

## 量子電気力学

この章では、ディラック方程式を導入し、量子電気力学に対するファインマン則について述べ、計算のための有用な道具立てを開発し、QEDのいくつかの典型的な結果を導き出す。その取り扱い方法は、4章におけるスピン1/2の定式化だけでなく、2章、3章、6章の内容に頼るところが多い。そして今度は、この7章が以降の章すべてのための不可欠な基盤となる（しかし、例題7.8と7.9節は、それらに関連する8章と9章の一部とともに飛ばしてもよい）。

### 7.1 ディラック方程式

6章の「ABC」モデルは完全に理にかなった場の量子論になっているが、実世界を記述していない。というのも、粒子A、B、Cはスピン0であるのに対して、クォークやレプトンはスピン1/2だし、力の媒介粒子はスピン1だ。スピンを考慮に入れるのは、代数的に厄介だ。だからこそ、そのような厄介事のないトイモデルという文脈でファインマンの計算方法を紹介した。

非相対論的量子力学では、粒子はシュレーディンガー方程式によって記述される。相対論的量子力学では、スピン0の粒子はクライン-ゴールドン方程式により、スピン1/2の粒子はディラック方程式により、スピン1の粒子はプロカ方程式により、記述される。しかし、いったんファインマン則が確立されると、そこにある場の方程式は背後に隠れてしまう。だからこそ、クライン-ゴールドン方程式に言及することなく6章をやり通した。しかし、スピン1/2に対するファインマン則の表記は、ディラック方程式をそれなりに知っていることをあらかじめ前提としている。そこで、次の三つの節では、紛れもなく、ディラック理論を学習する。

シュレーディンガー方程式を「導出する」一つの方法は、古典的エネルギー・運動量保存の関係から始めることだ。

$$\frac{p^2}{2m} + V = E \quad (7.1)$$

量子化の処方箋

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla, \quad E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (7.2)$$

を適用し、その結果得られる演算子を「波動関数」 $\Psi$ に作用させる。

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (\text{シュレーディンガー方程式}) \quad (7.3)$$

クライン-ゴルドン方程式はまったく同じ方法で求められる。相対論的エネルギー・運動量の関係  $E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = m^2c^4$ 、あるいは (よりよいかたちをしている)

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0 \quad (7.4)$$

から始める (ここからは、ポテンシャルエネルギーを落とす。つまり、自由粒子に話を限る)。驚くべきことに、量子置き換え (式 (7.2)) は相対論による修正を必要としない。つまり、4元ベクトルの表記法を使って、

$$p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu \quad (7.5)$$

と読み替える。ここで\*1

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (7.6)$$

と定義する。これは以下を意味する。

$$\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z} \quad (7.7)$$

式 (7.5) を (7.4) に代入し微分を波動関数  $\psi$  に作用させると\*2

$$-\hbar^2\partial^\mu\partial_\mu\psi - m^2c^2\psi = 0 \quad (7.8)$$

あるいは

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \nabla^2\psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi \quad (\text{クライン-ゴルドン方程式}) \quad (7.9)$$

を得る。

\*1 空間と時間の  $x^\mu$  という反変 4元ベクトルに対する勾配は、それ自身が共変 4元ベクトルとなっている。ゆえに、添字が存在する。すべてを書き出すと、式 (7.5) は  $(E/c, -\mathbf{p}) \rightarrow i\hbar(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$  となる。もちろん、 $\partial^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$  である。問題 7.1 を見よ。

\*2 非相対論的量子力学では、波動関数には大文字 ( $\Psi$ ) を使い、 $\psi$  は空間成分のために残しておくのが慣習だ (式 (5.3))。相対論的理論では、より一般的に波動関数自身に  $\psi$  を使う。

実際のところ、シュレーディンガーは、彼の名を冠した非相対論版の前にこの方程式を発見していた。ところが、(クーロンポテンシャルを入れて)水素のボーア準位を再現できなかったときにそれを捨ててしまっていた。問題は、電子はスピン1/2をもつが、クライン-ゴールドン方程式はスピン0の粒子に適用されるものだというのである。さらに、クライン-ゴールドン方程式は、 $|\psi(\mathbf{r})|^2$ が位置 $\mathbf{r}$ に粒子を見出す確率であるというボルンの統計的解釈に適応していない。この困難の原因は、クライン-ゴールドン方程式が $t$ に関して2階微分<sup>\*3</sup>になっているということである。そこで、ディラックは、相対論的エネルギーと運動量の関係式に無矛盾で、かつ、時間に関する1階微分の方程式を探し出すことを目指した。皮肉にも1934年にパウリとワイスコップは、相対論的な理論<sup>\*4</sup>では統計的解釈をやり直し、クライン-ゴールドン方程式を正しく再解釈しなければならないことを、そして一方でディラック方程式がスピン1/2の粒子に対するものであることを示した。

ディラックの戦略はエネルギーと運動量の関係(式(7.4))を「因数分解」することであった。これは、もし $p^0$ だけだったら(すなわち、 $\mathbf{p}$ がゼロであれば)簡単だ。

$$(p^0)^2 - m^2 c^2 = (p^0 + mc)(p^0 - mc) = 0 \quad (7.10)$$

これにより、二つの1階微分の式を得る。

$$(p^0 - mc) = 0 \quad \text{あるいは} \quad (p^0 + mc) = 0 \quad (7.11)$$

どちらかが、 $p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0$ を保証する。しかし、空間成分が入ってくると話は別だ。その場合、以下のようなかたちをしたものを探すことになる。

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) = (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) \quad (7.12)$$

ここで、 $\beta^\kappa$ と $\gamma^\lambda$ はこれから決定されるべき8個の係数である<sup>\*5</sup>。右辺を乗じると

$$\beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc(\beta^\kappa - \gamma^\kappa)p_\kappa - m^2 c^2$$

を得る。 $p_\kappa$ に線形な項は望ましくないので、 $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$ を選ばなければならない。目的

<sup>\*3</sup> シュレーディンガー方程式は $t$ に関する1階微分だということに注意せよ。

<sup>\*4</sup> 相対論的な理論は対生成や対消滅を扱わなければならないので、粒子数は保存量ではない。

<sup>\*5</sup> もし表記法で混乱すると思ったら、式(7.12)を「長々と」書いておこう。

$$(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - m^2 c^2 = (\beta^0 p^0 - \beta^1 p^1 - \beta^2 p^2 - \beta^3 p^3 + mc) \\ \times (\gamma^0 p^0 - \gamma^1 p^1 - \gamma^2 p^2 - \gamma^3 p^3 - mc)$$

を達成するためには,

$$p^\mu p_\mu = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p^\lambda$$

となるような, すなわち,

$$\begin{aligned} (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 &= (\gamma^0)^2 (p^0)^2 + (\gamma^1)^2 (p^1)^2 + (\gamma^2)^2 (p^2)^2 \\ &\quad + (\gamma^3)^2 (p^3)^2 + (\gamma^0 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^0) p_0 p_1 \\ &\quad + (\gamma^0 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^0) p_0 p_2 + (\gamma^0 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^0) p_0 p_3 \\ &\quad + (\gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^1) p_1 p_2 + (\gamma^1 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^1) p_1 p_3 \\ &\quad + (\gamma^2 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^2) p_2 p_3 \end{aligned} \quad (7.13)$$

を満たす係数  $\gamma^\kappa$  を見つけなければならない. 何が問題かわかるだろう.  $\gamma^0 = 1$ ,  $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma^3 = i$  を選んでもよいが, 交差している項を乗り除く方法があるようには見えない.

ここでディラックは素晴らしいひらめきを得た.  $\gamma$  が数字ではなく行列だったらどうなるだろうか. 行列は非可換なので,

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1 \\ \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0, \quad \mu \neq \nu \end{aligned} \quad (7.14)$$

となる組み合わせを見つけることができるかもしれない. あるいは, より簡潔に書くこと

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (7.15)$$

である. ここで,  $g^{\mu\nu}$  はミンコフスキーの計量 (式 (3.13)) で, 中括弧は反交換関係を意味する.

$$\{A, B\} \equiv AB + BA \quad (7.16)$$

読者自身がこの問題を解いてもよい. ただし, 解けることには解けるが, そのための最小の行列は  $4 \times 4$  ということがあきらかになる. 本質的には同じ「ガンマ行列」の組み合わせがいろいろある. ここでは, 「ブオルケンとドレル」による標準的な表記を使う [1].

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

ここで、 $\sigma^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) はパウリ行列 (式 (4.26)) で、1 は  $2 \times 2$  の単位行列を、0 は  $2 \times 2$  のゼロ行列を意味する\*6。

$4 \times 4$  の行列方程式とみなすと、相対論的なエネルギー・運動量の関係は因数分解できる。

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) = (\gamma^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0 \quad (7.18)$$

どちらか一つの項を落とすことで (どちらを選ぶかは重要ではなく、いまここで使うのは慣習によるものだ。問題 7.10 を参照) ようやく、ディラック方程式を得る。

$$\gamma^\mu p_\mu - mc = 0 \quad (7.19)$$

最後に量子置き換え  $p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$  を行い (式 (7.5)), その結果を  $\psi$  に作用させると

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0 \quad (\text{ディラック方程式}) \quad (7.20)$$

となる。 $\psi$  がいまここでは四つの要素をもつ列行列になっていることに注意せよ。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

これを「バispinor」あるいは「ディラックスピノル」とよぶ (四つの成分をもつが、これは4元ベクトルではない。7.3節で、慣性系を変えるとどのように変換するかを示す。それは、通常のローレンツ変換ではない)。

## 7.2 ディラック方程式の解

$\psi$  が位置に依存しないとしよう。

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \quad (7.22)$$

式 (7.5) から、これは運動量ゼロ ( $\mathbf{p} = 0$ ) の状態を記述している、つまり、粒子が静止している。すると、ディラック方程式 (式 (7.20)) は以下になる。

\*6 文脈から不定性がない場合は、1と0をこのように $2 \times 2$ あるいは $4 \times 4$ 行列に使う。また、式 (7.15) の右辺のように、必要なときは単位行列は適当な次元になっている。偶然にも、 $\sigma$  は4元ベクトルの空間成分ではないので、上付きと下付きの添字を区別しない。つまり、 $\sigma^i \equiv \sigma_i$  だ。

$$\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} - mc\psi = 0 \quad (7.23)$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\psi_A/\partial t \\ \partial\psi_B/\partial t \end{pmatrix} = -i\frac{mc^2}{\hbar} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

ここで、

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

は、列行列  $\psi$  の上の2成分からなり、

$$\psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

は、下の2成分からなっている。よって、

$$\frac{\partial\psi_A}{\partial t} = -i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi_A, \quad -\frac{\partial\psi_B}{\partial t} = -i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi_B \quad (7.27)$$

となり、その解は

$$\psi_A(t) = e^{-i(mc^2/\hbar)t}\psi_A(0), \quad \psi_B(t) = e^{+i(mc^2/\hbar)t}\psi_B(0) \quad (7.28)$$

である。

式(5.3)を参照すると、

$$e^{-iEt/\hbar} \quad (7.29)$$

という因子が、エネルギー  $E$  の量子状態の時間依存性を特徴づけるものだということがわかる。静止している粒子では  $E = mc^2$  なので、まさしく  $\psi_A$  が  $\mathbf{p} = 0$  のときに期待すべきものとなっている。しかし、 $\psi_B$  はどうだろうか。一見、負のエネルギー状態 ( $E = -mc^2$ ) を表現している。これが、1章で述べた有名な難題だ。ディラックは当初、不必要な状態すべてで満たされている、見えない負のエネルギーの「海」を仮定することでその問題を回避しようとした\*7。その代わりにいまわれわれは、「異常

\*7 たんに、 $\psi_B = 0$  にして「負のエネルギー」解は「物理的に不可能」だと要求し、それらを忘れてしまえばよいのに、と思うかもしれない。しかし運悪く、そうはできない。量子系では完全系が必要で、正のエネルギー状態だけでは完全ではないのだ。

な」時間依存性をもつ解を、正のエネルギーをもつ反粒子だとみなす\*8。よって、(たとえば)  $\psi_A$  が電子を記述する一方で、 $\psi_B$  は陽電子を記述する。それぞれが2成分のスピノルであり、まさしくスピン1/2の系になっている。

結論： $\mathbf{p} = 0$  のディラック方程式は、四つの独立な解をもつ（とりあえずいまは規格化因子は無視しておく）。

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= e^{-i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi^{(2)} &= e^{-i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi^{(3)} &= e^{+i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi^{(4)} &= e^{+i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.30)$$

これらはそれぞれスピン上向き電子，下向き電子，スピン下向き陽電子\*9，上向き陽電子を表す。

次に平面波解を見ていく\*10。

$$\psi(x) = a e^{-ik \cdot x} u(k) \quad (7.31)$$

$\psi(x)$  がディラック方程式を満たすような4元ベクトル  $k^\mu$  とそれに付随するバイスピノル  $u(k)$  を見つけたい ( $a$  は規格化因子で、現在のわれわれの目的には重要ではないが、後で単位を正しく保つために必要だ)。  $x$  の依存性は指数の中に押し込められているので、

$$\partial_\mu \psi = -ik_\mu \psi \quad (7.32)$$

\*8 シュレーディンガー方程式において、 $i$  の符号は純粹に慣習である。シュレーディンガーが反対の選択をしていたら、 $e^{iEt/\hbar}$  がエネルギー  $E$  をもつ静止状態の「普通の」時間依存性になっていた。相対論的理論ではどちらの符号も表れて、適切な解釈を行うと、反粒子の存在を意味することになる。

\*9 反粒子のスピン向きが「逆」であることに注意せよ。(覚えておくのに手頃な) ディラックの解釈によると、 $\psi^{(3)}$  はスピン上向きで負のエネルギーをもつ電子になり、その空いた場所(「海」の「穴」)がスピン下向きで正のエネルギーをもつ陽電子のように振る舞う。

\*10 ここでは、 $k \cdot x = k_\mu x^\mu = k^0 ct - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  なので、指数関数の実数部分が  $\cos(k^0 ct - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  となり、向き  $\mathbf{k}$  で伝播する(角)周波数  $\omega = ck^0$ 、波長  $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$  の正弦平面波を表す。

となる\*11. これをディラック方程式 (7.20) に代入すると

$$\hbar\gamma^\mu k_\mu e^{-ik\cdot x} u - mce^{-ik\cdot x} u = 0$$

あるいは

$$(\hbar\gamma^\mu k_\mu - mc)u = 0 \quad (7.33)$$

を得る. この方程式は純粹に代数であり, 微分がないことに注意せよ.  $u$  が式 (7.33) を満たせば,  $\psi$  (式 (7.31)) がディラック方程式を満たす. さて,

$$\gamma^\mu k_\mu = \gamma^0 k^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} = k^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \mathbf{k} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^0 & -\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -k^0 \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

なので,

$$\begin{aligned} (\hbar\gamma^\mu k_\mu - mc)u &= \begin{pmatrix} (\hbar k^0 - mc) & -\hbar\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \hbar\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} & (-\hbar k^0 - mc) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\hbar k^0 - mc)u_A - \hbar\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} u_B \\ \hbar\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} u_A - (\hbar k^0 + mc)u_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. ここでは, 以前と同様に下付き添字  $A$  は上の 2 成分を表し,  $B$  が下の 2 成分を表す. すると, 式 (7.33) を満たすには,

$$u_A = \frac{1}{k^0 - mc/\hbar} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}) u_B, \quad u_B = \frac{1}{k^0 + mc/\hbar} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}) u_A \quad (7.35)$$

でなければならない. 2 番目の式を 1 番目に代入すると

$$u_A = \frac{1}{(k^0)^2 - (mc/\hbar)^2} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 u_A \quad (7.36)$$

となる. しかし,

\*11 これは正しそうに見えるが, もし気になるなら簡単に確かめられる.

$$\partial_0 e^{-k\cdot x} = (1/c) \frac{\partial}{\partial t} e^{-k^0 ct + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -ik^0 e^{-k\cdot x}$$

である ( $k^0 = k_0$ ). 同様に

$$\partial_1 e^{-ik\cdot x} = ik^1 e^{-ik\cdot x}$$

となる ( $k^1 = -k_1$ ).

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= k_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + k_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_z & (k_x - ik_y) \\ (k_x + ik_y) & -k_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.37)$$

なので

$$(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \begin{pmatrix} k_z^2 + (k_x - ik_y)(k_x + ik_y) & k_z(k_x - ik_y) - k_z(k_x - ik_y) \\ k_z(k_x + ik_y) - k_z(k_x + ik_y) & (k_x + ik_y)(k_x - ik_y) + k_z^2 \end{pmatrix} = \mathbf{k}^2 \mathbf{1} \quad (7.38)$$

である。ここで、 $\mathbf{1}$  は  $2 \times 2$  の単位行列である（この  $\mathbf{1}$  回だけ明示的に書いておく）。ゆえに、

$$u_A = \frac{\mathbf{k}^2}{(k^0)^2 - (mc/\hbar)^2} u_A \quad (7.39)$$

であるので\*12,

$$(k^0)^2 - (mc/\hbar)^2 = \mathbf{k}^2, \quad \text{もしくは} \quad k^2 = k^\mu k_\mu = (mc/\hbar)^2 \quad (7.40)$$

となる。すると、 $\psi = \exp(-ik \cdot x)u(k)$  がディラック方程式を満たすには、 $\hbar k^\mu$  は粒子に付随する 4 元ベクトルでその「2 乗」は  $m^2 c^2$  にならなければならない。もちろんわれわれはそのような物理量を知っている。エネルギー運動量の 4 元ベクトルだ。あきらかに

$$k^\mu = \pm p^\mu / \hbar \quad (7.41)$$

である。正の符号 ( $e^{-iEt/\hbar}$  の時間発展) が粒子の状態に、負の符号 ( $e^{+iEt/\hbar}$  の時間発展) が反粒子の状態を表す。

式 (7.35) に戻ると（そして式 (7.37) を使うと）、ディラック方程式の四つの独立な解を組み上げるのは単純なことだ。

$$(1) \quad u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ を選ぶと } u_B = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{p^0 + mc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}$$

\*12 式 (7.39) からは、 $u_A = 0$  も解となる。しかし、前と同様に式 (7.35) から始めて今度は 1 番目を 2 番目に代入すると、 $u_A$  が  $u_B$  に置き換わった式 (7.39) を得ることになる。よって、 $u_A$  と  $u_B$  の両方がゼロにならない限り（そのときは、解は一つもない）、式 (7.40) が成立しなければならない。

$$\begin{aligned}
 (2) \quad u_A &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{を選ぶと} & u_B &= \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{p^0 + mc} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \\
 (3) \quad u_B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{を選ぶと} & u_A &= \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{p^0 + mc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \\
 (4) \quad u_B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{を選ぶと} & u_A &= \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{p^0 + mc} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{7.42}$$

(1) と (2) に対しては式 (7.41) の正の符号を使う必要がある。さもないと、 $\mathbf{p} \rightarrow 0$  (静止系) で  $u_B$  (反粒子成分) が大きくなり発散してしまう。これらは粒子に対する解だ。(3) と (4) に対しては式 (7.41) の負の符号を使わなければならない。これらは反粒子に対する解だ。

これらのスピノルに対する便利な規格化は\*13

$$u^\dagger u = 2E/c \tag{7.43}$$

である。ここで、ダガーは転置共役 (あるいはエルミート共役) を意味する。

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \Rightarrow u^\dagger = (\alpha^* \ \beta^* \ \gamma^* \ \delta^*)$$

なので、

$$u^\dagger u = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 \tag{7.44}$$

となる。その結果として得られる規格化因子 (問題 7.3)

$$N \equiv \sqrt{(E + mc^2)/c} \tag{7.45}$$

を使うと、四つの基準解は

\*13  $u$  を何倍してもそれもまた式 (7.33) の解であることに注意せよ。規格化はたんに全体の係数を決めるだけである。実際のところ、さまざまな文献で少なくとも三つの規格化が使われている。 $u^\dagger u = 2E/c$  (ハルツェンとマーチン),  $u^\dagger u = E/mc^2$  (ブオルケンとドレル),  $u^\dagger u = 1$  (ボゴリューボフとシャーフ)。この例の中では、私はブオルケンとドレルのものは避ける。 $m \rightarrow 0$  のときに見せかけの困難を引き起こしてしまうので。

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(p_z)}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E + mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - ip_y)}{E + mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E + mc^2} \end{pmatrix} \quad (7.46)$$

$$v^{(1)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - ip_y)}{E + mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = -N \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

$$\psi = ae^{-ip \cdot x / \hbar} u \quad (\text{粒子}), \quad \psi = ae^{ip \cdot x / \hbar} v \quad (\text{反粒子}) \quad (7.48)$$

となる。見るとわかるように、ここから反粒子に対して  $v$  という文字を使うのは（そして、 $v^{(2)}$  に負の符号を入れるのは）慣例である。粒子の状態が運動量空間のディラック方程式（式 (7.33) を参照）を

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0 \quad (7.49)$$

という形式で満たす一方、反粒子 ( $v$ ) は

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0 \quad (7.50)$$

を満たすことに注意せよ。 $u^{(1)}$  がスピン上向きの電子を、 $u^{(2)}$  がスピン下向きの電子を、 $v^{(1)}$  がスピン上向きの陽電子を、 $v^{(2)}$  がスピン下向きの陽電子を記述すると思うかもしれないが\*14、それは正しくない。ディラック粒子に対して、スピン行列は（式 (4.21) を一般化すると）

$$S = \frac{\hbar}{2} \Sigma \quad \text{ただし} \quad \Sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (7.51)$$

となり、たとえば、 $u^{(1)}$  が  $\Sigma_z$  の固有状態になっていないことを簡単に確認できる。しかし、もし  $z$  の方向を運動の向きにそろえると（その場合  $p_x = p_y = 0$  となる）、 $u^{(1)}$ 、 $u^{(2)}$ 、 $v^{(1)}$ 、そして  $v^{(2)}$  は  $S_z$  の固有スピノルとなり、 $u^{(1)}$  と  $v^{(1)}$  がスピン上向きに、

\*14 陽電子のスピンの方きについては、脚注 \*9 を参照せよ。

$u^{(2)}$  と  $v^{(2)}$  がスピン下向きになる\*15 (問題 7.6).

ちなみに、平面波はもちろんディラック方程式に対する特別な解である。しかし、それらはわれわれにとって興味深いものだ。なぜなら、それらは、あるエネルギーと運動量をもった粒子を記述し、多くの実験でコントロールし測定し得るパラメーターだからである。

### 7.3 双一次共変形

ディラック方程式のスピン成分は、ある慣性系から別の系に移るときに 4 元ベクトルとして変換しないということを 7.1 節で述べた。ではどのように変換するのだろうか。ここではそれを導出はせずに (問題 7.11 でやることになる)、たんにその結果を引用する。  $x$  方向に速さ  $v$  で移動する系に移るには、

$$\psi \rightarrow \psi' = S\psi \quad (7.52)$$

とすればよい。ただし、 $S$  は以下の  $4 \times 4$  の行列で

$$S = a_+ + a_- \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \sigma_1 \\ a_- \sigma_1 & a_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ & 0 & 0 & a_- \\ 0 & a_+ & a_- & 0 \\ 0 & a_- & a_+ & 0 \\ a_- & 0 & 0 & a_+ \end{pmatrix} \quad (7.53)$$

$a_{\pm}$  は

$$a_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)} \quad (7.54)$$

であり、通常のように  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  である。

スピンル  $\psi$  からスカラー量を導出することを考えよう。以下の式を考えてみるのは意味があるだろう。

\*15 実際のところ、ディラック方程式に対する平面波解と  $S_z$  の固有状態を同時につくることは不可能だ ( $\mathbf{p} = p_z \hat{z}$  という特別な場合を除いて)。その理由は  $S$  自身が保存量ではないことにある。全角運動量  $\mathbf{L} + \mathbf{S}$  だけがここでは保存する (問題 7.8)。ヘリシティ  $\Sigma \cdot \hat{p}$  (運動の向きについての軌道角運動量は存在しない) の固有状態をつくることは可能だ。しかし、これらはどちらかという面倒で (問題 7.7)、実際的には、物理的解釈がそんなにすっきりはしないが、式 (7.46) と (7.47) のスピンルを使う方がより簡単である。ここで大事なことは、すべての解 (完全系) を得ることである。

$$\psi^\dagger \psi = (\psi_1^* \ \psi_2^* \ \psi_3^* \ \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \quad (7.55)$$

だが不運にも、以下の変換を試みればわかるが、これは不変ではない\*16。

$$(\psi^\dagger \psi)' = (\psi')^\dagger \psi' = \psi^\dagger S^\dagger S \psi \neq (\psi^\dagger \psi) \quad (7.56)$$

実際 (問題 7.13),

$$S^\dagger S = S^2 = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -(v/c)\sigma_1 \\ -(v/c)\sigma_1 & 1 \end{pmatrix} \neq 1 \quad (7.57)$$

である。もちろん、4元ベクトルの成分の2乗和も不変ではない。空間成分に負の符号が必要なのだ (式 (3.12))。少し試行錯誤を試みればわかるが、スピノルの場合、3番目と4番目の成分に負の符号が必要となる。3章で負の符号を正しく付けるために共変4元ベクトルを導入したように、今度は随伴スピノルを導入する。

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^* \ \psi_2^* \ -\psi_3^* \ -\psi_4^*) \quad (7.58)$$

すると

$$\bar{\psi} \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2 \quad (7.59)$$

という物理量が相対論的に不変である。よって、 $S^\dagger \gamma^0 S = \gamma^0$  に対しては (問題 7.13)

$$(\bar{\psi} \psi)' = (\psi')^\dagger \gamma^0 \psi' = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 S \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \psi \quad (7.60)$$

である。

\*16 積の転置は、転置の掛け算の順序が逆になることに注意しよう。

$$\begin{aligned} (AB)_{ij}^T &= (AB)_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki} \\ &= \sum_k B_{ik}^T A_{kj}^T = (B^T A^T)_{ij} \end{aligned}$$

エルミート共役についても同じことがいえて

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

である。

4章で、パリティ変換  $P(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$  のもとでの振る舞いの違いをもとに、スカラーと擬スカラーを見分ける方法を学んだ。擬スカラーは符号を変えるがスカラーの符号は変わらない。 $\bar{\psi}\psi$  が前者なのか後者なのかを知りたくなるのは当然だ。まず  $P$  に対してディラックスピノルがどのように変換するかを知る必要がある。ここでもそれを導出することはせずに、たんに結果を引用する (問題 7.12)\*17。

$$\psi \rightarrow \psi' = \gamma^0 \psi \quad (7.61)$$

これから

$$(\bar{\psi}\psi)' = (\psi')^\dagger \gamma^0 \psi' = \psi^\dagger (\gamma^0)^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \bar{\psi}\psi \quad (7.62)$$

となることがわかり、よって、 $(\bar{\psi}\psi)$  は  $P$  のもとで不変である。すなわち「真の」スカラーだ。しかし、 $\psi$  から擬スカラーをつくることもできる。

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (7.63)$$

ここで

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.64)$$

である。ローレンツ不変になっているかのチェックは読者に任せる (問題 7.14)。パリティ変換のもとでの振る舞いから

$$(\bar{\psi}\gamma^5\psi)' = (\psi')^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \psi' = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \psi \quad (7.65)$$

となる (最後の等号のところでは、 $(\gamma^0)^2 = 1$  という事実を使った)。ここでは、 $\gamma^0$  は  $\gamma^5$  の「間違った側」にいる。しかし、それが  $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$  と反交換関係にあること (式 (7.15)), そして (当然だが) 自身と交換する ( $\gamma^3\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^3, \gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2, \gamma^1\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^1, \gamma^0\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0$ ) ことに気をつけると、 $\gamma^5$  を「通り抜けさせられる」ことがわかり、よって

$$\gamma^5\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 = (-1)^3\gamma^0(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = -\gamma^0\gamma^5$$

となる。同様に、 $\gamma^5$  は他のすべての  $\gamma$  行列と反交換だ。

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (7.66)$$

\*17 式 (7.61) の符号は純粹に定義の問題だ。  $-\gamma^0\psi$  でもまったく構わない。

よって,

$$(\bar{\psi}\gamma^5\psi)' = -\psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi = -(\bar{\psi}\gamma^5\psi) \quad (7.67)$$

なので, 擬スカラーだ.

全部で,  $i$  と  $j$  は 1 から 4 までの数なので,  $\psi_i^*\psi_j$  のかたちの ( $\psi^*$  から一つの成分を,  $\psi$  からもう一つの成分を取り出す) 16 個の積が存在する. これら 16 個の積をさまざまに線形結合させて物理量を構築することができ, 変換したときの振る舞いの違いから以下のように分類できる.

- |     |  |               |
|-----|--|---------------|
| (1) | $\bar{\psi}\psi =$ スカラー                    | (1 成分)        |
| (2) | $\bar{\psi}\gamma^5\psi =$ 擬スカラー           | (1 成分)        |
| (3) | $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi =$ ベクトル          | (4 成分) (7.68) |
| (4) | $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi =$ 擬ベクトル | (4 成分)        |
| (5) | $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi =$ 反対称テンソル  | (6 成分)        |

ここで,

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \quad (7.69)$$

である. これにより 16 個の項が得られ, これらがつくることのできるすべてである. たとえば,  $\psi^*$  と  $\psi$  で対称な双一次テンソルを構築することはできないし, ベクトルをつくらうとすると  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  が唯一の候補となる\*18. (別の考え方はこうだ. 1,  $\gamma^5$ ,  $\gamma^\mu$ ,  $\gamma^\mu\gamma^5$  がすべての  $4 \times 4$  行列の「基底」を構成し, いかなる  $4 \times 4$  行列もこれら 16 個の線形結合で表される. とくに, たとえば 5 個の  $\gamma$  行列の掛け算に出合ったとしたら, それは 2 個以内の積で書き直せると思ってよい).

少し立ち止まって式 (7.68) の巧妙な表記法を味わってみよう. 双共変形のテンソルの性質に加えて, パリティに対する変換性さえも一目でわかってしまう.  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  は 4 元ベクトルのように見えて, 確かに 4 元ベクトルになっている. しかし,  $\gamma^\mu$  そのものはあきらかに 4 元ベクトルではなく, 四つの特定の行列の集まりだ (式 (7.17)). それらは別の慣性系でも変わらない. 変わるのは  $\psi$  で, ちょうど, テンソルの特徴をもつ

\*18  $\bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$  なので  $\psi^\dagger\psi$  は実際のところ 4 元ベクトルの第 0 成分となっていることに注意せよ. それこそが, 最初は奇妙に見えた規格化の慣例 (式 (7.43)) が実際には非常に賢いものだったという理由なのである.  $u^\dagger u$  を 4 元ベクトル  $\gamma^\mu$  の第 0 成分に規格化することで, 相対論的には「自然な」慣習を選んでいたので (問題 7.16).

たジャムが挟まれた「サンドイッチ」のようになっているのだ。

## 7.4 光子

古典電気力学では、電荷密度  $\rho$ 、電流密度  $\mathbf{J}$  によって生成される電場と磁場 ( $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$ ) は、マクスウェル方程式によって決定される\*19。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho & \text{(ii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \text{(iii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{aligned} \quad (7.70)$$

相対論的な表記では、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  が一緒になって反対称の2階のテンソルを形成し、「場の強さを表すテンソル」 $F^{\mu\nu}$  は

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.71)$$

である (つまり  $F^{01} = -E_x$ ,  $F^{12} = -B_z$  などだ)。一方、 $\rho$  と  $\mathbf{J}$  は4元ベクトル

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{J}) \quad (7.72)$$

を構成する。マクスウェル方程式の非斉次な部分、すなわち式(7.70)中の(i)と(iv)は、テンソルの表記を使うと、よりすっきりと書き直すことができる(問題7.20)。

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (7.73)$$

$F^{\mu\nu}$  の反対称性 ( $F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$ ) から、 $J^\mu$  は発散がゼロだということがわかる(問題7.20)。

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (7.74)$$

あるいは、3元ベクトルの表記法だと、 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$  となる。これは「連続の式」であり、局所電荷保存を表現している(問題7.21)。

\*19 この節では、古典力学にある程度慣れ親しんでいることを仮定している。つまり、量子電気力学での光子の描写がよりもっともらしくなるように書かれている。いつものように、ガウスのCGS単位系を使う。

マクスウェル方程式の斉次な部分、すなわち式 (7.70) の (iii) は、 $\mathbf{B}$  はあるベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の回転で書けることを意味する。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (7.75)$$

これを使うと、(ii) は

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (7.76)$$

となり、 $\mathbf{E} + (1/c)(\partial \mathbf{A}/\partial t)$  はスカラーポテンシャル  $V$  の傾きとして書ける。

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (7.77)$$

相対論的な表記では、式 (7.75) と (7.77) は

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (7.78)$$

となる。ただしここで

$$A^\mu = (V, \mathbf{A}) \quad (7.79)$$

である。この4元ベクトルで書いたポテンシャルを使うと、マクスウェル方程式 (7.73) の非斉次の部分は

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (7.80)$$

と読める。

古典電気力学では、場は物理的実体である。ポテンシャルはたんに便利な数学的な構成物だ。ポテンシャルを使った定式化のご利益は、マクスウェル方程式の斉次の部分を自動的に面倒みてくれることだ。式 (7.75) と (7.77) を与えると、 $V$  と  $\mathbf{A}$  が何であれ、すぐに式 (7.70) の (ii) と (iii) が導き出される。これにより、われわれは非斉次な方程式 (7.80) だけを気にすればよいことになる。ポテンシャルを使った定式化の短所は、 $V$  と  $\mathbf{A}$  を一意的に決定できないことだ。実際、式 (7.78) から、新たなポテンシャル

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad (7.81)$$

でも同じ結果になることがわかる（ここで  $\lambda$  は場所と時間に依存するどんな関数でもよい）。というのも、 $\partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  だからだ。そのような場に影

響を与えないポテンシャルの変化は「ゲージ変換」とよばれる。このゲージの自由度を利用して、さらにポテンシャルへ余分の制約を課することができる [3].

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (7.82)$$

これはローレンツ条件とよばれる。これを使いマクスウェル方程式 (7.80) をさらに単純化させることができ、

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad (7.83)$$

となる。ここで、

$$\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (7.84)$$

は、ラプラシアン ( $\nabla^2$ ) の相対論的拡張で「ダランベルシアン」とよばれる。

しかし、ローレンツ条件を課してもまだ  $A^\mu$  を一意的に決めることができない。ゲージ関数  $\lambda$  が波動方程式

$$\square \lambda = 0 \quad (7.85)$$

を満たすなら、式 (7.82) の関係を乱すことなく、別のゲージ変換が可能であるからだ。運悪く、 $A^\mu$  に残っている不定性をすっきり取り除く方法はなく、不定であることを受け入れる、すなわち、見せかけの自由度を許容するか、理論がローレンツ共変であることをわかりづらくする追加の制約を課するか、どちらかを選ばなければならない。QED の定式化の際には両方のアプローチが使われた。われわれは後者に従う。 $J^\mu = 0$  という何もない空間で

$$A^0 = 0 \quad (7.86)$$

を採用する (問題 7.22)。ローレンツ条件は

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (7.87)$$

となる。この選択 (クーロンゲージ) は単純で魅力的だが、一つの成分 ( $A^0$ ) を特別に扱うことで、われわれをある特定の慣性系に縛りつけてしまう (というか、むしろ、あらゆるローレンツ変換とあわせて、クーロンゲージ条件が回復するようにゲージ変換をしなければならない)。実際には、めったに問題にしないが、審美眼的には魅力的ではない。

QED では、 $A^\mu$  は光子の波動関数になる。自由光子は  $J^\mu = 0$  で式 (7.83) を満たす。

$$\square A^\mu = 0 \quad (7.88)$$

は、いまの文脈では、質量のない粒子に対するクライン-ゴールドン方程式 (7.9) とみなす。ディラック方程式のときと同様に、4 元運動量  $p = (E/c, \mathbf{p})$  をもつ平面波解を探す。

$$A^\mu(x) = a e^{-i/\hbar p \cdot x} \epsilon^\mu(p) \quad (7.89)$$

ここで、 $\epsilon^\mu$  は偏極ベクトルで光子のスピンを記述し、 $a$  は規格化因子だ。式 (7.89) を式 (7.88) に代入すると、 $p^\mu$  に対する制約

$$p^\mu p_\mu = 0 \quad \text{あるいは} \quad E = |\mathbf{p}|c \quad (7.90)$$

を得る。これは、そうであるべきように、質量のない粒子に対するものである。

一方、 $\epsilon^\mu$  は 4 個の成分をもつが、それらがすべて独立というわけではない。ローレンツ条件 (式 (7.82)) により、

$$p^\mu \epsilon_\mu = 0 \quad (7.91)$$

が要求される。さらに、クーロンゲージだと

$$\epsilon^0 = 0 \quad \text{なので} \quad \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} = 0 \quad (7.92)$$

となり、偏極の 3 元ベクトル ( $\boldsymbol{\epsilon}$ ) は伝播する方向に対して垂直になっていることを意味している。われわれは自由光子のことを「横偏極している」という\*20。さて、いま存在するのは、 $\mathbf{p}$  に垂直な、線形的に独立な二つの 3 元ベクトルである。たとえば、 $\mathbf{p}$  が  $z$  の方向を向いているとしたら、

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(1)} = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} = (0, 1, 0) \quad (7.93)$$

を選んでよい。ある与えられた運動量に対して四つの独立な解 (スピン 1 の粒子に対して多すぎる) をもつ代わりに、たった二つだけが残ったのだ。それは少なすぎるように感じる。光子は三つのスピン状態をもつべきではないのか。答えは否だ。スピン  $s$  をもち、かつ有限質量をもつ粒子は  $2s + 1$  個の異なるスピンの方向をもつが、質量ゼロの粒子はスピンによらず二つの状態しかない (ただし  $s = 0$  を除く。それは 1 個

\*20 これは、電磁場は横波であるという事実に対応している。

しかない). 運動の方向に沿って, ヘリシティ  $m_S = +1$  か  $m_S = -1$  しかもたないのだ. いい換えると, それは  $+s$  か  $-s$  しかもてないのだ\*21.

## 7.5 QED に対するファインマン則

7.2 節で, 運動量  $p = (E/c, \mathbf{p})$ , エネルギー  $E = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}$  をもつ自由電子と陽電子は以下の波動関数で記述されることを見出した\*22.

<u>電子</u>	<u>陽電子</u>	
$\psi(x) = a e^{-(i/\hbar)p \cdot x} u^{(s)}(p)$	$\psi(x) = a e^{(i/\hbar)p \cdot x} v^{(s)}(p)$	(7.94)

ここで,  $s = 1, 2$  はスピンの状態に対応する. スピノル  $u^{(s)}$  と  $v^{(s)}$  は運動量空間のディラック方程式を満たす.

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0 \qquad (\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0 \qquad (7.95)$$

これらの随伴である  $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$ ,  $\bar{v} = v^\dagger \gamma^0$  は

$$\bar{u}(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0 \qquad \bar{v}(\gamma^\mu p_\mu + mc) = 0 \qquad (7.96)$$

を満たす. それらは

$$\bar{u}^{(1)} u^{(2)} = 0 \qquad \bar{v}^{(1)} v^{(2)} = 0 \qquad (7.97)$$

のように直交しており,

$$\bar{u}u = 2mc \qquad \bar{v}v = -2mc \qquad (7.98)$$

のように規格化され,

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)} \bar{u}^{(s)} = (\gamma^\mu p_\mu + mc) \qquad \sum_{s=1,2} v^{(s)} \bar{v}^{(s)} = (\gamma^\mu p_\mu - mc) \qquad (7.99)$$

\*21  $m_S = \pm 1$  の光子の状態は右巻きと左巻きの円偏光に対応している. それぞれの偏極ベクトルは  $\epsilon_\pm = \mp(\epsilon^{(1)} \pm i\epsilon^{(2)})/\sqrt{2}$  である. ある特定のゲージを指定することで非物理的な ( $m_S = 0$ ) 解が取り除かれていることに注意せよ. もし, クーロンのゲージ条件を課さない「共変的な」方法に従ったとしたら, 縦偏極した自由光子が理論に存在することになるだろう. しかし, これらの「幽霊」は他のあらゆるものから分離され, 最終的な結果には影響を与えない.

\*22 参考として, これまでの節で出てきた重要な結果のまとめから始める. 「電子」「陽電子」というのが, それらは  $\mu^-$  や  $\mu^+$  でもよく,  $\tau^-$  や  $\tau^+$  でもよいし, (適切な電荷をもった) クォークや反クォークでもよい. 要するに, スピン 1/2 の点電荷であればよい.

というかたちで完全系をなす (問題 7.24). よく用いられるわかりやすい表記  $\{u^{(1)}, u^{(2)}, v^{(1)}, v^{(2)}\}$  は式 (7.46) と (7.47) で与えられる. 通常, われわれは電子と陽電子のスピンを平均化してしまう. その場合, これらが純粋なスピン上向きや下向きとなっていないことを気にしなくてよい. 必要なのは完全性なのだ. スピンが指定されている特定の問題においては, もちろん, そのときの状況に応じて適切なスピノルを使わなければならない.

一方, 運動量  $p = (E/c, \mathbf{p})$ , エネルギー  $E = |\mathbf{p}|c$  をもつ自由光子の波動関数は

$$\begin{aligned} & \text{光子} \\ A_\mu(x) &= ae^{-(i/\hbar)p \cdot x} \epsilon_\mu^{(s)} \end{aligned} \quad (7.100)$$

で記述される. ここで,  $s = 1, 2$  は二つのスピンの状態 (偏極) のためのものだ. 偏極ベクトル  $\epsilon_\mu^{(s)}$  は運動量空間でローレンツ条件を満たす.

$$p^\mu \epsilon_\mu = 0 \quad (7.101)$$

これらは,

$$\epsilon_\mu^{(1)*} \epsilon^{(2)\mu} = 0 \quad (7.102)$$

であることから直交していて,

$$\epsilon^{\mu*} \epsilon_\mu = -1 \quad (7.103)$$

のように規格化される. クーロンゲージでは,

$$\epsilon^0 = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} = 0 \quad (7.104)$$

となり, かつ, 偏極の 3 元ベクトルは完全性の関係 (問題 7.25) に従う.

$$\sum_{s=1,2} \epsilon_i^{(s)} \epsilon_j^{(s)*} = \delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j \quad (7.105)$$

便利でよく使われるわかりやすい表記  $(\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)})$  は式 (7.93) で与えられる.

ある特定のファインマン図に対応する振幅  $\mathcal{M}$  を計算するためには, 以下の手順を踏む.

### ファインマン則

1. 表記法: それぞれの外線に対しては, 運動量  $p_1, p_2, \dots, p_n$  を割り当て, 線の横

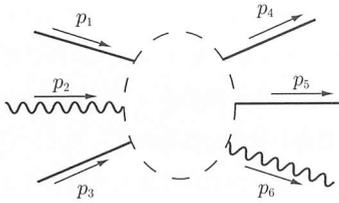


図 7.1 外線付きの QED の一般的なダイアグラム (内線は示していない)

に矢印を付けて正の方向 (時間の順行)<sup>\*23</sup>を示す. それぞれの内線に対しては, 運動量  $q_1, q_2, \dots$  を割り当て, ここでもまた線の横に矢印を描き正の向き (任意に決める) を示す. 図 7.1 を参照せよ.

2. 外線: 外線の寄与は以下に示す.

$$\begin{array}{l}
 \text{電 子 :} \\
 \text{陽電子 :} \\
 \text{光 子 :}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{入射 (}\rightarrow\bullet\text{)} : u \\
 \text{放出 (}\bullet\rightarrow\text{)} : \bar{u} \\
 \text{入射 (}\leftarrow\bullet\text{)} : \bar{v} \\
 \text{放出 (}\bullet\leftarrow\text{)} : v \\
 \text{入射 (}\rightsquigarrow\bullet\text{)} : \varepsilon_\mu \\
 \text{放出 (}\bullet\rightsquigarrow\text{)} : \varepsilon_\mu^*
 \end{array} \right.$$

3. バーテックス因子: それぞれのバーテックスで因子

$$ig_e \gamma^\mu$$

が掛かる. 無次元の結合定数  $g_e$  は電子の電荷と  $g_e = e\sqrt{4\pi/\hbar c} = \sqrt{4\pi\alpha}$  のように関係づけられる<sup>\*24</sup>.

4. 伝播関数: それぞれの内線に以下の因子が掛かる.

<sup>\*23</sup> もちろん, フェルミオンの場合にはすでに線の上に矢印があつて, それが電子なのか陽電子なのか分かるようになっている. 二つの矢印には互いに何の関係もなく, 同じ向きかもしれないし, 反対向きかもしれない.

<sup>\*24</sup>  $\hbar$  と  $c$  を 1 とするローレンツ-ヘヴィサイド単位系では,  $g_e$  は陽電子の電荷であるので, たいていの教科書では「 $e$ 」が書かれている. ガウス単位系を使う本書では,  $\hbar$  と  $c$  の因子を残す. 単位系に関する混乱を避ける最も簡単な方法は, すべての結果を無次元数  $\alpha$  で表すことである. QED のファインマン則を書く際には, 電子と陽電子を扱っていると仮定する. 一般的には QED の結合定数は  $-q\sqrt{4\pi/\hbar c}$  である. ただし,  $q$  は粒子の電荷とする (反粒子の場合は反対), 電子だと  $q = -e$  だが, たとえば「アップ」クォークだと  $q = (2/3)e$  になる.

$$\begin{aligned} \text{電子と陽電子} &: \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - m^2 c^2} \\ \text{光子} &: \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \end{aligned}$$

5. エネルギーと運動量の保存：それぞれのバーテックスで、以下のかたちのデルタ関数を書く。

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3)$$

ここで、 $k$  はバーテックスに入ってくる三つの 4 元運動量である（矢印が外を向いていたら、 $k$  はその線の 4 元運動量のマイナスだ）。

6. 内線の運動量についての積分：それぞれの内線の運動量  $q$  に対して、

$$\frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$$

という因子を掛けて積分する。

7. デルタ関数の打ち消し：結果は

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n)$$

という因子を含む。これは、全体のエネルギー・運動量保存に対応している。この因子を消して、 $i$  を掛け、その残りが  $\mathcal{M}$  だ。

それぞれが正しい順序で組み合わせられていることが決定的に重要だ。さもないと、行列要素の掛け算がちんぷんかんぷんになってしまう。最も安全な手順は、それぞれのフェルミオンの線を図中で逆向きにたどってみることだ。（たとえば）外に出ている電子の線から始めて、（線上にある）矢印が現れるまで、入ってくる電子か出て行く陽電子として、逆向きに進み、さまざまな線に掛かる因子やバーテックスや伝播関数に掛かる因子を、それらに出合うたびに左から右に並べていく。それぞれのフェルミオンの線が随伴スピノル、 $4 \times 4$  行列、スピノルというかたち（行ベクトル・行列・列ベクトル＝数）の「サンドイッチ」をつくる。一方で、それぞれのバーテックスは反変ベクトルの因子（ $\mu, \nu, \lambda, \dots$ ）をもっていて、随伴する光子の線、あるいは伝播関数の共変の因子と縮約される（心配することはない。いくつかの例題をやってみれば、これらすべてがもっとよくわかる。だが、将来参考にするために、段取りを定めておきたかった）。

以前と同様に、概念を大雑把にいうと、問題となっている過程に寄与するすべての

ダイアグラムを（望む次数で）すべて描き、それぞれに対する振幅（ $\mathcal{M}$ ）を計算し、全振幅を得るためにそれらを足し合わせ、それを黄金律に入れることで、場合に応じて崩壊頻度や散乱断面積が得られる。ときどき現れる新たな追加が一つある。フェルミオンの波動関数の反対称性により、二つの同一のフェルミオン外線を入れ替えるだけの違いの振幅を足すときは、負の符号を入れる。どちらのダイアグラムに負の符号をつけるかを気にする必要はない。というのも、いずれにせよ全振幅は結局 2 乗されてしまうからだ。しかし、それらの間の相対的な符号は負でなければならない。

8. 反対称性化：入ってくる二つの電子（もしくは出て行く陽電子）を交換するだけ、あるいは、入ってくる電子と出て行く陽電子を交換するだけ（あるいはその逆）のダイアグラムには負の符号をつける。

## 7.6 例

ここまで来ると、量子電気力学の典型的な計算の多くを再現できるようになっている。詳細で迷子にならないように、最も重要な過程のカタログ（表 7.1）を与えることから始める。最も簡単なのは電子とミュー粒子の散乱だ。というのも、ここでは 2 次のダイアグラム一つだけが寄与している\*25。

**例題 7.1** 電子-ミュー粒子散乱 それぞれのフェルミオンの線に沿って「後ろに」進み（図 7.2）、これまでのようにファインマン則を適用すると

$$(2\pi)^4 \int [\bar{u}^{(s_3)}(p_3)(ig_e\gamma^\mu)u^{(s_1)}(p_1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}^{(s_4)}(p_4)(ig_e\gamma^\nu)u^{(s_2)}(p_2)] \times \delta^4(p_1 - p_3 - q)\delta^4(p_2 + q - p_4)d^4q$$

を得る。光子の伝播関数の時空の添字が、光子の線の両端でバーテックス因子と交わっているところでどのように縮約されているかに注意せよ。（自明な） $q$  での積分を実行

\*25 もちろん、必ずしも  $e$  や  $\mu$  である必要はない。正しい質量と電荷さえ入れれば、いかなるスピン 1/2 の粒子でも構わない（たとえば、 $e$  と  $\tau$ 、 $\mu$  と  $\tau$ 、あるいは電子とクォークなど）。実際のところ、多くの本では電子-陽子散乱を標準的な例として使っている。しかし、それはむしろあまり適切ではない。なぜなら、陽子は構造物であり点状粒子ではないからだ。それでも、陽子の内部構造を無視できるとする範囲内では、悪い近似ではない（太陽系の理論において太陽を点質量として取り扱うのと同じように）。もし「ミュー粒子」が「電子」よりもはるかに重い場合にはモット散乱がある。さらに、「電子」が非相対論的な場合はラザフォード散乱がある。それら古典的な公式を QED が高い精度で再現する（例題 6.4）。

表 7.1 基本的な量子電気力学過程のカatalog

2 次の過程	
弾性散乱	
	電子-ミュー粒子散乱 ( $e + \mu \rightarrow e + \mu$ ) (モット散乱 ( $M \gg m$ )) $\Rightarrow$ ラザフォード散乱 ( $v \ll c$ )
	電子-電子散乱 ( $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ ) (メラ-散乱)
	電子-陽電子散乱 ( $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ ) (バーバー散乱)
	コンプトン散乱 ( $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ )
非弾性散乱	
	対消滅 ( $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$ )
	対生成 ( $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$ )
最も重要な 3 次の過程	
	$\Rightarrow$ 電子の異常磁気モーメント

し、全体のデルタ関数を落とすと

$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} [\bar{u}^{(s_3)}(p_3)\gamma^\mu u^{(s_1)}(p_1)] [\bar{u}^{(s_4)}(p_4)\gamma_\mu u^{(s_2)}(p_2)] \quad (7.106)$$

という関係を見出す。四つのスピノルに 8 個の  $\gamma$  行列をもつという複雑な見かけにかかわらず、これはたんなる数で、いったんスピンの指定されるとすぐに計算できる (問題 7.26)。

**例題 7.2 電子-電子散乱** この場合は、運動量  $p_3$ 、スピン  $s_3$  をもつ電子が  $p_1, s_1$  の電子の代わりに  $p_2, s_2$  の電子から現れるという 2 次のダイアグラムが存在する (図 7.3)。たんに、式 (7.106) で  $p_3, s_3 \leftrightarrow p_4, s_4$  という置き換えをすることで、この振幅が得られる。ルール 8 に従い、その二つの引き算を行うと、全振幅は

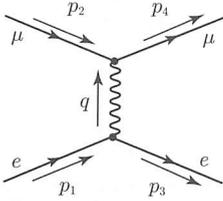


図 7.2 電子-ミュー粒子散乱

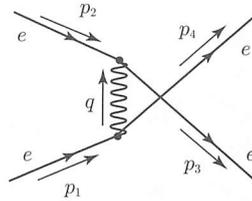


図 7.3 電子-電子散乱の「交差」

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)] [\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)] \\ & + \frac{g_e^2}{(p_1 - p_4)^2} [\bar{u}(4)\gamma^\mu u(1)] [\bar{u}(3)\gamma_\mu u(2)] \end{aligned} \quad (7.107)$$

となる (スピノルをラベル付けするために採用した, あきらかな省略に注意せよ)。

例題 7.3 電子-陽電子散乱 これにも二つのダイアグラムがある\*26。1 番目は電子-ミュー粒子散乱のものと似ている (図 7.4)。

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \int & [\bar{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)u(1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{v}(2)(ig_e\gamma^\nu)v(4)] \\ & \times \delta^4(p_1 - p_3 - q)\delta^4(p_2 + q - p_4) d^4q \end{aligned}$$

反粒子の線に沿って「逆に進む」というのは, 時間を順行しているということに注意せよ。順番はいつも, 随伴スピノル・行列・スピノルだ。よって, このダイアグラムの振幅は

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)] [\bar{v}(2)\gamma_\mu v(4)] \quad (7.108)$$

である。もう一つのダイアグラムは, 電子と陽電子の仮想対消滅の後の対生成を表している (図 7.5)。

\*26 電子-電子散乱および電子-陽電子散乱には二つのダイアグラムがあるのに電子-ミュー粒子散乱には一つしかないという事実は, 一見, 古典的極限と矛盾しているように見える。結局のところ, クーロンの法則によると, 二つの粒子の間の力が引力になるか斥力になるかは, 二つの粒子の電荷のみ依存し, それらが粒子の状態を変えない (あるいは粒子-反粒子の制約がある) かどうかには依存しない。それならば, 非相対論的極限では, 電子-ミュー粒子散乱の式を使っても電子-電子散乱の式を使っても同じ結果を得るはずである。しかし, 振幅が同じではないのは確かで, 断面積の公式 (式 (6.34)) には因子  $S$  がついていて, 電子-電子散乱では  $1/2$  で, 電子-ミュー粒子散乱では  $1$  だ。電子-陽電子散乱では  $S = 1$  だが, 2 番目の振幅 (式 (7.109)) は因子  $(v/c)^2$  によって 1 番目 (式 (7.108)) より因子  $(v/c)^2$  だけ小さいので, 非相対論的極限では  $\mathcal{M}_1$  だけが寄与する。

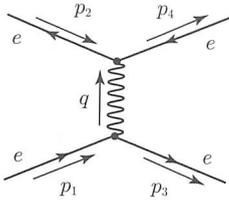


図 7.4 電子-陽電子散乱

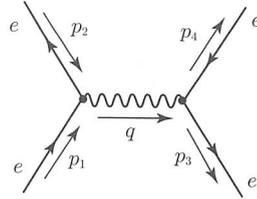


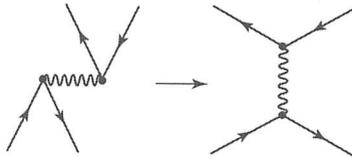
図 7.5 電子-陽電子散乱に寄与する 2 番目の図

$$(2\pi)^4 \int [\bar{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)v(4)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{v}(2)(ig_e\gamma^\nu)u(1)] \times \delta^4(q - p_3 - p_4)\delta^4(p_1 + p_2 - q) d^4q$$

よって、このダイアグラムの振幅は

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu v(4)] [\bar{v}(2)\gamma_\mu u(1)] \tag{7.109}$$

である。さて、これらの振幅を足すべきなのか、それとも引くべきなのだろうか。2番目のダイアグラム (図 7.5) において、入ってくる陽電子と出ていく電子を入れ替え、さらに見慣れたかたちに描きなおすと最初のダイアグラム (図 7.4) に戻る。ということは、ルール 8 により、負の符号が必要になる。



$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)] [\bar{v}(2)\gamma_\mu v(4)] + \frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu v(4)] [\bar{v}(2)\gamma_\mu u(1)] \tag{7.110}$$

**例題 7.4 コンプトン散乱** 電子の伝播関数と光子の偏極を含む例題として、コンプトン散乱  $\gamma + e \rightarrow \gamma + e$  を考えよう。ここでも二つのダイアグラムがあるが、それらはフェルミオンの入れ替えの違いではないので、二つの振幅を足す。最初のダイアグラム (図 7.6) から

$$(2\pi)^4 \int \epsilon_\mu(2) \left[ \bar{u}(4)(ig_e\gamma^\mu) \frac{i(\not{q} + mc)}{(q^2 - m^2c^2)} (ig_e\gamma^\nu)u(1) \right] \epsilon_\nu(3)^*$$

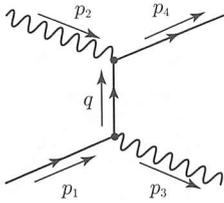


図 7.6 コンプトン散乱

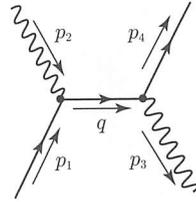


図 7.7 コンプトン散乱に寄与する 2 番目の図

$$\times \delta^4(p_1 - p_3 - q)\delta^4(p_2 + q - p_4) d^4q$$

を得る。それぞれの光子の偏極ベクトルの時空の添字が、光子が生成あるいは吸収されたバーテックスでの  $\gamma$  行列の添字と縮約されていることに注意せよ。また、電子の伝播関数が、電子の線を後ろにたどるというわれわれのやり方においてどのように入ってくるかにも注意せよ。ここで、非常に便利な「スラッシュ」という表記を導入した。

$$\not{a} \equiv a^\mu \gamma_\mu \tag{7.111}$$

図 7.6 に付随する振幅が

$$\mathcal{M}_1 = \frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2 - m^2 c^2} [\bar{u}(4)\not{\epsilon}(2)(\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc)\not{\epsilon}(3)^*u(1)] \tag{7.112}$$

となるのはあきらかだ<sup>\*27</sup>。一方、2 番目のダイアグラム (図 7.7) から

$$\mathcal{M}_2 = \frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2 - m^2 c^2} [\bar{u}(4)\not{\epsilon}(3)^*(\not{p}_1 + \not{p}_2 + mc)\not{\epsilon}(2)u(1)] \tag{7.113}$$

を得て、振幅の総和は  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$  である。

## 7.7 カシミール・トリック

実験によっては、入ってくる電子と出て行く電子 (あるいは陽電子) のスピンの指定され、光子の偏極が与えられる場合がある。その場合、次にすべきことは、 $\mathcal{M}$  の式の中に適切なスピノルと偏極ベクトルを入れて、断面積や寿命を決定するために実際に必要となる量である  $|\mathcal{M}|^2$  を計算することである。しかしながら、たいてい、われわれはスピンには興味がない。典型的な実験は方向のランダムな粒子のビームから始まり、ある方向に散乱される粒子数をたんに数える。この場合、関連する断面積は、初

<sup>\*27</sup> ここから先、 $\not{\epsilon}^*$  は  $\gamma^\mu (\epsilon_\mu^*)$  を意味する。  $\gamma$  行列は共役を取っていない。

期状態のスピン配位  $s_i$  を平均化し、終状態のスピン配位  $s_f$  をすべて足しあげたものになっている。原理的には、あらゆる可能な組み合わせについて  $|\mathcal{M}(s_i \rightarrow s_f)|^2$  を計算し、その後、それらの和と平均を取ることも可能である。

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \equiv |\mathcal{M}(s_i \rightarrow s_f)|^2 \text{ の初期状態のスピンを平均し、終状態のスピンを和をとったもの} \quad (7.114)$$

実際には、個々の振幅を評価することを一切せずに、 $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$  を直接計算する方がはるかにやさしい。

例として、電子-ミュオン粒子散乱の振幅 (式 (7.106)) を考えてみよう。両辺を 2 乗して

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)] [\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)] [\bar{u}(3)\gamma^\nu u(1)]^* [\bar{u}(4)\gamma_\nu u(2)]^* \quad (7.115)$$

を得る ( $\mu$  は先に使われてしまっているので、2 番目の縮約に対しては  $\nu$  を使う)。1 番目と 3 番目の (あるいは 2 番目と 4 番目の) 「サンドイッチ」を<sup>いちべつ</sup>一瞥すると、

$$G \equiv [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)] [\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* \quad (7.116)$$

という一般的なかたちの量を扱わなければならないことがわかる。ただしここで、 $a$  と  $b$  は適切なスピンと運動量を、 $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  は  $4 \times 4$  の行列である。7.6 節で記述した他のすべての過程、すなわち、メラエ散乱、バーバー散乱、コンプトン散乱、対生成、対消滅において、同様の構造をもつ表現が出てくる。まず初めに、複素共役を求める (エルミート共役と同じだ。なぜなら、大括弧の中の量は  $1 \times 1$  の「行列」なので)。

$$[\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = [u(a)^\dagger \gamma^0 \Gamma_2 u(b)]^\dagger = u(b)^\dagger \Gamma_2^\dagger \gamma^{0\dagger} u(a) \quad (7.117)$$

また、 $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$  そして  $(\gamma^0)^2 = 1$  であることから

$$u(b)^\dagger \Gamma_2^\dagger \gamma^{0\dagger} u(a) = u(b)^\dagger \gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0 u(a) = \bar{u}(b) \bar{\Gamma}_2 u(a) \quad (7.118)$$

となる。ここで\*28

$$\bar{\Gamma}_2 \equiv \gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0 \quad (7.119)$$

とした。ゆえに

\*28 文字の上に付いている線がいまや二つの役目を担うことを認識せよ。スピノルではそれは随伴  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$  (式 (7.58)) であり、 $4 \times 4$  行列ではそれは新しい行列  $\bar{\gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$  を定義する。

$$G = [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)] [\bar{u}(b)\bar{\Gamma}_2 u(a)] \quad (7.120)$$

である。

粒子  $b$  のスピンの方向に対する和を取る準備がようやくできた。完全性 (式 (7.99)) を使い、

$$\begin{aligned} \sum_{b \text{ spins}} G &= \bar{u}(a)\Gamma_1 \left\{ \sum_{s_b=1,2} u^{(s_b)}(p_b)\bar{u}^{(s_b)}(p_b) \right\} \bar{\Gamma}_2 u(a) \\ &= \bar{u}(a)\Gamma_1(\not{p}_b + m_b c)\bar{\Gamma}_2 u(a) = \bar{u}(a)Q u(a) \end{aligned} \quad (7.121)$$

を得る。ただし、 $Q$  は一時的に導入した、 $4 \times 4$  行列の短縮形で

$$Q \equiv \Gamma_1(\not{p}_b + m_b c)\bar{\Gamma}_2 \quad (7.122)$$

である。次に粒子  $a$  に対しても同じことを行う。

$$\sum_{a \text{ spins}} \sum_{b \text{ spins}} G = \sum_{s_a=1,2} \bar{u}^{(s_a)}(p_a)Q u^{(s_a)}(p_a)$$

あるいは、行列の掛け算をあらわに書き表すと\*29

$$\begin{aligned} \sum_{s_a=1,2} \sum_{i,j=1}^4 \bar{u}^{(s_a)}(p_a)_i Q_{ij} u^{(s_a)}(p_a)_j &= \sum_{i,j=1}^4 Q_{ij} \left\{ \sum_{s_a=1,2} u^{(s_a)}(p_a)\bar{u}^{(s_a)}(p_a) \right\}_{ji} \\ &= \sum_{i,j=1}^4 Q_{ij}(\not{p}_a + m_a c)_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^4 [Q(\not{p}_a + m_a c)]_{ii} \\ &= \text{Tr}[Q(\not{p}_a + m_a c)] \end{aligned} \quad (7.123)$$

である。ただしここで、「Tr」は行列のトレース (対角成分の和) を意味する。

$$\text{Tr}(A) \equiv \sum_i A_{ii} \quad (7.124)$$

結論：

$$\sum_{\text{all spins}} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)] [\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = \text{Tr}[\Gamma_1(\not{p}_b + m_b c)\bar{\Gamma}_2(\not{p}_a + m_a c)] \quad (7.125)$$

\*29 これはちょっと変わったうまいやり方なので、注視しよう。二つのスピノルの順番を変えてはならないが、それらの成分はたんなる数字なので、 $\bar{u}_i u_j = u_j \bar{u}_i$  のどちらで書いてもよい。次のステップでは、この掛け算を行列  $u\bar{u}$  の成分  $ji$  として認識する (ここでの、通常とは異なる行列の掛け算、すなわち、行列が  $4 \times 1$  掛ける  $1 \times 4$  は  $4 \times 4$  であることに注意せよ)。

これは、簡略化したように全然見えないかもしれない。実際、膨大だ。だが、スピノルが残されていないことに注意しよう。スピンに対する和を取ると、残っているのは行列の掛け算とそのトレースを取ることだけだ。これは「カシミール・トリック」とよばれることがある。というも、それをはっきりと初めて使ったのがカシミールだからだ [4]。ちなみに、(式 (7.125) 中の) どちらかの  $u$  を  $v$  に置き換えると、右辺中のそれに対応する質量の符号が変わる (問題 7.28)。

**例題 7.5** 電子-ミュー粒子散乱の場合 (式 (7.115)),  $\gamma_2 = \gamma^\nu$ , よって  $\bar{\gamma}_2 = \gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\nu$  である (問題 7.29)。カシミール・トリックを 2 回使うと、

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{M} \rangle|^2 &= \frac{g_e^4}{4(p_1 - p_3)^4} \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p}_1 + mc) \gamma^\nu (\not{p}_3 + mc)] \\ &\quad \times \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{p}_2 + Mc) \gamma_\nu (\not{p}_4 + Mc)] \end{aligned} \quad (7.126)$$

であることがわかる。ここで、 $m$  は電子の質量で、 $M$  はミュー粒子の質量である。因子  $1/4$  は、初期状態のスピンを平均化したいから付いている。つまり、二つの粒子があり、それぞれに二つの可能な方向があるので、平均は合計の 4 分の 1 となる。

カシミール・トリックを使うと、いくつかの複雑な  $\gamma$  行列の掛け算のトレースを計算するという問題に落ち着く。この代数は、多くの定理を使うことで容易になる。その定理をこれからリストアップする (証明は読者にお任せする。問題 7.31 から 7.34 を参照)。まず最初に、トレースに関する三つの一般的な事実について言及しなければならない。  $A$  と  $B$  が二つの行列、そして  $\alpha$  が数だとすると、

1.  $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$
2.  $\text{Tr}(\alpha A) = \alpha \text{Tr}(A)$
3.  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

3 番の定理から、 $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA)$  であるが、これは一般的には、別の順序の行列の掛け算のトレース、 $\text{Tr}(ACB) = \text{Tr}(BAC) = \text{Tr}(CBA)$  とは等しくない。掛け算の一番後ろを「剥ぎ取って」一番前に移動させてもよいが、順序は変えてはならない。

$$4. \quad g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$$

に留意すること、 $\gamma$  行列の根本的な反交換関係 (と一緒にそれに付随する「スラッシュ」の掛け算のルール) を思い出すことは有用だ。

$$5. \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \qquad 5'. \quad \not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2a \cdot b$$

これらから、「縮約の定理」

$$\begin{aligned} 6. \quad & \gamma_\mu \gamma^\mu = 4 \\ 7. \quad & \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu \qquad 7'. \quad \gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a} \\ 8. \quad & \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu = 4g^{\nu\lambda} \qquad 8'. \quad \gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c} \gamma^\mu = 4(a \cdot b)\not{c} \\ 9. \quad & \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \qquad 9'. \quad \gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}\not{d} \gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}\not{d} \end{aligned}$$

と次の「トレース定理」が導かれる。

$$\begin{aligned} 10. \quad & \text{ガンマ行列奇数個の積のトレースはゼロである。} \\ 11. \quad & \text{Tr}(1) = 4 \\ 12. \quad & \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \qquad 12'. \quad \text{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4(a \cdot b) \\ 13. \quad & \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}) \\ 13'. \quad & \text{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4(a \cdot b c \cdot d - a \cdot c b \cdot d + a \cdot d b \cdot c) \end{aligned}$$

最後に、 $\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$  は  $\gamma$  行列偶数個の積なので、ルール 10 から、 $\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda) = 0$  が導かれる。 $\gamma^5$  が偶数個の  $\gamma$  と掛け合わされたとき、

$$\begin{aligned} 14. \quad & \text{Tr}(\gamma^5) = 0 \\ 15. \quad & \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0 \qquad 15'. \quad \text{Tr}(\gamma^5 \not{a}\not{b}) = 0 \\ 16. \quad & \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma) = 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \qquad 16'. \quad \text{Tr}(\gamma^5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} a_\mu b_\nu c_\lambda d_\sigma \end{aligned}$$

を見出す。ただし\*30

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv \begin{cases} -1 & (\mu\nu\lambda\sigma \text{ が } 0123 \text{ の偶の順列}) \\ +1 & (\mu\nu\lambda\sigma \text{ が奇の順列}) \\ 0 & (\text{どれか二つの添字が等しい場合}) \end{cases} \qquad (7.127)$$

である。

\*30「偶の順列」といったときは、二つの添字の偶数回入れ替えを意味する。つまり、 $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\epsilon^{\nu\mu\lambda\sigma} = \epsilon^{\nu\lambda\sigma\mu} = -\epsilon^{\lambda\sigma\mu\nu}$  などとなる。いい換えると、 $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$  は、上付き添字のいかなる対の交換に対しても反対称である。 $\epsilon^{0123}$  が  $-1$  なのは奇妙に見えるかもしれない。なぜプラス 1 にしないのか。それはもちろん純粋に慣習である。あきらかに  $\epsilon_{0123}$  をプラス 1 に定義したかったので、添字を  $g_{\mu\nu}$  を用いて下げることによって  $\epsilon^{0123} = \epsilon_{0123}(1)(-1)^3 = -1$  になったのだ。ところで、3次元のレイビ・チヴィタの表記  $\epsilon_{ijk}$  (問題 4.19) に慣れている場合、三つの添字の偶の順列は順番の保存 ( $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$ ) に対応しているが、四つの添字の場合はそうならないこと、すなわち、 $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\epsilon^{\nu\mu\lambda\sigma} = \epsilon^{\nu\lambda\sigma\mu} = -\epsilon^{\lambda\sigma\mu\nu}$  であることに注意する必要がある。

例題 7.6 電子 - ミュー粒子散乱 式 (7.126) におけるトレースを計算せよ.

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_1 + mc)\gamma^\nu(\not{p}_3 + mc)] \\ &= \text{Tr}(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_3) + mc[\text{Tr}(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu) + \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\not{p}_3)] + (mc)^2 \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \end{aligned}$$

答え: ルール 10 により, 大括弧の項はゼロである. 最後の項はルール 12 によって, 最初の項はルール 13 によって評価できる.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_3) &= (p_1)_\lambda(p_3)_\sigma \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\sigma) \\ &= (p_1)_\lambda(p_3)_\sigma 4(g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\lambda\nu}) \\ &= 4[p_1^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu}(p_1 \cdot p_3) + p_3^\mu p_1^\nu] \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_1 + mc)\gamma^\nu(\not{p}_3 + mc)] \\ &= 4\{p_1^\mu p_3^\nu + p_3^\mu p_1^\nu + g^{\mu\nu}[(mc)^2 - (p_1 \cdot p_3)]\} \quad (7.128) \end{aligned}$$

である. 式 (7.126) の 2 番目のトレースは,  $m \rightarrow M$ ,  $1 \rightarrow 2$ ,  $3 \rightarrow 4$ , そして, ギリシャ文字の添字を下付きにしたのと同じだ. よって,

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{4g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} \{p_1^\mu p_3^\nu + p_3^\mu p_1^\nu + g^{\mu\nu}[(mc)^2 - (p_1 \cdot p_3)]\} \\ &\quad \times \{p_{2\mu}p_{4\nu} + p_{4\mu}p_{2\nu} + g_{\mu\nu}[(Mc)^2 - (p_2 \cdot p_4)]\} \\ &= \frac{8g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \\ &\quad - (p_1 \cdot p_3)(Mc)^2 - (p_2 \cdot p_4)(mc)^2 + 2(mMc^2)^2] \quad (7.129) \end{aligned}$$

となる.

## 7.8 断面積と寿命

さて, 慣れ親しんだ場所に戻って来た.  $|\mathcal{M}|^2$  (あるいは適切な場所では  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ ) を計算すれば, それを 6 章の断面積の公式にたんに代入すればよい. 一般的な場合は式 (6.38), 重心系における二体散乱に対しては式 (6.47), あるいは実験室系では問題 6.8, 6.9, 6.10 の中の式のどれかに代入する.



図 7.8 重い標的に散乱される電子

例題 7.7 モット散乱とラザフォード散乱 電子 (質量  $m$ ) がもつとずつと重い「ミュー粒子」 (質量  $M \gg m$ ) に散乱される.  $M$  の反跳を無視できると仮定し, 実験室系における ( $M$  が静止している) 微分散乱断面積を求めよ.

答え: 問題 6.8 によると, 断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\hbar}{8\pi M c} \right)^2 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$$

で与えられる. 標的は静止しているので (図 7.8),

$$p_1 = (E/c, \mathbf{p}_1), \quad p_2 = (Mc, \mathbf{0}), \quad p_3 = (E/c, \mathbf{p}_3), \quad p_4 = (Mc, \mathbf{0})$$

を得る. ここで,  $E$  は入射する (そして散乱される) 電子のエネルギーで,  $\mathbf{p}_1$  は入射運動量, そして  $\mathbf{p}_3$  は散乱運動量である (それらの大きさは等しい, すなわち,  $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_3| \equiv |\mathbf{p}|$  で, それらの間の角度を  $\theta$  とすると  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = p^2 \cos \theta$ ). ゆえに

$$\begin{aligned} (p_1 - p_3)^2 &= -(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2 = -\mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}_3^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 \\ &= -2p^2(1 - \cos \theta) = -4p^2 \sin^2(\theta/2) \end{aligned}$$

$$(p_1 \cdot p_3) = (E/c)^2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = p^2 + m^2 c^2 - p^2 \cos \theta = m^2 c^2 + 2p^2 \sin^2(\theta/2)$$

$$(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) = (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) = (ME)^2$$

$$(p_2 \cdot p_4) = (Mc)^2$$

である. これを式 (7.129) に入れて

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \left( \frac{g_e^2 M c}{p^2 \sin^2(\theta/2)} \right)^2 [(mc)^2 + p^2 \cos^2(\theta/2)] \quad (7.130)$$

を得る. それゆえ ( $g_e = \sqrt{4\pi\alpha}$  を思い出して)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\alpha \hbar}{2p^2 \sin^2(\theta/2)} \right)^2 [(mc)^2 + p^2 \cos^2(\theta/2)] \quad (7.131)$$

である。これはモットの公式だ。それはよい近似で、電子-陽子散乱の微分断面積を与える。もし入射電子が非相対論的、つまり  $p^2 \ll (mc)^2$  だと、式 (7.131) はラザフォードの公式になる (例題 6.4 と比べよ)。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{e^2}{2mv^2 \sin^2(\theta/2)} \right)^2 \quad (7.132)$$

崩壊についてはどうなっているのだろうか。実際のところ、純粋な QED にはそのようなものはない。フェルミオンが入ってくると、その同じフェルミオンがいずれは出て行く。フェルミオンの線はダイアグラムの中で終わってしまうことはできないし、QED には一つのフェルミオン (たとえばミュー粒子) を別のもの (たとえば電子) に変換するメカニズムはない。念のためにいっておくと、複合粒子の電磁崩壊は存在する。たとえば、 $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$  だ。しかし、この過程における電磁相互作用の効果はクォーク-反クォークの対消滅  $q + \bar{q} \rightarrow \gamma + \gamma$  に他ならない。それはまさしく散乱事象で、二つの衝突粒子がたまたま束縛状態になるものだ。

そのような過程の最もすっきりとした例は、ポジトロニウムの崩壊 ( $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ ) で、それを以下の例題で考える。ポジトロニウムの静止系で解析を行う (つまり、電子-陽電子対の重心系だ)。電子と陽電子はかなりゆっくりと動いている。本当にゆっくりなので、振幅を計算する目的においてはそれらは静止していると仮定してしまう。一方で、これは初期状態のスピンを平均化できない場合の一つだ。なぜなら、複合系はスピンの反平行の一重項か、スピン平行の三重項のどちらかで、断面積 (そして寿命) の公式はその二つの場合でまったく異なるからだ<sup>\*31</sup>。

**例題 7.8 対消滅**<sup>\*32</sup> 電子と陽電子が静止していて、かつ、スピン一重項の配位だと仮定して、 $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$  の振幅  $\mathcal{M}$  を計算せよ。

答え: 二つのダイアグラムが寄与する (図 7.9)。それぞれの振幅は (簡素化のために、 $\epsilon$  の複素共役の印を省く)

$$\mathcal{M}_1 = \frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2 - m^2 c^2} \bar{v}(2) \not{\epsilon}_4 (\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc) \not{\epsilon}_3 u(1) \quad (7.133)$$

<sup>\*31</sup> 実際のところは、一重項は光子偶数個 (おもには 2 個) にしか崩壊できず、三重項は奇数個 (たいていは 3 個) にしか崩壊できないという、かなり特殊な環境なので、この問題をカシミール・トリックで計算してしまうこともできる。スピンの和を取るときに三重項が入っているも、 $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$  の行列要素を計算するときは一重項の配位だけを自動的に選び出している。問題 7.40 を参照。

<sup>\*32</sup> 注意: 各ステップはほどほどに明確だが、これは簡単な計算ではない。読み流してもよい (あるいはすべて飛ばしても構わない)。最終結果は後で 1 回か 2 回使われるが、この段階で詳細をマスターする必要はない (しかし、ファインマン則の素晴らしい応用だと強く考えている)。

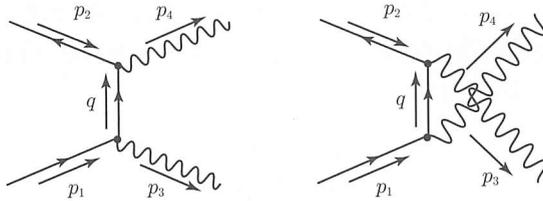


図 7.9 対消滅に寄与する二つのダイアグラム

$$\mathcal{M}_2 = \frac{g_e^2}{(p_1 - p_4)^2 - m^2 c^2} \bar{v}(2) \not{\epsilon}_3 (\not{p}_1 - \not{p}_4 + mc) \not{\epsilon}_4 u(1) \quad (7.134)$$

であり、それらを足す。

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad (7.135)$$

初期状態の粒子は静止しているので、二つの光子はそれぞれが反対向きに出てきて、一つ目の光子の方向を  $z$  軸に取っても構わない。すると、

$$\begin{aligned} p_1 &= mc(1, 0, 0, 0), & p_2 &= mc(1, 0, 0, 0), \\ p_3 &= mc(1, 0, 0, 1), & p_4 &= mc(1, 0, 0, -1) \end{aligned} \quad (7.136)$$

が得られ、よって、

$$(p_1 - p_3)^2 - m^2 c^2 = (p_1 - p_4)^2 - m^2 c^2 = -2(mc)^2 \quad (7.137)$$

となる。7.7 節のルール 5 を利用すると、振幅はいくらか簡素化される。

$$\not{p}_1 \not{\epsilon}_3 = -\not{\epsilon}_3 \not{p}_1 + 2(p_1 \cdot \epsilon_3)$$

しかし、 $\epsilon_3$  は (クーロンゲージでは) 空間成分しかもたない。一方で、 $p_1$  は純粹に時間的であるので、 $p_1 \cdot \epsilon = 0$  となり、それゆえ

$$\not{p}_1 \not{\epsilon}_3 = -\not{\epsilon}_3 \not{p}_1 \quad (7.138)$$

である。同様に、

$$\not{p}_3 \not{\epsilon}_3 = -\not{\epsilon}_3 \not{p}_3 + 2(p_3 \cdot \epsilon_3)$$

であるが、ローレンツ条件 (式 (7.91)) のおかげで  $(p_3 \cdot \epsilon_3) = 0$  になり、よって、

$$\not{p}_3 \not{\epsilon}_3 = -\not{\epsilon}_3 \not{p}_3 \quad (7.139)$$

となる。ゆえに、

$$(\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc)\not{\epsilon}_3 = \not{\epsilon}_3(-\not{p}_1 + \not{p}_3 + mc)$$

である。しかし、 $(\not{p}_1 - mc)u(1) = 0$  (式 (7.33)) なので

$$(\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc)\not{\epsilon}_3 u(1) = \not{\epsilon}_3 \not{p}_3 u(1) \quad (7.140)$$

である。同様に、

$$(\not{p}_1 - \not{p}_4 + mc)\not{\epsilon}_4 u(1) = \not{\epsilon}_4 \not{p}_4 u(1) \quad (7.141)$$

となる。これらをすべてつなぎ合わせると

$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{2(mc)^2} \bar{v}(2) [\not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 \not{p}_3 + \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4 \not{p}_4] u(1) \quad (7.142)$$

を得る。さて、

$$\not{p}_3 = mc(\gamma^0 - \gamma^3), \quad \not{p}_4 = mc(\gamma^0 + \gamma^3)$$

であるから、大括弧 (式 (7.142)) の中身は

$$mc[(\not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 + \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4)\gamma^0 - (\not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 - \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4)\gamma^3] \quad (7.143)$$

と書き表せる。しかし、

$$\not{\epsilon} = -\epsilon \cdot \gamma = -\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.144)$$

なので、

$$\begin{aligned} \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3 \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_4 \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_4) & 0 \\ 0 & (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_4) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.145)$$

である。4章 (問題 4.20) で、有用な定理に出合った。

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (7.146)$$

それに従うと

$$(\not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 + \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4) = -2\boldsymbol{\epsilon}_3 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_4 \quad (7.147)$$

となり (それはルール 5' から導出することもできる),

$$(\epsilon_4 \epsilon_3 - \epsilon_3 \epsilon_4) = 2i(\epsilon_3 \times \epsilon_4) \cdot \Sigma \quad (7.148)$$

である. ここで  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^0 \\ 0 \ \sigma \end{pmatrix}$  なのは以前の通りである. それゆえに,

$$\mathcal{M} = \frac{g_e^2}{mc} \bar{v}(2) [(\epsilon_3 \cdot \epsilon_4) \gamma^0 + i(\epsilon_3 \times \epsilon_4) \cdot \Sigma \gamma^3] u(1) \quad (7.149)$$

である.

これまで, 電子と陽電子のスピンのついては触れてこなかった. われわれは一重項状態に興味があることを思い出そう.

$$(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$$

象徴的に書くと

$$\mathcal{M}_{\text{singlet}} = (\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} - \mathcal{M}_{\downarrow\uparrow})/\sqrt{2} \quad (7.150)$$

であり,  $\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow}$  は, 「スピン上向き」の電子 (式 (7.46) における  $u^{(1)}$ )

$$u(1) = \sqrt{2mc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.151)$$

と, 「スピン下向き」の陽電子 (式 (7.47) における  $v^{(2)}$ )

$$\bar{v}(2) = \sqrt{2mc} (0 \ 0 \ 1 \ 0) \quad (7.152)$$

を使い, 式 (7.149) から求められる. これらのスピノルを使うと,

$$\bar{v}(2) \gamma^0 u(1) = 0 \quad (7.153)$$

$$\bar{v}(2) \Sigma \gamma^3 u(1) = -2mc \hat{z} \quad (7.154)$$

が得られる. よって,

$$\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} = -2ig_e^2 (\epsilon_3 \times \epsilon_4)_z \quad (7.155)$$

である. 一方で,  $\mathcal{M}_{\downarrow\uparrow}$  に対しては,

$$u(1) = \sqrt{2mc} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}(2) = -\sqrt{2mc} (0 \ 0 \ 0 \ 1) \quad (7.156)$$

であるから,

$$\mathcal{M}_{\uparrow\uparrow} = 2ig_e^2(\epsilon_3 \times \epsilon_4)_z = -\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} \quad (7.157)$$

が導き出される。ゆえに、静止している  $e^+e^-$  対の消滅で二つの光子が  $\pm\hat{z}$  の方向に放出される振幅は

$$\mathcal{M}_{\text{singlet}} = -2\sqrt{2} ig_e^2(\epsilon_3 \times \epsilon_4)_z \quad (7.158)$$

である ( $\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} = -\mathcal{M}_{\downarrow\uparrow}$  なので、三重項の配位  $(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$  がゼロになること、つまり、その場合は二つの光子への崩壊が禁止されるという昔の議論を確認した、ということに注意せよ)。

最後に、適切な光子の偏極ベクトルを入れなければならない。「スピン上向き」( $m_s = +1$ ) の場合

$$\epsilon_+ = -(1/\sqrt{2})(1, i, 0) \quad (7.159)$$

であり、一方「スピン下向き」( $m_s = -1$ ) の場合

$$\epsilon_- = (1/\sqrt{2})(1, -i, 0) \quad (7.160)$$

であることを (脚注 \*21 を参照) 思い出そう。もし光子が  $+z$  軸方向に飛んでいるなら、これらはそれぞれ右円偏極と左円偏極だ。全角運動量の  $z$  成分はゼロでなければならないので、光子のスピンは反対向きにそろっていなければならない。つまり、 $\uparrow\downarrow$  あるいは  $\downarrow\uparrow$  だ。最初の場合は、

$$\epsilon_3 = -(1/\sqrt{2})(1, i, 0), \quad \epsilon_4 = (1/\sqrt{2})(1, -i, 0),$$

であるから、

$$\epsilon_3 \times \epsilon_4 = i\hat{k} \quad (7.161)$$

である。2番目の場合、3と4が入れ替わっている。

$$\epsilon_3 \times \epsilon_4 = -i\hat{k} \quad (7.162)$$

われわれが必要としているのはあきらかに反対称の組み合わせ  $(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$  であり、そこに驚きはまったくない。これは、スピン  $1/2$  の二つの粒子を組み合わせたときのように、合計のスピンがゼロに相当する。振幅はまた  $(\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} - \mathcal{M}_{\downarrow\uparrow})/\sqrt{2}$  であるが、今回だけは、矢印は光子の偏極を意味している。そしてようやく

$$\mathcal{M}_{\text{singlet}} = -4g_e^2 \quad (7.163)$$

を得る（いままで落としていた、偏極ベクトルの複素共役を復活させた。これは、たんに式 (7.161) と (7.162) 中の符号をひっくり返しただけだ）。

仰々しくない答えにしては、計算が非常に多かった\*<sup>33</sup>。では、それで何ができるのだろうか。まず、電子-陽電子消滅の全断面積を計算できる。重心系での微分断面積は (式 (6.47))

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\hbar c}{8\pi(E_1 + E_2)} \right)^2 \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} |\mathcal{M}|^2 \quad (7.164)$$

となる。ここで、

$$E_1 = E_2 = mc^2, \quad |\mathbf{p}_f| = mc \quad (7.165)$$

であり、衝突は非相対論的なので

$$|\mathbf{p}_i| = mv \quad (7.166)$$

である。ただし、 $v$  は入射電子（あるいは陽電子）の速さである\*<sup>34</sup>。これをすべて入れると、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{cv} \left( \frac{\hbar\alpha}{m} \right)^2 \quad (7.167)$$

を得る。角度依存性がないので、全断面積は  $4\pi$  を掛けて [6]

$$\sigma = \frac{4\pi}{cv} \left( \frac{\hbar\alpha}{m} \right)^2 \quad (7.168)$$

\*<sup>33</sup> いったん慣れてしまうと、ファインマン図の評価は退屈で機械的な過程で、多くの計算をしてくれるコンピュータープログラムが数多く存在する。とりわけ、Mathematica と Maple は両方とも有用なパッケージをサポートしている [5]。

\*<sup>34</sup> 前は  $\mathcal{M}$  を計算するにあたり  $v = 0$  としたが、ここではあきらかにそうできない、これには矛盾があるのだろうか。そうではない。以下のように考えてみよう。 $\mathcal{M}$ （そしてまた  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $|\mathbf{p}_f|$ ,  $|\mathbf{p}_i|$  も）は  $v/c$  のべき乗に展開可能だ。われわれが行ったのは、それぞれの展開の第 1 項の計算だったのだ。

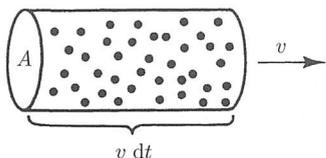


図 7.10 円筒の中の粒子数は  $\rho Av dt$  であり、よってルミノシティ (単位時間あたりに単位面積を通過する粒子数) は  $\rho v$  となる

となる。断面積が入射速度に反比例することは理にかなっているだろうか。答えはイエスだ。電子と陽電子がそれぞれよりゆっくり接近すれば、相互作用する時間がより長くなり、消滅する確率はより大きくなる。

ようやく、一重項状態のポジトロニウムの寿命を計算することができる。これはあらかじめ対消滅の断面積に関連している (式 (7.168)) が、どうやって精密に結びつけることができるだろうか。式 (6.13) に戻ると、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dN}{d\Omega}$$

であり、単位時間あたりの散乱事象数の総和は、ルミノシティと全断面積の積であることがわかる。

$$N = \mathcal{L}\sigma \quad (7.169)$$

$\rho$  を単位体積あたりの入射粒子数とすると、そして、それらが速さ  $v$  で飛んでいるとすると、ルミノシティ (図 7.10) は

$$\mathcal{L} = \rho v \quad (7.170)$$

となる。一つの「原子」に対しては、電子の密度は  $|\psi(0)|^2$  であり、 $N$  は単位時間あたりの崩壊の確率を表す。つまり、崩壊頻度だ。ゆえに、

$$\Gamma = v\sigma|\psi(0)|^2 = \frac{4\pi}{c} \left( \frac{\hbar\alpha}{m} \right)^2 |\psi(0)|^2 \quad (7.171)$$

である。さて、基底状態では

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\alpha mc}{2\hbar} \right)^3 \quad (7.172)$$

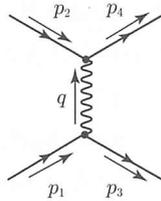
であるので (問題 5.23)、ポジトロニウムの寿命は

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{2\hbar}{\alpha^5 mc^2} = 1.25 \times 10^{-10} \text{ s} \quad (7.173)$$

であり、さかのぼること 5 章で (式 (5.33)) それを引用した。

### 7.9 くりこみ

7.6 節では、「電子-ミュー粒子」散乱について考察した。それは、最低次では以下のダイアグラムで記述され、



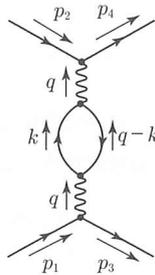
対応する振幅は、

$$\mathcal{M} = -g_e^2 [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{Q^2} [\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)] \quad (7.174)$$

である。ここで、

$$q = p_1 - p_3 \quad (7.175)$$

である。たくさんの 4 次補正があり、中でも最も興味深いのは「真空偏極」だ。



ここでは、仮想光子が一瞬だけ電子-陽電子対に分かれて、(2章で定性的に見たように) 電子の有効電荷を変化させる。いまここでの目的は、これを定量的にどう扱うかを示すことだ。

このダイアグラムの振幅は (問題 7.42)

$$\mathcal{M} = \frac{-ig_e^4}{q^4} [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)]$$

$$\times \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{k} + mc)\gamma_\nu(\not{k} - \not{q} + mc)]}{(k^2 - m^2 c^2)[(k - q)^2 - m^2 c^2]} \right\} [\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)] \quad (7.176)$$

で与えられる。これによって、光子の伝播関数に加えられる修正は (式 (7.174) と (7.176) を比較して)

$$\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i}{q^4} I_{\mu\nu} \quad (7.177)$$

であり、

$$I_{\mu\nu} = -g_e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{k} + mc)\gamma_\nu(\not{k} - \not{q} + mc)]}{(k^2 - m^2 c^2)[(k - q)^2 - m^2 c^2]} \quad (7.178)$$

である。運悪く、これは発散する。単純には、それは  $|k| \rightarrow \infty$  で

$$\int |k|^3 d|k| \frac{|k|^2}{|k|^4} = \int |k| dk = |k|^2 \quad (7.179)$$

のようになるはずだ (つまり、「二次発散」するはずだ)。実際には、代数上の打ち消しにより、 $\ln |k|$  になる (「対数発散」である)。しかし、気にする必要はない。いずれにせよ、大きく膨らんでしまうのだ。似た問題に6章で遭遇した。それは、ファインマン則における閉じたループのダイアグラムの特徴のように見える。ここでも、戦略は、無限大を「くりこまれた」質量と結合定数に吸収させることになるだろう。

式 (7.178) の積分は二つの時空に関する添字をもっている。いったん  $k$  について積分したら、残っている4元ベクトルは  $q^\mu$  だけなので、 $I_{\mu\nu}$  は  $g_{\mu\nu}(\ ) + q_\mu q_\nu(\ )$  という一般的なかたちをとらなければならない。ここで、括弧には  $q^2$  の関数が入る。ゆえに、それを

$$I_{\mu\nu} = -ig_{\mu\nu} q^2 I(q^2) + q_\mu q_\nu J(q^2) \quad (7.180)$$

と書く [7]。  $q_\mu$  は式 (7.176) において  $\gamma^\mu$  と縮約されるので、第2項は  $\mathcal{M}$  に何の寄与もなく、

$$[\bar{u}(p_3) \not{q} u(p_1)] = \bar{u}(p_3)(\not{p}_1 - \not{p}_3)u(p_1)$$

となる一方で、式 (7.95) と (7.96) から

$$\not{p}_1 u(p_1) = mc u(p_1), \quad \bar{u}(p_3) \not{p}_3 = \bar{u}(p_3) mc$$

であり、よって、

$$[\bar{u}(p_3)\not{q}u(p_1)] = 0 \quad (7.181)$$

となる。ゆえに、式(7.180)の第2項を忘れてよい。第1項については、積分(7.174)を適切に計算整理することにより、

$$I(q^2) = \frac{g_e^2}{12\pi^2} \left\{ \int_{m^2}^{\infty} \frac{dz}{z} - 6 \int_0^1 z(1-z) \ln \left[ 1 - \frac{q^2}{m^2 c^2} z(1-z) \right] dz \right\} \quad (7.182)$$

というかたちにできる(問題7.43)。

最初の積分は対数発散をはっきりと切り離している。それを取り扱うには、一時的にカットオフ  $M$  (ミュ-粒子の質量と混乱しないように) を課し、計算の最後にそれを無限大へ飛ばす。

$$\int_{m^2}^{\infty} \frac{dz}{z} \rightarrow \int_{m^2}^{M^2} \frac{dz}{z} = \ln \frac{M^2}{m^2} \quad (7.183)$$

2番目の積分

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv 6 \int_0^1 z(1-z) \ln[1+xz(1-z)] dz \\ &= -\frac{5}{3} + \frac{4}{x} + \frac{2(x-2)}{x} \sqrt{\frac{x+4}{x}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{x}{x+4}} \end{aligned} \quad (7.184)$$

は、面倒ではあるが完全に有限だ(図7.11)。大きな  $x$  と小さな  $x$  の極限で、

$$f(x) \cong \begin{cases} x/5 & (x \ll 1) \\ \ln x & (x \gg 1) \end{cases} \quad (7.185)$$

である。ゆえに、

$$I(q^2) = \frac{g_e^2}{12\pi^2} \left\{ \ln \left( \frac{M^2}{m^2} \right) - f \left( \frac{-q^2}{m^2 c^2} \right) \right\} \quad (7.186)$$

を得る。ここで、 $q^2$  が負であることに注意せよ。入射電子の重心系での3元運動量が  $p$  で、散乱角が  $\theta$  だとすると(問題7.44)、

$$q^2 = -4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (7.187)$$

となる。ゆえに、 $-q^2/m^2 c^2 \sim v^2/c^2$  であり、式(7.185)中の極限の場合は、それぞれ非相対論的、そして相対論的散乱に対応している。

以上から、真空偏極を含んだ、電子-ミュ-粒子散乱の振幅は

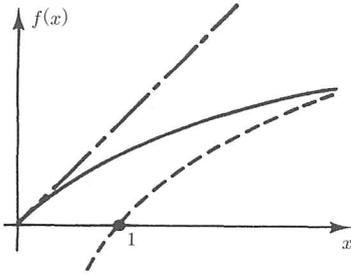


図 7.11  $f(x)$  のグラフ (式 (7.184)). 実線は数値計算の結果で、その下の点線は  $\ln x$  (それは、大きな  $x$  で  $f(x)$  を近似する) で、その上の直線は  $x/5$  (小さな  $x$  で  $f(x)$  を近似する) である

$$\mathcal{M} = -g_e^2 [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left\{ 1 - \frac{g_e^2}{12\pi^2} \left[ \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right) - f\left(\frac{-q^2}{m^2 c^2}\right) \right] \right\} \times [\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)] \quad (7.188)$$

になる。ようやく「くりこまれた」結合定数

$$g_R \equiv g_e \sqrt{1 - \frac{g_e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right)} \quad (7.189)$$

を導入することで一瞬 (カットオフ  $M$  に含まれた) 無限大を吸収するという、重要な局面にやって来た。式 (7.188) を  $g_R$  を使って書き直すと、

$$\mathcal{M} = -g_R^2 [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)] \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left\{ 1 + \frac{g_R^2}{12\pi^2} f\left(\frac{-q^2}{m^2 c^2}\right) \right\} [\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)] \quad (7.190)$$

を得る (式 (7.188) は、とにかく  $g_e^4$  のオーダーまで有効だ。よって、中括弧の中で  $g_e$  を使うか  $g_R$  を使うかは問題ではない)。

この結果について留意すべき重要な点が二つある。

- 無限大は消え去った。式 (7.190) 中に  $M$  はない。カットオフと関わるものすべては結合定数に吸収された。念のためにいうと、いまやすべてが  $g_e$  の代わりに  $g_R$  で書かれている。しかし、それはよいことだらけだ。  $g_e$  ではなく  $g_R$  がわれわれが実験室で実際に測定するものなのだ (ローレンツ-ヘヴィサイド単位系では、それは電子、あるいはミュー粒子の電荷であり、そのような 2 粒子間の引力あるいは斥力の係数としてそれを実験的に決定する)。もし、理論的な解析において、「ツリーレベル」(最低次) のダイアグラムだけを見たとしたら、物理的な電荷は「裸の」結合定数  $g_e$  と同じだと考える。しかし、より高次の効果を入れた途端に、測定した電荷に対応するのは本当に  $g_R$  であり、  $g_e$  ではないことがわかる。これは、以前の結果がすべて間違っていたことを意味するのだろうか。違う。それが

意味するのは、 $g_e$  を単純に物理的な電荷と解釈すると、高次のダイアグラムの発散部分を無意識のうちに取り扱っていたということなのだ。

2. 有限な補正項も残っていて、ここで注意を喚起するに値する重要なことは、それが  $q^2$  に依存しているということだ。これも結合定数の中に吸収させることができるが、「定数」がいまや  $q^2$  の関数になっている。それを「走る」結合定数とよぶ。

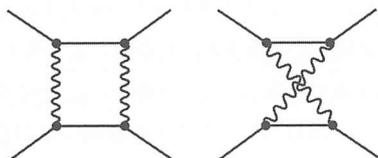
$$g_R(q^2) = g_R(0) \sqrt{1 + \frac{g_R(0)^2}{12\pi^2} f\left(\frac{-q^2}{m^2 c^2}\right)} \quad (7.191)$$

あるいは、微細構造「定数」( $g_e = \sqrt{4\pi\alpha}$ ) を使うと

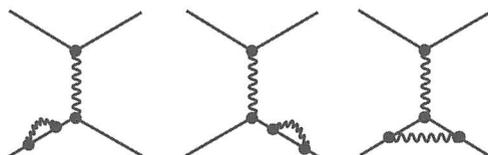
$$\alpha(q^2) = \alpha(0) \left\{ 1 + \frac{\alpha(0)}{3\pi} f\left(\frac{-q^2}{m^2 c^2}\right) \right\} \quad (7.192)$$

である。すると、電子（そしてミュー粒子）の有効電荷は、衝突の運動量遷移に依存する。大きな運動量遷移が意味するのはより近くまでの接近なので、別のいい方をすると、個々の粒子の有効電荷はそれぞれがどれくらい離れているかに依存するのだ。これは、互いの電荷を「遮蔽する」真空偏極による帰結だ。いまわれわれは、2章では純粋に定性的であった描像に対して、明確な公式を手に入れた。どうして、ミリカン、ラザフォード、あるいはクーロンでさえもこの効果にまったく気づかなかったのだろうか。電荷が定数でないならば、なぜエレクトロニクスから化学に至るすべてを台無しにしないのだろうか。その答えは、非相対論的な状況では、そのずれが極度にわずかだからだ。(1/10)cでの正面衝突でさえ、式(7.192)における補正項はわずか  $6 \times 10^{-6}$  でしかない(問題7.45)。それゆえ、ほとんどの目的において、 $\alpha(0) = 1/137$  で問題ないのだ。しかしながら、式(7.192)の2番目の項は、ラムシフトに観測可能な寄与を与え[8]、非弾性  $e^+e^-$  散乱において直接測定された[9]。さらに、量子色力学で同じ問題に遭遇するだろう。そこでは(クォークの閉じ込めにより)、短距離の相対論的領域が興味の対象なのだ。

一つの特別な4次のオーダーの過程(真空偏極)に集中してきたが、もちろん、いくつもの他のものが存在する。たとえば、「はしごダイアグラム」がある。



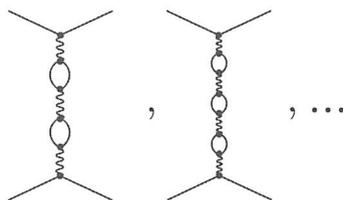
これらは有限であり、いま、特別な問題はない。しかし、他にも三つの発散する図がある（そしてもちろん、余分な仮想光子がミュオン粒子と結合する、さらに三つの図が存在する）。



最初の二つが電子の質量をくりこみ、3番目が磁気モーメントを変化させる。加えて、別々に考察した三つすべてが、電荷のくりこみに寄与する。

幸運なことに、最後の寄与は互いに打ち消し合うので、式(7.189)は有効のままでもいられる（私が「幸運」だというのは、これらの補正は仮想光子の線につながる粒子の質量に依存し、もしそれらが打ち消し合わなければ、ミュオン粒子に対してと、電子に対してでは別々のくりこみをしなければならなくなってしまうからだ。ウォードの恒等式（この打ち消し合いの正式名称）により、電荷の持ち主の質量がどんなものであっても、くりこみによって電荷の値が変わらないことを保証してくれている）<sup>\*35</sup>。

そして、以下のような、さらに高次のダイアグラムさえ存在する。



これらは、式(7.192)にさらにオーダー  $\alpha^2$ ,  $\alpha^3$  などの項を加えることになるが、ここではそれを追求することはない。本質的なアイデアはすべて出そろった。

<sup>\*35</sup> もちろん、式(7.176)において電子でやったように、ミュオン粒子の泡を光子の線に入れることは可能だ。しかし、これは電子とミュオン粒子の（そして同様に、タウとクォークの）電荷を同じ量だけ変化させるだろう。たんに電子が一番軽い荷電粒子であるという理由で、電子の挿入が支配的な補正なのだ。

## 参 考 書

- [1] J. D. Bjorken and S. D. Drell: Relativistic Quantum Mechanics and Relativistic Quantum Fields (McGraw-Hill, 1964).
- [2] さらなる議論については, J. D. Bjorken and S. D. Drell: Relativistic Quantum Mechanics and Relativistic Quantum Fields (McGraw-Hill, 1964) Chap. 5; A. Seiden: Particle Physics: A Comprehensive Introduction (Addison Wesley, 2005) Sect. 2.14.2.
- [3] J. D. Jackson: Classical Electrodynamics, 3rd edn (John Wiley & Sons, 1999) Sect. 6.3.
- [4] A. Pais: Inward Bound (Oxford, 1986) 375.
- [5] ファインマン図の自動計算に関するレビューは, R. Harlander and M. Steinhauser: Progress in Particle and Nuclear Physics, **43**, 167 (1999).
- [6] 式(7.168)のもととエレガントな導出については J. M. Jauch and F. Rohrlich: The Theory of Photons and Electrons, 2nd edn (Springer-Verlag, 1975) Sect. 12-6; (a) J. J. Sakurai: Advanced Quantum Mechanics (Addison-Wesley, 1967) 216 ff.
- [7] この表記法は, 以下に従っている. F. Halzen and A. D. Martin: Quarks and Leptons (John Wiley & Sons, 1984) Chap. 7; J. D. Bjorken and S. D. Drell: Relativistic Quantum Mechanics and Relativistic Quantum Fields (McGraw-Hill, 1964) Chap. 8. これらのテキストまたは, さらなる議論については以下を参照. J. J. Sakurai: Advanced Quantum Mechanics (Addison-Wesley, 1967) 216 ff.
- [8] たとえば, F. Halzen and A. D. Martin: Quarks and Leptons (John Wiley & Sons, 1984) Sect. 7.3.
- [9] I. Levine *et al.*: Physical Review Letters, **78**, 424 (1997).

## 問 題

- 7.1  $\partial\phi/\partial x^\mu$  は共変 4 元ベクトル ( $\phi$  は  $x, y, z, t$  のスカラー関数)であることを示せ. [ヒント: 最初に (式(3.8) から) 共変 4 元ベクトルがどのように変換するかを決める. そして,  $\partial\phi/\partial x^{\mu'} = (\partial\phi/\partial x^\nu)(\partial x^\nu/\partial x^{\mu'})$  を使って,  $\partial\phi/\partial x^\mu$  がどう変換するか見つける.]
- 7.2 式(7.17)が式(7.15)を満たすことを示せ.
- 7.3 式(7.43), (7.46), (7.47)を用いて式(7.45)を導出せよ.
- 7.4  $u^{(1)}$  と  $u^{(2)}$  (式(7.46)) が直交であること ( $u^{(1)\dagger}u^{(2)} = 0$ ) を示せ. 同様に  $v^{(1)}$  と  $v^{(2)}$  が直交であることを示せ. また,  $u^{(1)}$  と  $v^{(2)}$  は直交しているだろうか.
- 7.5  $u^{(1)}$  と  $u^{(2)}$  (式(7.46)) については, 非相対論的な制限では, 下の成分 ( $u_B$ ) が上の成分 ( $u_A$ ) よりも, 係数  $v/c$  だけ小さいことを示せ. [非相対論的近似では, これにより問題が単純になる.  $u_A$  を「大きな」成分として, そして  $u_B$  を「小さな」成分として考える ( $v^{(1)}$  と  $v^{(2)}$  については役割が逆になる). 対照的に, 相対論的極限では,  $u_A$  と  $u_B$  は同じぐらいの大きさになる.]
- 7.6 もし,  $z$  軸方向に運動しているとすると  $u^{(1)}$  (式(7.46)) は

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{(E+mc^2)/c} \\ 0 \\ \sqrt{(E-mc^2)/c} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となることを示せ. そして,  $u^{(2)}$ ,  $v^{(1)}$ ,  $v^{(2)}$  を求めよ. それらが  $S_z$  の固有スピンのこと

を確認して、固有値を求めよ。

- 7.7 ヘリシティ  $\pm 1$ 、運動量  $\mathbf{p}$  の電子の規格化されたスピノル表現  $u^{(+)}$ ,  $u^{(-)}$  を構築せよ。つまり、式 (7.49) を満たし、ヘリシティ演算子  $(\hat{p} \cdot \Sigma)$  の固有値  $\pm 1$  をもつ固有スピノル  $u$  を求めよ。

$$\left[ \begin{array}{l} \text{答え: } u^{(\pm)} = A \begin{pmatrix} u \\ \pm c|\mathbf{p}| \\ (E + mc^2)u \end{pmatrix} \\ \text{このとき } u = \begin{pmatrix} p_z \pm |\mathbf{p}| \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, \quad A^2 = \frac{(E + mc^2)}{2|\mathbf{p}|c(|\mathbf{p}| \pm p_z)} \end{array} \right]$$

- 7.8 この問題の目的は、ディラック方程式で記述された粒子が、その軌道角運動量 ( $L$ ) に加えて、内在的な角運動量 ( $S$ ) をもつことを実証することである。それぞれ単独では保存しないが、足したものは保存する。量子力学にほどよく精通している人のみやってみること。
- (a) ディラック方程式のハミルトニアン  $H$  を構築せよ。[ヒント: 式 (7.19) を  $p^0 c$  について解く.] 答え:  $H = c\gamma^0(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + mc)$ , このとき  $\mathbf{p} \equiv (\hbar/i)\nabla$  は運動量演算子である.]
- (b) 軌道角運動量  $L \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  とハミルトニアン  $H$  の交換関係を求めよ。[答え:  $[H, L] = -i\hbar c\gamma^0(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{p})$ ]  $[H, L]$  はゼロではないので、 $L$  自体は保存されない。よってここには他の形態の角運動量が潜んでいると考えられる。ここで、式 (7.51) で定義される「スピン角運動量」 $S$  を導入する。
- (c) スピン角運動量  $S \equiv (\hbar/2)\Sigma$  とハミルトニアン  $H$  との交換関係を求めよ。[答え:  $[H, S] = i\hbar c\gamma^0(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{p})$ ] これによって全角運動量  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  は保存される。
- (d) すべてのバスピノルは  $S^2$  の固有状態であることと、その固有値が  $\hbar^2 s(s+1)$  であることを示し、 $s$  を求めよ。また、このときディラック方程式が記述する粒子のスピンはいくつだろうか。
- 7.9 荷電共役演算子 ( $C$ ) はディラックスピノル  $\psi$  を「荷電共役」スピノル  $\psi_c$

$$\psi_c = i\gamma^2 \psi^*$$

にする。ここで  $\gamma^2$  はディラックのガンマ行列の 3 番目である。[Halzen and Martin [7] 5.4 節参照.]  $u^{(1)}$ ,  $u^{(2)}$  の荷電共役を求め、 $v^{(1)}$ ,  $v^{(2)}$  と比較せよ。

- 7.10 式 (7.18) から (7.19) に進むとき、(任意に) マイナス記号を含む因子を選んだ。式 (7.19) を  $\gamma^\mu p_\mu + mc = 0$  で置き換えると、7.2 節はどのように変更されるだろうか。
- 7.11 スピノルの変換規則 (式 (7.52), (7.53), (7.54)) を確認せよ。[ヒント: 元の座標系のディラック方程式の解は、変換された座標系の解に保ちたい。

$$i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc\psi = 0 \leftrightarrow i\hbar\gamma'^\mu \partial'_\mu \psi' - mc\psi' = 0$$

このとき  $\psi' = S\psi$  であり、

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu$$

これにより

$$(S^{-1}\gamma^\mu S) \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \gamma^\nu$$

となる。(逆) ローレンツ変換は  $\partial x^\nu / \partial x'^{\mu'}$  である。そこから示せ。]

- 7.12 問題 7.11 の手法を用いてパリティ変換則、式 (7.61) を導出せよ。
- 7.13 (a) 式 (7.53) から  $S^\dagger S$  を計算し、式 (7.57) を確認せよ。  
 (b)  $S^\dagger \gamma^0 S = \gamma^0$  を示せ。

7.14  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$  が変換 (7.52) のもとで不変であることを示せ.

7.15 随伴スピノル  $\bar{u}^{(1,2)}$  と  $\bar{v}^{(1,2)}$  は, 方程式

$$\bar{u}(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0, \quad \bar{v}(\gamma^\mu p_\mu + mc) = 0$$

を満たすことを示せ. [ヒント: 式 (7.49) と (7.50) のエルミート共役を取る. そして, 右から  $\gamma^0$  を掛け,  $(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$  を示す.]

7.16 規格化条件 (式 (7.43)) を随伴スピノルを使って表現すると

$$\bar{u}u = -\bar{v}v = 2mc$$

となることを示せ.

7.17 各成分がローレンツ変換 (式 (3.8)) に従うことを確認することで,  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$  が 4 元ベクトルであることを示せ. それがパリティのもとで (極性の) ベクトルとして変換されることを確認せよ (つまり, 「時間」成分は不変だが, 「空間」成分は符号を変える).

7.18 静止した電子を表すスピノル (式 (7.30)) がパリティ演算子  $P$  の固有状態であることを示せ. その内部パリティは何か. 陽電子はどうだろうか. 式 (7.61) の慣習的な符号を変えたらどうか. スピン 1/2 粒子のパリティの符号はある意味任意に決めてよいが, 粒子と反粒子が反対のパリティをもつという事実は恣意的ではないことに注意せよ.

7.19 (a)  $\gamma^\mu\gamma^\nu$  を 1,  $\gamma^5$ ,  $\gamma^\mu$ ,  $\gamma^\mu\gamma^5$ ,  $\sigma^{\mu\nu}$  の線形結合で表せ.

(b) 行列  $\sigma^{12}$ ,  $\sigma^{13}$ ,  $\sigma^{23}$  (式 (7.69)) を求めよ. また  $\Sigma^1$ ,  $\Sigma^2$ ,  $\Sigma^3$  (式 (7.51)) との関係を示せ.

7.20 (a) 式 (7.73) から式 (7.70) (i と iv) を導出せよ.

(b) 式 (7.73) から式 (7.74) を証明せよ.

7.21 連続の方程式 (式 (7.74)) が電荷の保存を要請することを示せ. [もしどうしてよいかわからないのであれば電磁気学のテキストを見よ.]

7.22 自由な空間ではいつも  $A^0 = 0$  にすることができることを示せ. この条件を満たさない  $A^\mu$  について, 式 (7.85) の条件を満たすゲージ関数  $\lambda$  を見つけて,  $A'_0$  (式 (7.81)) がゼロになることを示せばよい.

7.23 平面波ポテンシャル (式 (7.89)) にゲージ変換 (式 (7.81)) することを考える. ゲージ関数を

$$\lambda = i\hbar\kappa\epsilon e^{-(i/\hbar)p \cdot x}$$

とする. ここで,  $\kappa$  は任意定数,  $p$  は光子の 4 元ベクトルである.

(a)  $\lambda$  が式 (7.85) を満たすことを示せ.

(b) このゲージ変換は,  $e^\mu$  を  $e^\mu \rightarrow e^\mu + \kappa p^\mu$  のように変化させる効果があることを示せ (とくに, もし  $\kappa = -\epsilon^0/p^0$  を選択すると, クーロンゲージ偏光ベクトルが得られる (式 (7.92)). これは, QED の結果がゲージ不変であることを示す簡単に美しいテストになる. すなわち,  $e^\mu$  を  $e^\mu + \kappa p^\mu$  に置き換えても答えは変わらないのだ.

7.24  $u^{(1)}$ ,  $u^{(2)}$  (式 (7.46)) と  $v^{(1)}$ ,  $v^{(2)}$  (式 (7.47)) を用いて, スピノルの完全性関係 (式 (7.99)) を証明せよ. [注意:  $u\bar{u}$  は  $4 \times 4$  の行列で  $(u\bar{u})_{ij} \equiv u_i u_j$  と定義されている.]

7.25  $\epsilon^{(1)}$  と  $\epsilon^{(2)}$  (式 (7.93)) を用いて光子の完全関係 (式 (7.105)) を確認せよ.

7.26 重心系の電子-ミュオン粒子散乱 (式 (7.106)) の振幅を評価せよ. この散乱は  $e$  と  $\mu$  が  $z$  軸に沿って近づいて, 反発し,  $z$  軸に沿って離れていくとする. 始状態と終状態の粒子はすべてヘリシティ +1 とする. [答え:  $\mathcal{M} = -2g_e^2$ ]

7.27 対消滅  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$  の振幅 (式 (7.133), (7.134)) を導出せよ.

7.28 反粒子に対してカシミール・トリック (式 (7.125)) と同様の関係を導き出せ.

$$\sum_{\text{all spins}} [\bar{v}(a)\Gamma_1 v(b)] [\bar{v}(a)\Gamma_2 v(b)]^*$$

混合している場合はどうか.

$$\sum_{\text{all spins}} [\bar{u}(a)\Gamma_1 v(b)] [\bar{u}(a)\Gamma_2 v(b)]^*, \quad \sum_{\text{all spins}} [\bar{v}(a)\Gamma_1 u(b)] [\bar{v}(a)\Gamma_2 u(b)]^*$$

7.29 (a)  $\gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\nu$  を示せ. このとき,  $\nu = 0, 1, 2, 3$  である.

(b) もし,  $\Gamma$  が  $\gamma$  行列の積 ( $\Gamma = \gamma_a \gamma_b \cdots \gamma_c$ ) だとすると  $\bar{\Gamma}$  (式 (7.119)) は順番を逆にした積  $\bar{\Gamma} = \gamma_c \cdots \gamma_b \gamma_a$  になることを示せ.

7.30 カシミール・トリックを用いて, コンプトン散乱の式 (7.126) に類似した式を求めよ. 項が四つあることに注意せよ.

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* + \mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2$$

7.31 (a) 7.7 節のトレースの定理 1, 2, 3 を証明せよ.

(b) 式 4 を証明せよ.

(c) 反交換関係 5 を用いて 5' を証明せよ.

7.32 (a) 反交換関係 5 を用いて, 縮約定理 6, 7, 8, 9 を証明せよ.

(b) 7 から 7', 8 から 8', 9 から 9' をそれぞれ証明せよ.

7.33 (a) トレース定理 10, 11, 12, 13 を確認せよ.

(b) 12 から 12', 13 から 13' を証明せよ.

7.34 (a) トレース定理 14, 15, 16 を証明せよ.

(b) 15 から 15', また 16 から 16' を証明せよ.

7.35 (a)  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = -6\delta_\tau^\sigma$  ( $\mu, \nu, \lambda$  についての和を取る) を示せ.

(b)  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon_{\mu\nu\theta\tau} = -2(\delta_\theta^\lambda \delta_\tau^\sigma - \delta_\tau^\lambda \delta_\theta^\sigma)$  を示せ.

(c)  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon_{\mu\phi\theta\tau}$  の類似式を求めよ.

(d)  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon_{\omega\phi\theta\tau}$  の類似式を求めよ.

[ここで,  $\delta_\nu^\mu$  はクロネッカーのデルタ.  $\mu = \nu$  のとき 1, それ以外では 0 となる. これは, 混合 (共/反変) 計量テンソルを使っても書ける.  $\delta_\nu^\mu = g^{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ]

7.36 以下のトレースを計算せよ.

(a)  $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \gamma^\lambda (1 + \gamma^5) \gamma_\lambda]$

(b)  $\text{Tr}[(\not{p} + mc)(\not{q} + Mc)(\not{p} + mc)(\not{q} + Mc)]$ . ここで,  $p$  は質量  $m$  の (実) 粒子の 4 元運動量とし,  $q$  は質量  $M$  の (実) 粒子の 4 元運動量とする. 答えを  $m, M, c, (p \cdot q)$  で表せ.

7.37 式 (7.107) から (式 (7.129) と同様に) 電子-電子弾性散乱のスピン平均化振幅を求めよ. このとき, 電子の質量を無視できる (すなわち,  $m = 0$ ) 高エネルギー実験であるとする. [ヒント: 式 (7.129) から  $\langle |\mathcal{M}_1|^2 \rangle$  と  $\langle |\mathcal{M}_2|^2 \rangle$  を読み取る.  $\langle \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* \rangle$  についてはカシミール・トリックと同じ方法を用いて

$$\langle \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* \rangle = \frac{-g_e^4}{4(p_1 - p_3)^2 (p_1 - p_4)^2} \text{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_4 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_3)$$

を得る. このときトレースを求めるために定理を使う. 質量ゼロの粒子について, 運動量の保存 ( $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ ) は  $p_1 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_4$ ,  $p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4$ ,  $p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3$  を意味することに注目.]

$$\left[ \text{答え: } \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{2g_e^4}{(p_1 \cdot p_3)^2 (p_1 \cdot p_4)^2} [(p_1 \cdot p_2)^4 + (p_1 \cdot p_3)^4 + (p_1 \cdot p_4)^4] \right]$$

7.38 (a) 式 (7.129) から、高エネルギー ( $m, M \rightarrow 0$ ) 極限における重心系での電子-ミュー粒子散乱のスピ平均化振幅を求めよ。

(b) 高エネルギーの電子-ミュー粒子散乱の重心系での微分断面積を求めよ。  $E$  を電子のエネルギー、  $\theta$  を散乱角とする。

〔答え:  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{g_e^4}{2E^2} \left(\frac{1 + \cos^4 \theta/2}{\sin^4 \theta/2}\right)^2$ 〕

7.39 (a) 問題 7.37 の結果を用いて、高エネルギー領域 ( $m \rightarrow 0$ ) での重心系の電子-電子散乱のスピ平均化振幅を求めよ。

(b) 高エネルギーでの電子-電子散乱の重心系での微分断面積を求めよ。

〔答え:  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{g_e^4}{2E^2} \left(1 - \frac{4}{\sin^2 \theta}\right)^2$ 〕

答えを問題 7.38 と比較せよ (脚注 \*26 を参照)。

7.40 式 (7.158) から始めて式 (7.105) を用いて光子の偏光を合計し、  $|\mathcal{M}|^2$  を計算せよ。答えが式 (7.163) と合うことと、なぜこの方法で正しい答えが導かれるのかを説明せよ (実際には光子は一重項になっていなければならないのに、すべての光子の偏光を足していることに注意すること)。

7.41 式 (7.149) から  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$  の  $|\mathcal{M}|^2$  を計算せよ。またこれを用いて対消滅の微分断面積を求めよ。式 (7.167) と比較せよ (脚注 \*31 を参照)。

7.42 式 (7.176) を導出せよ。この導出には最後のファインマン則が必要である。つまり、閉じたフェルミオンループは  $-1$  を掛けてトレースを取る。

7.43 式 (7.182) を導出せよ。 [ヒント: Sakurai [6] の Appendix E から積分定理を用いよ。]

7.44 式 (7.187) を導出せよ。

7.45 重心系での正面衝突の式 (7.192) の補正項を計算せよ。ただし、電子が  $(1/10)c$  で移動していると仮定する。実験 [9] では、ビームエネルギーは 57.8 GeV であった。測定された微細構造「定数」はどのようなものか。実際の結果を見て、予測と比較すること。

7.46 なぜ光子は  $\gamma \rightarrow \gamma + \gamma$  (図 7.12) のように「崩壊」しないのだろうか。このダイアグラムの振幅を計算せよ。 [これは、奇数個の頂点の閉じた電子ループを含む任意のダイアグラムの振幅がゼロである、というファリーの定理の一例である。]

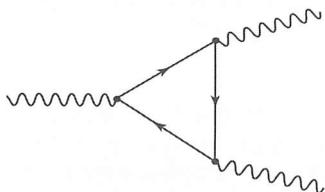


図 7.12 光子の崩壊  $\gamma \rightarrow 2\gamma$  はファリーの法則から禁止される (問題 7.46)

7.47 問題 7.30 の答えから、(標的が静止している系における) コンプトン散乱のクライン-仁科公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta\right]$$

を導出せよ。ここで、 $\omega, \omega'$  は入射光子の振動数、散乱光子の振動数である (問題 3.27)。

以下の問題 48~50 は以下の模型を考える。光子が質量のないベクトル (スピン 1) 粒子ではなく、質量をもつスカラー (スピン 0) であるとする。とくに、QED バーテックス因子が  $ig_e 1$  (1 は  $4 \times 4$  の単位行列) であり、「光子」の伝播関数は

$$\frac{-i}{q^2 - (m_\gamma c)^2}$$

とする。いま、光子偏極ベクトルは存在しない。したがって、外部光子線に対する因子も存在しない。これ以外には、QED のファインマン則の変更はない。

7.48 崩壊することのできる十分重い「光子」を仮定する。

- (a)  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  の崩壊率を計算せよ。  
 (b) もし  $m_\gamma = 300 \text{ MeV}/c^2$  とすると光子の寿命は何秒か。  
 7.49 (a) この理論における電子-ミュー粒子散乱の振幅  $\mathcal{M}$  を求めよ。  
 (b) スピン平均化振幅  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$  を計算せよ。  
 (c) 重心系での電子-ミュー粒子散乱の微分断面積を求めよ。十分高エネルギーとして電子とミュー粒子の質量を無視する ( $m_e, m_\mu \rightarrow 0$ )。答えを入射電子のエネルギー  $E$  と散乱角  $\theta$  を用いて表せ。  
 (d) (c) の結果から全断面積を計算せよ。ここで、光子は非常に重いとする ( $m_\gamma c^2 \gg E$ )。  
 (e) (b) に戻って、今度は「ミュー粒子」が非常に重い ( $|\mathbf{p}_e|/c \ll m_e \ll m_\gamma \ll m_\mu$ ) 低エネルギーの散乱を考える。ミュー粒子が反跳しないと仮定して実験室系 (ミュー粒子が静止) の微分断面積を求めよ。ラザフォードの公式 (例題 7.7) と比較し全断面積を求めること。[実際、 $m_\gamma \rightarrow 0$  で  $|\mathbf{p}| \ll mc$  とすると、正しいラザフォード公式が得られる。]

- 7.50 (a) この理論で、対消滅 ( $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ ) の振幅  $\mathcal{M}$  を求めよ。  
 (b) 電子と「光子」の質量を無視できる ( $m_e, m_\gamma \rightarrow 0$ ) 高エネルギーを仮定して、 $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$  を求めよ。  
 (c) (b) を重心系で計算せよ。このとき、入射電子のエネルギー  $E$  と散乱角  $\theta$  を用いて表せ。  
 (d) ここでも、 $m_e = m_\mu = 0$  と仮定して重心系での対消滅の微分断面積を求めよ。また全散乱断面積は有限だろうか。

7.51 スピン 1/2 の粒子で電氣的に中性の場合、ひょっとするとそれ自身が反粒子であるかもしれない (もしそうなら、これらは「マヨラナ」フェルミオンとよばれる。標準模型では唯一可能な候補はニュートリノである)。

- (a) 問題 7.9 によると荷電共役スピノルは  $\psi_c = i\gamma^2 \psi^*$  である。すると、もし粒子と反粒子が同じものであれば  $\psi = \psi_c$  となる。この条件がローレンツ不変であることを示せ (一つの慣性系で等式が成り立てば、任意の慣性系でも成り立つ)。<sup>[ヒント: 式 (7.52), (7.53) を用いる。]</sup>  
 (b)  $\psi = \psi_c$  であれば  $\psi$  の「下の」2成分は  $\psi_B = -i\sigma_y \psi_A^*$  のように上の二つの要素と関係がつく。したがって、マヨラナ粒子は2成分スピノルの要素のみを必要とする ( $\chi \equiv \psi_A$ )。ディラックスピノルでは4成分だが、マヨラナスピノルの場合では二つの成分が不要となる。2成分で書かれるマヨラナ粒子のディラック方程式を示す

$$i\hbar[\partial_0 \chi + i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \sigma_y \chi^*] - mc\chi = 0$$

となる。「下の」成分のディラック方程式がこの式と無矛盾であることを確かめよ。

- (c) スピノル  $\chi$  のマヨラナ状態の平面波解を求めよ。[ヒント: 一般的な線形結合は  $\psi = a_1 \psi^{(1)} + a_2 \psi^{(2)} + a_3 \psi^{(3)} + a_4 \psi^{(4)}$  (式 (7.46), (7.47) で、(b) の制限を課し、 $a_3, a_4$  を ( $a_1$  と  $a_2$  に用いて) 解く。そして (たとえば)  $\chi^{(1)}$  は  $a_1 = 1, a_2 = 0$  を、 $\chi^{(2)}$  は  $a_1 = 0, a_2 = 1$  を選ぶ。]