく乗り越えることができるだろう。このアイデアには、それよりもっと深刻な問題がある。それが何であるかを突き止めることは読者に委ねる (問題 8.10)。

*¹⁰ 「色一重項」と「無色」との違いに注意しよう。グルーオンの |3> と |8> は、それぞれの色の正味の量はゼロという観点では無色だが、色の一重項ではない。この状況にはスピンの理論との類推がある。 $S_z = 0$ の状態があっても、これがスピン 0 であるとは証明できない (スピン 0 なら確かに $S_z = 0$ だといえるし、同様に色一重項なら必ず無色であるが)。多くの研究者が「無色」という言葉を「カラー一重項」の意味として使うが、これは誤解を招く (さかのぼって 1 章と 2 章では、私はいい加減だった。というのも、その時点では色一重項という概念を説明することが不可能だったから)。(「色一重項」の代わりに)「色不変」という言葉を、あるいは「色スカラー」という言葉を好んで使ってもよいかもしれない。本質的なのは、そのような状態は色の $SU(3)$ 変換で不変だということだ (問題 8.12)。

あり、もしそれが媒介粒子として存在したとしたら、それもまた自由粒子であるべきだ。さらに、二つの色一重項（たとえば、陽子と中性子のような）の間で交換されてもよいので、それにより強結合による長距離力を発生させてもよい^{*11}。一方、実際には、強い力は非常に短距離までしか到達しないことを知っている。ということは、あきらかに、われわれの世界には 8 種類のグルーオンしか存在しないのだ^{*12}。

光子と同様、グルーオンはスピン 1 で質量ゼロの粒子である。これらは、グルーオン運動量 p に直交する偏極ベクトル ϵ^μ で表現される。

$$\epsilon^\mu p_\mu = 0 \quad (\text{ローレンツ条件}) \quad (8.31)$$

以前と同様に、クーロンゲージを採用する^{*13}。

$$\epsilon^0 = 0 \quad \text{それゆえ} \quad \epsilon \cdot p = 0 \quad (8.32)$$

これではローレンツ不変性の明白さを弱めてしまうが、それは避けようがない (7.4 節)。グルーオンの色の状態を記述するためには、さらに、 a という 8 成分の列ベクトルが必要である。

$$|1\rangle \text{ に対して } a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |7\rangle \text{ に対して } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{など} \quad (8.33)$$

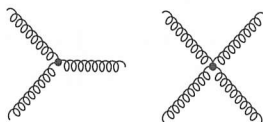
a の要素は、 (a^α) のように、ギリシャ文字の先頭の方の文字でラベル付けされる。

^{*11} グルーオンは質量をもたないので、(電気力学と同じように) 無限遠に到達する力を媒介する。この点では、二つのクォーク間の力は長距離力だ。しかし、閉じ込めが起こると、一重項グルーオンが存在しないことにより、長距離力が隠れてしまう。(陽子のような) 一重項状態は、(パイ中間子のような) 一重項だけを放出・吸収することができるので、個々のグルーオンが陽子と中性子の間で交換されることはない。だからこそ、われわれが観測する力は短距離力なのだ。もし一重項の光子が存在したら、一重項同士の間で交換され、強い力にも長距離力の成分があったであろう。

^{*12} 群論の用語では、ここでの問題は QCD を規定する対称性が (9 個のグルーオンが必要になる) $U(3)$ なのか (8 個で済む) $SU(3)$ なのかということだ。実験結果は、決定的に後者を支持している。

^{*13} ここには微妙な問題がある。色力学におけるゲージ変換は式 (7.81) よりもはるかに複雑だし、実際、首尾一貫してクーロンゲージ条件を課すことができない。しかしながら、式 (7.81) に対する補正は因子 g_s を含んでいるので、ファインマン則の計算方法によれば、クーロンゲージを導入することで生じた「誤差」は、高次の (ループ) ダイアグラムを計算する方法を適切に変更すれば補償することができる。

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ はグルーオンの色の状態に対応して 1 から 8 までの値を取る。(電荷に関して中性の光子とは対照的に) グルーオン自身が色をもつので, それぞれのグルーオン同士が直接結合する. 実際, グルーオンの 3 点バーテックスと 4 点バーテックスが存在する.



QCD のファインマン則を陳述する前に, 表記法に関して 2 点紹介する. 最初はゲルマンの「 λ 行列」だ. $SU(2)$ におけるパウリ行列の $SU(3)$ 版である.

$$\begin{aligned}
 \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & & (8.34)
 \end{aligned}$$

次に, λ 行列の交換関係が $SU(3)$ 群の「構造関数」($f^{\alpha\beta\gamma}$) を定義する

$$[\lambda^\alpha, \lambda^\beta] = 2if^{\alpha\beta\gamma}\lambda^\gamma \quad (8.35)$$

(ここで, 添字がくり返されているときは, 1 から 8 までの和を取ることを意味している). 構造関数は完璧に反対称で $f^{\beta\alpha\gamma} = f^{\alpha\gamma\beta} = -f^{\alpha\beta\gamma}$ となっている. これを読者自身で確認してほしい (問題 8.15). それぞれの添字の値は 1 から 8 までなので, 合計で $8 \times 8 \times 8 = 512$ 個の構造関数が存在するが, ほとんどの場合ゼロで, 残りは反対称性を使うことで, 以下から導出できる.

$$\begin{aligned}
 f^{123} &= 1, & f^{147} &= f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{516} = f^{637} = \frac{1}{2}, \\
 f^{458} &= f^{678} = \sqrt{3}/2 & & & (8.36)
 \end{aligned}$$

ここから, QCD におけるツリーレベルダイアグラムを計算するためのファインマン則について述べる.

1. 外線 運動量 p , スピン s , 色 c で外線のクォークは以下となる

$$\text{クォーク} : \begin{cases} \text{入射 } (\rightarrow \bullet) : u^{(s)}(p)c \\ \text{放出 } (\bullet \rightarrow) : \bar{u}^{(s)}(p)c^\dagger \end{cases} \quad (8.37)$$

($c^\dagger = c^{T*}$ は行列の行であることに注意せよ). 外線の反クォークについては以下だ.

$$\text{反クォーク} : \begin{cases} \text{入射 } (\leftarrow \bullet) : \bar{v}^{(s)}(p)c^\dagger \\ \text{放出 } (\bullet \leftarrow) : v^{(s)}(p)c \end{cases} \quad (8.38)$$

ここで, c は対応するクォークの色を表現している. 運動量 p , 偏極 ϵ , 色 c で外線のグルーオンに対しては以下の因子を加える

$$\text{グルーオン} : \begin{cases} \text{入射 } (\rightarrow \text{oooo} \bullet) : \epsilon_\mu(p)a^\alpha \\ \text{放出 } (\bullet \text{oooo} \leftarrow) : \epsilon_\mu^*(p)a^{\alpha*} \end{cases} \quad (8.39)$$

(混乱を避けるために, 使っているグルーオンそれぞれに対して時空と色の指標をそれぞれのダイアグラム上に書いておくと便利だ).

2. 伝播関数 それぞれの内線が以下の因子分の寄与を与える.

$$\text{クォークと反クォーク} : (\bullet \xrightarrow{q} \bullet) : \frac{i(\not{q} + mc)}{q^2 - m^2c^2} \quad (8.40)$$

$$\text{グルーオン} : (\text{oooo}_{\alpha, \mu} \xrightarrow{q} \text{oooo}_{\beta, \nu} \bullet) : \frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}}{q^2} \quad (8.41)$$

3. バーテックス それぞれのバーテックスで以下の因子が加わる.

$$\text{クォーク-グルーオン} : (\text{oooo}_{\alpha, \mu} \text{ vertex}) : \frac{-ig_s}{2} \lambda^{\alpha\gamma\mu} \quad (8.42)$$

$$\begin{aligned} \text{三つのグルーオン} : (\text{oooo}_{\alpha, \mu} \text{ vertex}) : \\ -g_s f^{\alpha\beta\gamma} [g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(k_2 - k_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(k_3 - k_1)_\nu] \end{aligned} \quad (8.43)$$

ここでは, グルーオンの運動量 (k_1, k_2, k_3) はバーテックスに向かっているとす. ダイアグラム中に逆を向いているものがあつたら, それらの符号を変えよ.

$$\text{四つのグルーオン} : (\text{oooo}_{\alpha, \mu} \text{ vertex}) :$$

$$\begin{aligned}
 & -i g_s^2 [f^{\alpha\beta\eta} f^{\gamma\delta\eta} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}) + f^{\alpha\delta\eta} f^{\beta\gamma\eta} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) \\
 & \quad + f^{\alpha\gamma\eta} f^{\delta\beta\eta} (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho})] \quad (8.44)
 \end{aligned}$$

(η についての和を取るとする.)

その他については QED と同様である*14. まず内部の 4 元運動量を定めるために, それぞれのバーテックスでのエネルギーと運動量保存を課す. 次に, 矢印に沿って「後ろ向き」にそれぞれのフェルミオンの線をたどり, 全体のデルタ関数を消し, i を掛けることで \mathcal{M} を得る. 次の二つの節で, それがどのようになるかを示すためのいくつかの例題をやってみる.

8.4 カラー囚子

この節では, 最低次の QCD における二つのクォーク間 (と, クォーク-反クォーク間) の相互作用を考察する. もちろん, われわれは実験室でクォーク-クォーク散乱を直接観測することはできない (ハドロン-ハドロン散乱は間接的な証拠ではあるが) ので, ここでは断面積を調べていくことはしない. その代わりに, クォーク間の有効ポテンシャルを集中して見ていく. 電気力学におけるクーロンポテンシャルの QCD 版だ. 5 章でクォークの解析をしたときに, 後に導出を行うという約束をしたうえでそのような有効ポテンシャルを使った. これは摂動理論の計算であることを肝に銘じてほしい. つまり, 結合定数 α_s が十分小さいときに限り有効だ. この方法でポテンシャル中の閉じ込めの項を扱う希望を抱いてはならない. われわれは暗に漸近的自由に頼っていて, 見出すことができるのは短距離での振る舞いだけだ. それでも, 次の非常に含蓄のある結果を得るであろう. それは, クォークはカラー一重項の配位のとときに, 最も強く互いを引きつけ合うということだ. (実際, 他の配位では斥力になる.) そうすると, 非常に短距離ではカラー一重項が「最大の引力チャンネル」になる. それは, おそらく少なくともカラー一重項には束縛力が働いていることを示している*15.

*14 QCD におけるループのダイアグラムは, いわゆる「ファディエーフ-ポポフの幽霊」の導入を含む特別なルールを必要とする. これらは上級者向けなので, ここでは挑戦しない [3]. 訳注: ファインマン則にかかる計算は, 場の量子論の経路積分での計算に対応する. 幽霊 (ゴースト) は, 非可換ゲージ場を正しく量子化するために, 計算のときだけ必要な仮想的な場で, スカラーであるにもかかわらずフェルミ統計に従い, また, ループの中にしか登場しない (外線には登場しない) 実在しない場である.

*15 これは非常に喜ばしい結論だが, カラー一重項で束縛が発生していることの証明にはならず, 他の配位で発生しないことの証明にもなっていない. これを証明するためには, ポテンシャルの長距離での振る舞いを知る必要があるが, 現在のところ推測しかできない.

8.4.1 クォークと反クォーク

まず最初に、QCDにおけるクォークと反クォークとの相互作用について考察しよう。それらのクォークは異なるフレーバーだと仮定する。すると、(最低次で)可能なダイアグラムは、たとえば、 $u + \bar{d} \rightarrow u + \bar{d}$ を表現する図8.6中のものだけだ^{*16}。その振幅は

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & i[\bar{u}(3)c_3^\dagger] \left[-i\frac{g_s}{2}\lambda^\alpha\gamma^\mu \right] [u(1)c_1] \left[\frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}}{q^2} \right] \\ & \times [\bar{v}(2)c_2^\dagger] \left[-i\frac{g_s}{2}\lambda^\beta\gamma^\nu \right] [v(4)c_4] \end{aligned} \quad (8.45)$$

と得られる。ゆえに、

$$\mathcal{M} = -\frac{g_s^2}{4q^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)] [\bar{v}(2)\gamma_\mu v(4)] (c_3^\dagger\lambda^\alpha c_1)(c_2^\dagger\lambda^\alpha c_4) \quad (8.46)$$

である (α に関しては和を取る)。これは、(もちろん) g_e を g_s に置き換えることと、それに加えて「カラー因子」、

$$f = \frac{1}{4}(c_3^\dagger\lambda^\alpha c_1)(c_2^\dagger\lambda^\alpha c_4) \quad (8.47)$$

があることを除けば、電子-陽電子散乱に対するもの(式(7.108))とまったく同じだ。よって、 $q\bar{q}$ 相互作用を記述するポテンシャルは、 α を $f\alpha_s$ に置き換えれば、二つの逆符号の電荷間に働く電気力学のポテンシャル(すなわち、クーロンポテンシャル)と同じだ。

$$V_{q\bar{q}}(r) = -f\frac{\alpha_s\hbar c}{r} \quad (8.48)$$

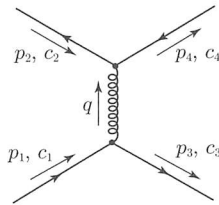


図8.6 クォーク-反クォークの相互作用

^{*16} 原理的には、同じフレーバーだと(たとえば $u + \bar{u} \rightarrow u + \bar{u}$)電子-陽電子散乱のように(図7.5)、2番目のダイアグラムも入れるべきだ。しかし、ここでの議論の対象の非相対論極限では、その2番目のダイアグラムはいずれにせよ寄与がないので(7章の脚注*26を参照)、実際問題としていま行おうとしていることは、クォークのフレーバーによらず適用可能だ(問題8.17も見よ)。

さて、カラー因子は相互作用をするクォークの状態に依存している。1対のクォークと反クォークから式(8.30)のカラー一重項と式(8.29)のカラー八重項をつくれる(すべてのメンバーに同じ f が生じる)。まず最初に、カラー八重項のカラー因子を計算してみる。というのも、それが少しだけ他よりも簡単だからだ [4]。

例題 8.1 八重項のカラー因子 典型的な八重項状態 (式(8.29)) は、 $r\bar{b}$ である (他のどの組み合わせでも同様である。問題 8.16 を参照)。ここでは、入ってくるクォークは赤で、反クォークは反青とする。カラーは保存するので^{*17}、外に出て行くクォークも赤のまま、反クォークは反青のままではなければならない。ゆえに、

$$c_1 = c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$f = \frac{1}{4} \left[(1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[(0 \ 1 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha$$

となる。 λ 行列を見ると、11 と 22 の位置に入るものが λ^3 と λ^8 だけだということがわかる。よって

$$f = \frac{1}{4} (\lambda_{11}^3 \lambda_{22}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{22}^8) = \frac{1}{4} [(1)(-1) + (1/\sqrt{3})(1/\sqrt{3})] = -\frac{1}{6} \quad (8.49)$$

である。

例題 8.2 一重項の配位に対するカラー因子 カラー一重項状態 (式(8.30)) は

$$(1/\sqrt{3})(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})$$

である。もし入ってくるクォークと反クォークが (たとえば中間子のように) 一重項状態ならば、カラー因子は三つの項の和である。

$$f = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left[c_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] [(1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha c_4] + \left[c_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] [(0 \ 1 \ 0) \lambda^\alpha c_4] \right.$$

^{*17} そう、クォークのカラーは QCD のパーテックスで変わってもよいが、この場合、外に出て行く反クォークが赤をもち出せないで、外に出て行くクォークが赤を持ち出さなければならない。

$$+ \left[c_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] [(0 \ 0 \ 1) \lambda^\alpha c_4] \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

外に出て行くクォークと反クォークも一重項状態でなければならず、合計で九つの項をもち、以下のようにコンパクトに書ける (i と j に関する和は 1 から 3 までで、2 番目の表現ではその添字を省略している).

$$f = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} (\lambda_{ij}^\alpha \lambda_{ji}^\alpha) = \frac{1}{12} \text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\alpha) \quad (8.50)$$

すると,

$$\text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\beta) = 2\delta^{\alpha\beta} \quad (8.51)$$

となるので (問題 8.13), α に関する (1 から 8 までの) 和を取ると

$$\text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\alpha) = 16 \quad (8.52)$$

となる. ということは, カラー一重項に対してはあきらかに

$$f = 4/3 \quad (8.53)$$

である.

式 (8.49) と (8.53) を式 (8.48) に代入すると, クォーク-反クォーク間のポテンシャルは

$$V_{q\bar{q}}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s \hbar c}{r} \quad (\text{カラー一重項}) \quad (8.54)$$

$$V_{q\bar{q}}(r) = \frac{1}{6} \frac{\alpha_s \hbar c}{r} \quad (\text{カラー八重項}) \quad (8.55)$$

であると結論づけられる. 符号からあきらかなのは, カラー一重項は引力だが, カラー八重項は斥力だということだ. これにより, クォーク-反クォークの束縛 (中間子の形成) が一重項の配位では起きるが, (カラー) 八重項 (これがあれば色をもつ中間子が生成されるだろう) には束縛がないことを説明できる.

8.4.2 クォークとクォーク

今度は二つのクォークの相互作用についてやってみる. ここでもまた, それらは異なるフレーバーをもっているので, (最低次の) 唯一のダイアグラムは図 8.7 に示され

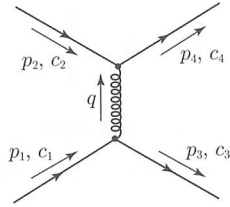


図 8.7 クォーク-クォーク相互作用

るような、たとえば、 $u + d \rightarrow u + d$ を表現するものと仮定する^{*18}。その振幅は

$$\mathcal{M} = \frac{-g_s^2}{4} \frac{1}{q^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)] [\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)] (c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1) (c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2) \quad (8.56)$$

である。これは、 g_e が g_s に置き換わっている点とカラー因子、

$$f = \frac{1}{4} (c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1) (c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2) \quad (8.57)$$

がある点を除けば、電子-ミュー粒子散乱 (式 (7.106)) と同じだ。それゆえ、ポテンシャルは、電気力学での同符号電荷に対するポテンシャルと同じかたちになる。

$$V_{qq}(r) = f \frac{\alpha_s \hbar c}{r} \quad (8.58)$$

そして再び、カラー因子はクォークの配位に依存する。しかし、二つのクォークからは ($q\bar{q}$ のような) 一重項や八重項をつくることはできず、三重項 (反対称の組み合わせ)、

$$\begin{cases} (rb - br)/\sqrt{2} \\ (bg - gb)/\sqrt{2} \\ (gr - rg)/\sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{三重項}) \quad (8.59)$$

と、六重項 (対称の組み合わせ)^{*19}、

$$\begin{cases} rr, bb, gg, \\ (rb + br)/\sqrt{2}, (bg + gb)/\sqrt{2}, (gr + rg)/\sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{六重項}) \quad (8.60)$$

を得る。

例題 8.3 六重項の配位に対するカラー因子 典型的な六重項状態は rr だ (お好みで他のどれを使ってもよい。 f について同じ結果を得るだろう)。この場合、

^{*18} 同一のクォークには「交差」ダイアグラムが存在する。しかし、断面積の公式に統計因子の S を加えてこのダイアグラムを含めると、非相対論的極限は同じになる (7章の脚注 *26 を参照) ので、実際のところ、われわれのポテンシャルは同じフレーバーのクォークに対しても正しい。

^{*19} 群論の言葉では、 $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$ だが、 $3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6$ である。

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で、ゆえに、

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{4} \left[(1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[(1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} (\lambda_{11}^\alpha \lambda_{11}^\alpha) \\ &= \frac{1}{4} (\lambda_{11}^3 \lambda_{11}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{11}^8) = \frac{1}{4} [(1)(1) + (1/\sqrt{3})(1/\sqrt{3})] = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (8.61)$$

である。

例題 8.4 三重項の配位に対するカラー因子 典型的な三重項状態は $(rb - br)/\sqrt{2}$ なので*20,

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[(1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[(0 \ 1 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right. \\ &\quad - \left[(0 \ 1 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[(1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad - \left[(1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[(0 \ 1 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad \left. + \left[(0 \ 1 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[(1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{8} (\lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha - \lambda_{21}^\alpha \lambda_{12}^\alpha - \lambda_{12}^\alpha \lambda_{21}^\alpha + \lambda_{22}^\alpha \lambda_{11}^\alpha) \\ &= \frac{1}{4} (\lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha - \lambda_{12}^\alpha \lambda_{21}^\alpha) \\ &= \frac{1}{4} (\lambda_{11}^3 \lambda_{22}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{22}^8 - \lambda_{12}^1 \lambda_{21}^1 - \lambda_{12}^2 \lambda_{21}^2) \\ &= \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{3} - 1 - 1 \right) = -\frac{2}{3} \end{aligned} \quad (8.62)$$

である。

式 (8.61) と (8.62) を式 (8.58) に代入すると、クォーククォークのポテンシャルは

*20 ここで、 $(rb - br) \rightarrow (rb - br)$ なので、四つの項がある。模式的に書くと、 $rb \rightarrow rb$, $rb \rightarrow -br$, $-br \rightarrow rb$, $-br \rightarrow -br$ だ (最後の項では因子 -1 は打ち消される)。

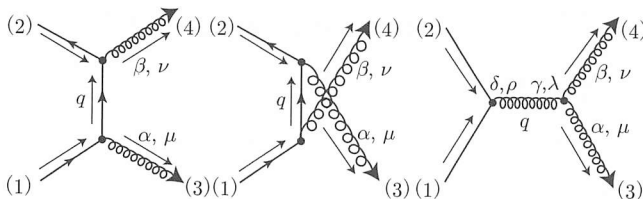
$$V_{qq}(r) = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_s \hbar c}{r} \quad (\text{カラー三重項}) \quad (8.63)$$

$$V_{qq}(r) = \frac{1}{3} \frac{\alpha_s \hbar c}{r} \quad (\text{カラー六重項}) \quad (8.64)$$

であると結論づけられる。その符号を見ると、三重項では力が引力で、六重項では斥力であることがわかる。もちろん、自然界にはそのような組み合わせは起こらないので、そのような意味づけはあまり役に立たない*21。けれども、それには三つのクォークの束縛に対する興味深い示唆がある。今度は、5.6.1項で見出したように、一つの(完全に反対称な)一重項と、一つの(完全に対称な)十重項と、二つの(対称性の混じり合った)八重項をつくることができる*22。一重項は完璧に反対称なので、すべてのクォーク対が(反対称な)三重項状態になる。すなわち、引力を及ぼすチャンネルだ。十重項では、すべての対が(対称な)八重項状態で、それらは反発し合う。二つの八重項に関しては、三重項の対もあれば、八重項の対もあることから、引力のときもあれば斥力のときもあると予想する。しかし、一重項状態のときのみ三つのクォーク同士それぞれが完璧に引きつけ合う。これもまた満足な結果だ。中間子の場合と同様に、クォークがカラー一重項の配位のときにポテンシャルは最も束縛力になりやすい。

8.5 QCD における対消滅

この節では、クォークと反クォークが二つのグルーオンになるという、対消滅のQCD版を取り扱う。計算は、例題7.8に非常によく似ている。しかし、QCDには、寄与するダイアグラムが最低次で3個ある。



*21 もし 8.4 節の脚注 *14 にある注意に耳を傾けなかったら、三重項中の二つのクォークがそれぞれを引きつけ合うということを見出して気になったかもしれない。一重項 $q\bar{q}$ の結合が 2 倍の強さだという観測事実により少しは気が楽になるが、それでも、この話だけからだと、三重項の qq の束縛が起こって自由「ダイクォーク」状態ができることを期待してしまう。実際、原子核中にダイクォークが存在する可能性についてのいくつかの推察があった [5]。

*22 5 章では、色ではなく、フレーバーを取り扱ったが、数学は一緒だ。群論的には、 $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$ である。

最初のダイアグラムの振幅は

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = i\bar{v}(2)c_2^\dagger \left[-i\frac{g_s}{2}\lambda^\beta\gamma^\nu \right] [\epsilon_{4\nu}^* a_4^{\beta*}] \left[\frac{i(\not{q} + mc)}{q^2 - m^2c^2} \right] \\ \times \left[-i\frac{g_s}{2}\lambda^\alpha\gamma^\mu \right] [\epsilon_{3\mu}^* a_3^{\alpha*}] u(1)c_1 \end{aligned} \quad (8.65)$$

である(すでに重荷となっている表記をすっきりさせるために, グルーオンの偏極ベクトルと色の状態からアスタリスクを最後まで落としてしまう). ここで, $q = p_1 - p_3$ なので,

$$q^2 - m^2c^2 = p_1^2 - 2p_1 \cdot p_3 + p_3^2 - m^2c^2 = -2p_1 \cdot p_3 \quad (8.66)$$

となり, ゆえに,

$$\mathcal{M}_1 = \frac{-g_s^2}{8} \frac{1}{p_1 \cdot p_3} \{ \bar{v}(2) [\not{\epsilon}_4 (\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc) \not{\epsilon}_3] u(1) \} a_3^\alpha a_4^\beta (c_2^\dagger \lambda^\beta \lambda^\alpha c_1) \quad (8.67)$$

である. 同様に, 2番目のダイアグラムに対しては

$$\mathcal{M}_2 = \frac{-g_s^2}{8} \frac{1}{p_1 \cdot p_4} \{ \bar{v}(2) [\not{\epsilon}_3 (\not{p}_1 - \not{p}_4 + mc) \not{\epsilon}_4] u(1) \} a_3^\alpha a_4^\beta (c_2^\dagger \lambda^\alpha \lambda^\beta c_1) \quad (8.68)$$

となる. λ が今度は逆の順番で表れていることに注意しよう. 最後に, 3番目のダイアグラムに対しては

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3 = i\bar{v}(2)c_2^\dagger \left[-i\frac{g_s}{2}\lambda^\delta\gamma^\sigma \right] u(1)c_1 \left[-i\frac{g^{\sigma\lambda}\delta^\delta\gamma}{q^2} \right] \{ -g_s f^{\alpha\beta\gamma} [g_{\mu\nu}(-p_3 + p_4)_\lambda \\ + g_{\nu\lambda}(-p_4 - q)_\mu + g_{\lambda\mu}(q + p_3)_\nu] \} [\epsilon_3^\mu a_3^\alpha] [\epsilon_4^\nu a_4^\beta] \end{aligned} \quad (8.69)$$

を得る. 今度は, $q = p_3 + p_4$ なので, $q^2 = 2p_3 \cdot p_4$ である. 整理すると (かつ, $\epsilon_3 \cdot p_3 = \epsilon_4 \cdot p_4 = 0$ を使い),

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3 = i\frac{g_s^2}{4} \frac{1}{p_3 \cdot p_4} \bar{v}(2) [(\epsilon_3 \cdot \epsilon_4)(\not{p}_4 - \not{p}_3) + 2(p_3 \cdot \epsilon_4)\not{\epsilon}_3 - 2(p_4 \cdot \epsilon_3)\not{\epsilon}_4] u(1) \\ \times f^{\alpha\beta\gamma} a_3^\alpha a_4^\beta (c_2^\dagger \lambda^\gamma c_1) \end{aligned} \quad (8.70)$$

を見出す (問題 8.20).

いままでのところ, これらすべては完全に一般的である (そして, かなり乱雑である). もう少しすっきりさせるために, (e^+e^- 対消滅の計算でもそうしたように) 初期状態の粒子は静止していると仮定しよう.

$$p_1 = p_2 = (mc, \mathbf{0}), \quad p_3 = (mc, \mathbf{p}), \quad p_4 = (mc, -\mathbf{p}) \quad (8.71)$$

すると,

$$p_1 \cdot p_3 = p_1 \cdot p_4 = (mc)^2, \quad p_3 \cdot p_4 = 2(mc)^2 \quad (8.72)$$

となる. 一方, クーロンゲージでは (式 (8.32)),

$$p_3 \cdot \epsilon_4 = -\mathbf{p} \cdot \epsilon_4 = -p_4 \cdot \epsilon_4 = 0 \quad (8.73)$$

である (同様に, $p_4 \cdot \epsilon_3 = 0$). よって, \mathcal{M}_3 中の二つの項は消える. \mathcal{M}_1 と \mathcal{M}_2 を整理するために式 (7.140) と (7.141) を使うと, 全振幅 ($\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3$) は

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & -\frac{g_s^2}{8(mc)^2} a_3^\alpha a_4^\beta \bar{v}(2) c_2^\dagger [\not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4 \not{p}_4 \lambda^\alpha \lambda^\beta + \not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 \not{p}_3 \lambda^\beta \lambda^\alpha \\ & - i(\epsilon_3 \cdot \epsilon_4)(\not{p}_4 - \not{p}_3) f^{\alpha\beta\gamma} \lambda^\gamma] c_1 u(1) \end{aligned} \quad (8.74)$$

となることがわかる. z 軸が \mathbf{p} の方向を向くように座標系を取ってもよい. すると,

$$\not{p}_3 = mc(\gamma^0 - \gamma^3), \quad \not{p}_4 = mc(\gamma^0 + \gamma^3), \quad \not{p}_4 - \not{p}_3 = 2mc\gamma^3 \quad (8.75)$$

となる. 式 (7.145) と (7.146) から,

$$\not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4 = -(\epsilon_3 \cdot \epsilon_4) - i(\epsilon_3 \times \epsilon_4) \cdot \Sigma, \quad \not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 = -(\epsilon_3 \cdot \epsilon_4) + i(\epsilon_3 \times \epsilon_4) \cdot \Sigma \quad (8.76)$$

を得る. これを式 (8.74) に代入し, λ の交換関係 (式 (8.35)) を利用すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{g_s^2}{8mc} a_3^\alpha a_4^\beta \bar{v}(2) c_2^\dagger [(\epsilon_3 \cdot \epsilon_4) \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} \gamma^0 \\ & + i(\epsilon_3 \times \epsilon_4) \cdot \Sigma([\lambda^\alpha, \lambda^\beta] \gamma^0 + \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} \gamma^3)] c_1 u(1) \end{aligned} \quad (8.77)$$

を得る. ここで, 中括弧は反交換関係 $\{A, B\} \equiv AB + BA$ を表す. この結果を対応する QED における式 (7.146) と比較してもよい. そうするには, すべての λ を 1 にして, 色の状態 a と c を落とし, $g_s/2 \rightarrow g_e$ とする.

ここで, 二つのクォークをスピン 0 (一重項) 状態だとしよう (三重項状態はいずれにせよ二つのグルーオンには行けない. 最低 3 個必要だ).

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} - \mathcal{M}_{\downarrow\uparrow})/\sqrt{2} \quad (8.78)$$

$\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow}$ に対して, それぞれ

$$\bar{v}(2)\gamma^0 u(1) = \bar{v}(2)\Sigma\gamma^0 u(1) = 0, \quad \bar{v}(2)\Sigma\gamma^3 u(1) = -2mc\hat{z} \quad (8.79)$$

となる (式 (7.153) と (7.154)). 以前と同様に, $\mathcal{M}_{1\uparrow} = -\mathcal{M}_{1\downarrow}$ なので,

$$\mathcal{M} = -i\sqrt{2} \frac{g_s^2}{4} (\epsilon_3 \times \epsilon_4)_z a_3^\alpha a_4^\beta (c_2^\dagger \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} c_1) \quad (\text{スピン一重項}) \quad (8.80)$$

が残る*23. $g_e \rightarrow g_s$ とカラー因子があることを除くと, もう一度, QED での式 (7.158) と同じ式を得る.

$$f = \frac{1}{8} a_3^\alpha a_4^\beta (c_2^\dagger \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} c_1) \quad (8.81)$$

とくに, 二つのクォークがもしカラー一重項状態 $(1/\sqrt{3})(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})$ であるなら,

$$f = \frac{1}{8} a_3^\alpha a_4^\beta \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ (1 \ 0 \ 0) \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0 \ 1 \ 0) \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (0 \ 0 \ 1) \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{8\sqrt{3}} a_3^\alpha a_4^\beta \text{Tr} \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\}$$

となる. しかし,

$$\text{Tr} \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} = 2 \text{Tr} (\lambda^\alpha \lambda^\beta) = 4\delta^{\alpha\beta} \quad (8.82)$$

なので (問題 8.13),

$$f = \frac{1}{2\sqrt{3}} a_3^\alpha a_4^\alpha \quad (\text{カラー一重項}) \quad (8.83)$$

である. そして, 二つのグルーオンの一重項状態は,

$$| \text{一重項} \rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{n=1}^8 |n\rangle_1 |n\rangle_2 \quad (8.84)$$

である (問題 8.22). あきらかに,

$$a_3^\alpha a_4^\alpha = \frac{1}{\sqrt{8}} (8) = 2\sqrt{2} \quad (8.85)$$

なので,

$$f = \sqrt{2/3} \quad (8.86)$$

*23 この段階で, すべての $\epsilon_3 \cdot \epsilon_4$ の項が落ちる. \mathcal{M} が $\epsilon_3 \cdot \epsilon_4$ に比例するという事実 (式 (8.74)) が意味するのは, 二つのクォークがスピン一重項状態で静止しているときは, グルーオンの 3 点パーテックスを含むダイアグラムは寄与しないということである. たいていの本ではその寄与を最初から無視しているが, 原理的には無視すべきではない (問題 8.21).

である.

結論:二つのクォークが静止した, スピン一重項, かつカラー一重項の配位での $q + \bar{q} \rightarrow g + g$ では, その振幅は,

$$\mathcal{M} = -4\sqrt{2/3}g_s^2 \quad (8.87)$$

であり (式 (7.163) と比較せよ), 断面積は,

$$\sigma = \frac{24\pi}{3cv} \left(\frac{\hbar\alpha_s}{m} \right)^2 \quad (8.88)$$

である (式 (7.168)). $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ の断面積がポジトロニウムの崩壊幅,

$$\Gamma = \sigma v |\psi(0)|^2 \quad (8.89)$$

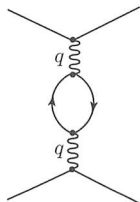
を決める (式 (7.171)) のと同様に, われわれは η_c のような (ψ や Υ は自分自身がスピン 1 なので, 三つのグルーオンに行く) スピン 0 のクォーコニウム状態の崩壊の式を導き出すことができる.

$$\Gamma(\eta_c \rightarrow 2g) = \frac{8\pi}{3c} \left(\frac{\hbar\alpha_s}{m} \right)^2 |\psi(0)|^2 \quad (8.90)$$

この式が示すように, これはきわめて便利というわけではない. われわれは $\psi(0)$ を知らないからだ. しかし, 電磁崩壊である $\eta_c \rightarrow 2\gamma$ は同じ因子をもち, 崩壊比のすっきりとした式を導き出すことができる (問題 8.23).

8.6 漸近的自由

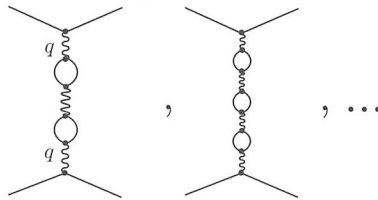
7章の最後の節で, QED では次のループダイアグラム



によって電子の有効電荷が運動量遷移 q の関数になることを見た*24.

$$\alpha(|q^2|) = \alpha(0) \left\{ 1 + \frac{\alpha(0)}{3\pi} \ln(|q^2|/(mc)^2) \right\} \quad (|q^2| = -q^2 \gg (mc)^2) \quad (8.91)$$

結合定数は電荷同士が近づくと ($|q^2|$ が大きくなると), 物理的に「真空偏極」のせいだと解釈できる事実により, 増大する. 真空がある種の誘電体のような働きをして, 電荷を部分的に遮蔽するのだ. より近づくと, 遮蔽が不完全になり, 有効電荷が大きくなる. もちろん, 式 (8.91) は $\alpha(0)^2$ のオーダーでのみ成立する. より高次元補正が存在し, その中で支配的なのは泡のチェーンをもつものだ.



それが起こると, これらは実際に足しあげることができ, その結果は

$$\alpha(|q^2|) = \frac{\alpha(0)}{1 - [\alpha(0)/3\pi] \ln[|q^2|/(mc)^2]} \quad (|q^2| \gg (mc)^2) \quad (8.92)$$

となる*25. 表向きは, 結合定数は $\ln[|q^2|/(mc)^2] = 3\pi/\alpha(0)$ で発散する*26. しかし, これはあまり真剣に受け取らなくてよい. これは約 10^{280} MeV で起こり, (控えめにいっても) 到達可能な領域ではないからだ (問題 8.24).

まったく同じことが QCD でも起こる. クォーク-反クォークによる泡が, クォークのカラーを遮蔽する.

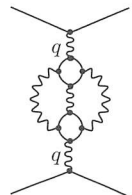
*24 「くりこみ」により吸収する発散項も表れる (式 (7.189)). しかし, それはまったく別の問題だ. それは (原理的には厄介であることがわかるが) 観測結果を生まず, いったん適切な呪文を唱えれば, さらなる重要性をもたない. α の q^2 に対する完全に有限な依存性は重大事実である. なぜなら, それによって直接的かつ測定可能な影響があるからだ.

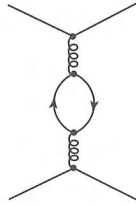
*25 これはそれほど驚くべきことではない. 実際にあるのは, 幾何学的な展開だ.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

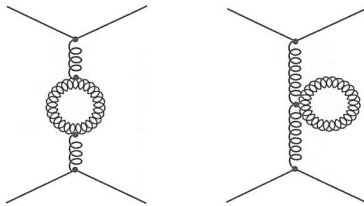
ここで, x は泡が一つするとき, x^2 は泡が二つのとき, などである. 式 (8.92) は $\alpha(0)$ のすべてのオーダーで正しいが, 正確ではない. われわれは右図のようなダイアグラムを無視しているからだ. これらは $|q^2| \ll (mc)^2$ の極限ではずっと小さい寄与であることを示せる. 式 (8.92) は「対数第一」近似として知られている.

*26 訳注: ランダウ・ポールとよばれる.

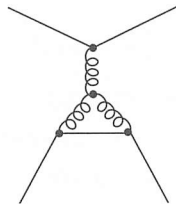




この遮蔽 (適切なカラー因子を使えば) は式 (8.91) と同様の効果を与える. しかし, 話はここでは終わらない. QCD には仮想グルーオンの泡や,



以下のようなかたちのダイアグラムも存在するからだ.



グルーオンによる寄与の向きは逆で, 「反遮蔽」あるいは「カムフラージュ」の効果を生み出すことがわかっている [6]. 私はこの効果に関して説得力のある定性的な説明を知らない [7]. QCD における走る結合定数の公式 (式 (8.92) の類似) は

$$\alpha_s(|q^2|) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + [\alpha_s(\mu^2)/12\pi](11n - 2f) \ln(|q^2|/\mu^2)} \quad (|q^2| \gg \mu^2) \quad (8.93)$$

となる, ということを用いてとどめておこう. ここで, n は色の数 (標準模型では 3) で, f はフレーバーの数 (標準模型では 6) である. $11n > 2f$ であるいかなる理論でも, 反遮蔽が支配的で, $|q^2|$ が増加するに従い結合定数は小さくなる. 短距離では, 「強い」力が比較的弱くなるのだ. これが漸近的自由の源で, ハドロンについて定量的にいえることの多くがこれによって予言される. 漸近的自由こそが, クォーク間に働

くポテンシャルを計算するために QCD のファインマン則を適用できる条件なのだ。また、クォークの理論に対する基本的な材料であり、おそらく OZI 則を決めているものなのだ。もし漸近的自由がよいタイミングで発見されていなかったら、量子色力学は存在しなかったであろう [8]。

式 (8.93) に新しいパラメーター μ が現れていることに気づくだろう。量子電気力学では、「電荷」を長距離での（完全に遮蔽されている）値で定義することが自然だ。それこそ、クーロンとミリカンが測定したものであり、エンジニアや化学者や原子物理学者さえもが（ラムシフトを測定しようとするのでなければ）取り扱うものだ。ゆえに、 $\alpha(0)$ が「古きよき」微細構造定数 $1/137$ であり、摂動展開で重要となってくるパラメーターだ。しかしながら、必ずしもそのように定義しなくてもよい。別のどんな q^2 での値を使っても構わない ($\alpha(|q^2|)$ が、1 よりも大きくなって摂動の理論が破綻してしまうような、つまり、式 (8.92) 中の特異点よりも十分低いところにいる限りは)。しかし、QCD では、 $q^2 = 0$ では α_s が大きすぎて基準にできない。摂動展開が保証されるように α_s が小さくなるエネルギー値を基準として使わなければならない。そのために、式 (8.93) は $\alpha_s(0)$ の代わりに $\alpha_s(\mu^2)$ の関数となっている。 $\alpha_s(\mu^2) < 1$ となるように μ を十分大きくとれば、 μ としてどんな値を使っても構わない（問題 8.25）。実際、

$$\ln \Lambda^2 = \ln \mu^2 - 12\pi / [(11n - 2f)\alpha_s(\mu^2)] \quad (8.94)$$

と定義される新たな変数 Λ を導入すると、走る結合定数は一つのパラメーターの関数として表現できる（問題 8.26）。

$$\alpha_s(|q^2|) = \frac{12\pi}{(11n - 2f) \ln(|q^2|/\Lambda^2)} \quad (|q^2| \gg \Lambda^2) \quad (8.95)$$

このコンパクトな結果は、定数 Λ の関数として、あらゆる $|q^2|$ における、強い相互作用の結合定数の値を明示的に示している。残念なことに、実験データから Λ を精度よく決めることは難しいが、 Λ_c はどうやら

$$100 \text{ MeV} < \Lambda_c < 500 \text{ MeV} \quad (8.96)$$

という領域にあるらしい。QED の結合定数は到達可能なエネルギー領域内でゆっくりとしか変化しない（問題 8.24）一方で、QCD の結合定数の変動はかなり大きい（問題 8.27）ことに注意せよ。

参 考 書

- [1] M. N. Rosenbluth: *Physical Review*, **79**, 615 (1950).
- [2] たとえば, H. Frauenfelder and E. M. Henley: *Subatomic Physics*, 2nd edn (Prentice-Hall, 1991) Chapter 6. 本文献では, この話題は表記の悪夢であると警告せざるを得ない. この問題には, 入射電子エネルギー (E) と散乱角 (θ) の二つの変数しかないが, $E, E', \theta, q^2, Q^2 \equiv -q^2, \tau \equiv q^2/4M^2c^2, \nu \equiv p \cdot q/Mc, \omega \equiv -2p \cdot q/q^2, W \equiv \sqrt{(q+p)^2}, x \equiv -q^2/2p \cdot q, y \equiv p \cdot q/p \cdot p_1$ を混ぜこぜに使うことが多い. さらに, 独立した形状因子は二つしかなくにもかかわらず, 表現する方法はいろいろある. $K_1 = -q^2(F_1 + KF_2)^2, K_2 = (2Mc)^2F_1^2 - K^2q^2F_2^2$ ($K = 1.7928$ は陽子の磁気モーメント) と書いたときの F_1 と F_2 を好む者もいれば, $G_E = F_1 - K\tau F_2, G_M = F_1 + KF_2$ を好む者もいる (後者は, 電荷および磁気モーメントの分布のフーリエ変換に関連する. 以下を参照. (a) F. Halzen and A. D. Martin: *Quarks and Leptons* (John Wiley & Sons, 1984) Sect. 8.2.). 誰でもこの種のゲームをやれる. K_1, K_2 を私は使う.
- [3] 興味のある読者は, 古典的論文を読むことをすすめる. E. S. Abers and B. W. Lee: *Physics Reports*, **C 9**, 1 (1973).
- [4] 自分の指でカラー因子を計算できる人もいるようだ. 誰もが自分のやり方をもっている. 以下を参照. D. H. Perkins: *Introduction to High-Energy Physics*, 2nd edn (Addison-Wesley, 1982) Appendix G (3版(1987)ではAppendix J, と4版(Cambridge University Press, 2000)では削除された); (a) F. Halzen and A. D. Martin: *Quarks and Leptons* (John Wiley & Sons, 1984) 211, Section 2.15; (b) C. Quigg: *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions* (Addison Wesley, 1997) 198-199. 私はここに示されているような着実な方法で計算することを好む. これは以下のアプローチの精神に近い. (c) G. L. Kane: *Color Symmetry and Quark Confinement*, *Proceedings of the 12th Rencontre de Moriond*, vol. **III**, ed. J. Tran Thanh Van (Frontières, 1977) 9.
- [5] F. Close: *Demon Nuclei*, *Nature*, **296**, 305 (1982).
- [6] C. Quigg: *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*, (Addison Wesley, 1997) 198-199. Sect. 8.3.
- [7] 以下も参照. C. Quigg: *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions* (Addison Wesley, 1997) 223; *Scientific American*, **84** (April 1985).
- [8] H. D. Politzer: *Physical Review Letters*, **30**, 1346 (1973); *Physics Reports*, **C 14**, 130 (1974); (a) D. J. Gross and F. Wilczek: *Physical Review Letters*, **30**, 1343 (1973).

問 題

- 8.1 (a) QED のファインマン則から式 (8.1) を導出せよ.
 (b) 式 (8.1) から (8.2) を導出せよ.
 (c) 式 (8.2) から (8.3) を導出せよ.
 (d) 式 (8.3) から (8.4) を導出せよ.
- 8.2 式 (8.4) から (8.5) を導出せよ.
- 8.3 R (式 (8.7)) の定義で分母に $\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)$ を使わないのはなぜだろうか.
- 8.4 式 (8.16) を証明せよ. [ヒント: まず $q_\mu L^{\mu\nu} = 0$ を示す. すると, $q_\mu K^{\mu\nu} = 0$ に従わない $K^{\mu\nu}$ は $L^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ に寄与しないので $K^{\mu\nu}$ は $q_\mu K^{\mu\nu} = 0$ としてよい.]

コメント：式(8.16)は実際には陽子バーテックスでの電荷保存から、より簡単に、そして、より一般的に導かれるが、ここではこの議論をするための公式を導出ししない (Halzen and Martin [2] Sect. 8.2, 8.3を参照)。[もう一つの方法として、 $q^\mu = (0, 0, 0, q)$ だから、

$$q_\mu L^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow L^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって } L^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & x & & \\ & x & & \\ & x & & \\ x & x & x & x \end{pmatrix}$$

ここで x は任意なので 0 としてもよい.]

- 8.5 式(8.16)から(8.17)を証明せよ。[ヒント：まず $K^{\mu\nu}$ を q_μ で縮約を取り、次に、 p_ν で縮約を取る.]
- 8.6 「ディラック」陽子 (式(8.25)) について、 K_1 と K_2 、さらに G_E と G_M を見つけよ。
- 8.7 式(8.19)を導け。
- 8.8 式(8.20)を導け。
- 8.9 式(8.21)を導け。
- 8.10 ローゼンブルース公式(8.23)が、中間エネルギー領域 ($mc^2 \ll E \ll Mc^2$) で、モット公式(7.131)と合致することを確認せよ。「ディラック」陽子 (問題8.6) の K_1 、 K_2 を用いること。
- 8.11 なぜ9番目のグルーオンは光子ではないのだろうか。[答え：グルーオンは、同じ強さですべてのバリオンに結合する。一方、光子は電荷に比例した強さで結合する。質量とバリオン数は物質の量におおよそ比例するので、その力は重力による余分な寄与によく似ている。1986年の初期にこの可能性に一時関心が高まった。[E. Fischbach *et al.*: Phys. Rev. Lett., **56**, 3 (1986)。ただし、Phys. Rev. Lett., **56**, 2423 (1986) のコメントも参照。]
- 8.12 カラー $SU(3)$ は変換則に従って「赤」、「青」、「緑」のラベルを付ける。

$$c \rightarrow c' = Uc$$

このとき U は任意のユニタリー ($UU^\dagger = 1$) 3×3 行列で行列式は 1、 c は 3 成分のカラーベクトルである。例として、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は $r \rightarrow g$ 、 $g \rightarrow b$ 、 $b \rightarrow r$ と変換する。9番目のグルーオン ($|9\rangle$) はあきらかに、 U のもとで不変で、一方、8個のグルーオンはそうではない。 $|3\rangle$ と $|8\rangle$ が変換後に、互いに線形結合になることを示せ。

$$|3'\rangle = \alpha|3\rangle + \beta|8\rangle, \quad |8'\rangle = \gamma|3\rangle + \delta|8\rangle$$

α 、 β 、 γ 、 δ の値を求めよ。

- 8.13 以下を示せ (入行列がすべてトレースレスであることに注目)。

$$\text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\beta) = 2\delta^{\alpha\beta}$$

8.14 $SU(2)$ の構造定数はいくらだろう。つまり、

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2if^{ijk}\sigma^k$$

において、 f^{ijk} の値はいくつか。

8.15 (a) $f^{\alpha\beta\gamma}$ は完全反対称である (すなわち $f^{112} = 0$ は自動的に成り立ち、 f^{123} を計算すれば、 f^{213} 、 f^{231} 等にわずらわされる必要がない)。いくつの異なる非自明な定数が残るだろうか。

$$\left[\text{答え: } \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \right]$$

(式 (8.36) にリストアップされているように) これらのうち 9 個のみ 0 でない値を取り、たった 3 種類の異なる値がある。

(b) $[\lambda^1, \lambda^2]$ を計算して、 γ が 3 以外のすべてで $f^{12\gamma} = 0$ になり、 $f^{123} = 1$ であることを確認せよ。

(c) 同様に $[\lambda^1, \lambda^3]$ と $[\lambda^4, \lambda^5]$ を計算し、構造定数を決定せよ。

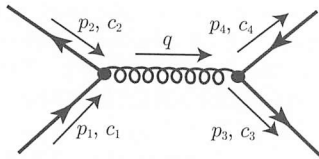
8.16 以下の状態を利用して、八重項 $q\bar{q}$ カラー因子を計算せよ。

(a) $b\bar{g}$

(b) $(r\bar{r} - b\bar{b})/\sqrt{2}$

(c) $(r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g})/\sqrt{6}$

8.17 図のダイアグラムの振幅 \mathcal{M} を求めよ。



式 (8.47) を参考に、この場合カラー因子は何だろう。また f をカラー一重項の配位で計算せよ。この結果を説明できるか。[答え: ゼロだ。一重項では八重項 (グルーオン) に結合できないからだ。]

8.18 状態 $(rb + br)/\sqrt{2}$ を用いて、 qq カラー因子六重項を計算せよ。

8.19 カラー因子はいつも $\lambda_{ij}^\alpha \lambda_{kl}^\alpha$ (α について和を取る) という表示を含む。この量には簡単な公式があり、簡略化されて、

$$\lambda_{ij}^\alpha \lambda_{kl}^\alpha = 2\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$$

となる (Kane [4] を参照)。この公式を以下の場合について確かめよ。

(a) $i = j = k = l = 1$ (式 (8.61) を参照)

(b) $i = j = 1, \quad k = l = 2$ (式 (8.49) を参照)

(c) $i = l = 1, \quad j = k = 2$ (式 (8.62) を参照)

(d) これを用いて式 (8.52) を確認せよ。

8.20 式 (8.69) から (8.70) を導出せよ。

8.21 QCD (もしくは QED) の振幅 (\mathcal{M}) のゲージ不変性を確認する簡単なテストがある。グルーオン (もしくは光子) の偏極ベクトルを運動量に置き換える (たとえば、 $\epsilon_3 \rightarrow p_3$) と、(問題 7.23 より) 必ずゼロになる。この基準を用いて、 $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ だけでなく、 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3$ でゲージ不変になることを示せ。[したがって、ゲージ不変性を保つために、QCD では 3 グルーオンのパーテックスが不可欠である。対照的に、 $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ だけで QED ではゲージ不変であることに注目 (例題 7.8)。 λ 行列が交換しないという事実が、その違いをもたらす。]

8.22 二つのグルーオンのカラー一重項の組み合わせを構築せよ (式 (8.84)). 一つの方法を示す.

$$c = \begin{pmatrix} r \\ b \\ g \end{pmatrix}$$

として, $SU(3)$ のもとで $c \rightarrow c' = Uc$ と変換する. このとき, U は行列式 1 のユニタリー行列である. 同様に, $d^\dagger = (\bar{r}, \bar{b}, \bar{g})$ とすると, 変換則は $d^\dagger \rightarrow d'^\dagger = d^\dagger U^\dagger$ である. 行列のかたちでは

$$M \equiv cd^\dagger = \begin{pmatrix} r\bar{r} & r\bar{b} & r\bar{g} \\ b\bar{r} & b\bar{b} & b\bar{g} \\ g\bar{r} & g\bar{b} & g\bar{g} \end{pmatrix}$$

である. このとき, $M' = c'd'^\dagger = UMu^\dagger$ である. トレース部分を取り除くと,

$$N \equiv M - \frac{1}{3}[\text{Tr}(M)], \quad \text{したがって, } \text{Tr}(N) = 0$$

である. $[\text{Tr}(M') = \text{Tr}(M) = (r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})]$, この組み合わせは $SU(3)$ 不変で, $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$ の一重項である. そして, N は八重項である.]

$$N' = M' - \frac{1}{3}[\text{Tr}(M')] = UMu^\dagger - \frac{1}{3}[\text{Tr}(M)]UU^\dagger = UNU^\dagger$$

に注目すること. これは, グルーオン自体 (これらは八重項の表現である) が $SU(3)$ のもとでどのように変換されるかを教えてくれる. 問題は二つの八重項からどうやって一重項をつくるかである. つまり, U のもとで不変な N_1, N_2 の双一次共変形をどうやってつくるかである. 解は

$$s \equiv \text{Tr}(N_1 N_2)$$

で, ここで,

$$s' = \text{Tr}(N'_1 N'_2) = \text{Tr}(UN_1U^\dagger UN_2U^\dagger) = \text{Tr}(U^\dagger UN_1 N_2) = \text{Tr}(N_1 N_2) = s$$

のように不変である. M_1, M_2 の成分としての s がどのようなものか把握する必要がある

$$\begin{aligned} \text{Tr}(N_1 N_2) &= \text{Tr}\left(M_1 - \frac{1}{3}[\text{Tr}(M_1)]\right)\left(M_2 - \frac{1}{3}[\text{Tr}(M_2)]\right) \\ &= \text{Tr}(M_1 M_2) - \frac{1}{3}[\text{Tr}(M_1)][\text{Tr}(M_2)] \\ &= \frac{2}{3}[(r\bar{r})_1(r\bar{r})_2 + (b\bar{b})_1(b\bar{b})_2 + (g\bar{g})_1(g\bar{g})_2] \\ &\quad - \frac{1}{3}[(r\bar{r})_1(b\bar{b})_2 + (r\bar{r})_1(g\bar{g})_2 + (b\bar{b})_1(r\bar{r})_2 + (b\bar{b})_1(g\bar{g})_2 \\ &\quad + (g\bar{g})_1(r\bar{r})_2 + (g\bar{g})_1(b\bar{b})_2] + [(r\bar{b})_1(b\bar{r})_2 + (r\bar{g})_1(g\bar{r})_2 \\ &\quad + (b\bar{r})_1(r\bar{b})_2 + (b\bar{g})_1(r\bar{g})_2 + (g\bar{r})_1(r\bar{g})_2 + (g\bar{b})_1(b\bar{g})_2] \\ &= |1\rangle_1 |1\rangle_2 + |2\rangle_1 |2\rangle_2 + |3\rangle_1 |3\rangle_2 + |4\rangle_1 |4\rangle_2 \\ &\quad + |5\rangle_1 |5\rangle_2 + |6\rangle_1 |6\rangle_2 + |7\rangle_1 |7\rangle_2 + |8\rangle_1 |8\rangle_2 = \sum_{n=1}^8 |n\rangle_1 |n\rangle_2 \end{aligned}$$

(規格化するには, $\sqrt{8}$ で割る必要がある). この二つの八重項の不変積は, $SU(2)$ の二つの 3 ベクトルの内積に対応する $SU(3)$ 版である.

- 8.23 $\Gamma(\eta_c \rightarrow 2g)/\Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma)$ の分岐比を決定せよ。[ヒント：分子に式 (8.90) を使い、分母に式 (7.168) と (7.171) を適切に修正したものを使う。ここには二つの修正がある。つまり (i) クォークの電荷は Q_c , (ii) カラー因子は 3 が一重項を構成するクォークに掛かる (式 (8.30))。答え： $(9/8)(\alpha_s/\alpha)^2$]
- 8.24 (a) QED の結合定数が発散するエネルギー ($\sqrt{|q^2|c^2}$) を計算せよ (式 (8.92)) (微細構造定数 $\alpha(0) = 1/137$ を忘れないこと)。
 (b) どれくらいのエネルギーで、 $\alpha(0)$ とのずれが 1% になるだろうか。このエネルギーは到達可能だろうか。
- 8.25 式 (8.93) の μ の値が任意であることを証明せよ。[物理学者 A が値 μ_a を使用し、物理学者 B が異なる値 μ_b を使用するとしよう。A のバージョンの式 (8.92) が正しいと仮定すると、B も正しいことを証明する。]
- 8.26 式 (8.93), (8.94) から式 (8.95) を証明せよ。
- 8.27 $\Lambda_c = 0.3 \text{ GeV}$ の場合、 10 GeV と 100 GeV での α_s の値を計算せよ。 $\Lambda_c = 1 \text{ GeV}$ とするとどうか。 $\Lambda_c = 0.1 \text{ GeV}$ はどうか。
- 8.28 (グルーオン-グルーオン散乱)
 (a) 二つのグルーオンの最低次の相互作用のダイアグラム (四つ存在する) を描け。
 (b) 対応する振幅を書き下せ。
 (c) 入ってくるグルーオンをカラー一重項状態にする。また、出ていくグルーオンも同様にする。この場合の振幅を計算せよ。
 (d) 重心系で各グルーオンのエネルギーを E とする。すべての運動学的な因子を E と散乱角 θ で表せ。振幅を足して全振幅 \mathcal{M} を求めよ。
 (e) 微分散乱断面積を求めよ。
 (f) この力が引力か斥力が答えよ (前者の場合、これはおそらくグルーボールの配位である可能性がある)。