

6

ファインマン則

この章では、素粒子の力学を定量的に記述することを試みる。実際問題としては、崩壊頻度 (Γ) と散乱断面積 (σ) の計算になる。その手順は、以下の二つの大きく異なる部分からなっている。(1) 問題となっている過程の「振幅」(\mathcal{M}) を決定するために対応するファインマン図の評価をすること、そして(2) 場合に応じて、 Γ あるいは σ を計算するために、 \mathcal{M} をフェルミの「黄金律」に代入すること。面倒で複雑な代数を避けるために、ここでは単純化したモデルを導入する。QED, QCD, そして GWS のような現実的な理論は、後の章で議論する。好みに応じて 6 章は 3 章の直後に読んでも構わない。この章は細心の注意を払って学習してほしい。さもないと、その後が無意味なものになってしまう。

6.1 崩壊と散乱

序論で言及したように、素粒子の相互作用には実験的に三つの調べ方がある。束縛状態、崩壊、そして散乱だ。(シュレーディンガー方程式による) 非相対論的量子力学は、とりわけ束縛状態を扱うのに向いている。それゆえ、5 章ではできるだけそれを使った。対照的に、(ファインマンの定式の中では) 相対論的な理論は、崩壊や散乱を記述するのにとりわけよく適している。本章では、ファインマンの「計算方法」についての基本的なアイデアと戦略を紹介する。その後の章では、これを使い、強い相互作用、電磁気相互作用、弱い相互作用の理論を展開する。

6.1.1 崩壊の頻度

まず最初に、どんな物理量を計算したいのかを決めなければならない。崩壊の場合、最も興味があるのは、対象としている粒子の寿命だ。たとえばミュー粒子の寿命といったとき、正確には何を意味しているのだろうか。ここでは、もちろん、静止しているミュー粒子を考えている。動いているミュー粒子は、(われわれの見込みでは) 時間の延びのために長生きする。しかし、静止しているミュー粒子さえも、すべてが同じ時

間だけ生き続けるわけではない。というのは、崩壊過程は本質的にランダム性があるからだ。ある特定のミュー粒子の寿命を計算することは無理である。結局わかるのは、多数のサンプル中のミュー粒子の平均的な（あるいは「平均」）寿命 τ である。

さて、素粒子には記憶がないので、ある与えられた瞬間から次の1マイクロ秒の間にミュー粒子が崩壊する確率は、そのミュー粒子がどれだけ昔に生成されたかとは無関係である（生物とはまったく異なる点である。80歳の人間は、20歳の人間よりも次の年に死にやすく、その人の体は80年間生き続けて弱っている。しかし、すべてのミュー粒子は、いつ生成されたかによらず、同一である。実際のな面からは、すべて同等である）。そこで、重要になる変数は、あるミュー粒子が単位時間あたりに崩壊する確率、すなわち崩壊の頻度 Γ である。たとえば、もし、ある時刻 t に $N(t)$ 個という大量のミュー粒子があったとしたら、 $N\Gamma dt$ 個のミュー粒子が次の微小時間 dt の間に崩壊する。これにより、もちろん、残っている数は減っていく。

$$dN = -\Gamma N dt \quad (6.1)$$

これから次の式が得られる。

$$N(t) = N(0)e^{-\Gamma t} \quad (6.2)$$

残っている粒子数が時間とともに指数関数的に減っているのはあきらかだ。読者自身も確認できるように（問題6.1）、平均の寿命はたんに崩壊頻度の逆数となる。

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (6.3)$$

実際のところ、たいていの粒子はいくつかの異なる経路で崩壊できる。たとえば、 π^+ は、普通 $\mu^+ + \nu_\mu$ に崩壊するが、ときには $e^+ + \nu_e$ に行くこともあるし、たまには π^+ が $\mu^+ + \nu_\mu + \gamma$ に崩壊するし、 $e^+ + \nu_e + \pi^0$ に行くことさえ知られている。そのような状況では、全崩壊頻度は個々の崩壊頻度の和

$$\Gamma_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \quad (6.4)$$

となり、粒子の寿命は Γ_{tot} の逆数になる。

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{\text{tot}}} \quad (6.5)$$

τ に加えて、さまざまな崩壊比、すなわち、ある種類の粒子が個々のモードに崩壊す

る割合を計算したくなる。崩壊比は、崩壊頻度によって決まる。

$$i \text{ 番目の崩壊モードの分岐比} = \Gamma_i / \Gamma_{\text{tot}} \quad (6.6)$$

ということは、崩壊に関して本質的な問題は個々のモードに対する崩壊頻度 Γ_i を計算することである。そこから寿命や崩壊比を導き出すのは簡単な話だ。

6.1.2 断面積

散乱についてはどうだろう。どのような物理量を実験家は測定し、理論家は計算すべきだろうか。もし「雄牛の目」を狙うアーチェリーについて話をしているのであれば、興味のあるパラメーターは、標的の大きさ、あるいはより正確にいうと、飛んでくる矢の流れに立ちはだかる断面積だろう。大雑把な感覚では、同じことが素粒子の散乱にもいえる。もし電子の流れを水素のタンク（本質的には陽子の集まり）に発射すれば、興味あるパラメーターは陽子の大きさ、つまり、入射してくるビームに立ちはだかる断面積 σ だ。しかしながら、いくつかの理由で、アーチェリーの場合よりも話は複雑だ。まず最初に、標的は「軟らかい」。「当たりか外れ」という単純な話ではなく、むしろ「近ければ近いほどより大きく曲がる」。それでも、「実効的な」断面積を定義することは可能だ。どうすればよいかはこの後すぐに示す。2番目に、断面積は「標的」の構造だけでなく「矢」の性質にも依存する。電子はニュートリノよりも鋭く水素と散乱するし、パイ中間子ほどは散乱しない。というのも、異なる相互作用が含まれているからだ。断面積は、反応で生成される粒子によっても変わる。もしエネルギーが十分に高ければ、弾性散乱 ($e + p \rightarrow e + p$) だけでなく、 $e + p \rightarrow e + p + \gamma$ や $e + p + \pi^0$ あるいは原理的には $\nu_e + \Lambda$ というようなさまざまな非弾性散乱過程も起こる。これらのそれぞれが、それぞれ自身の過程 i に対する（「排他的」）散乱断面積 σ_i をもっている。しかし、実験によっては、終状態の粒子は見ないで、全（「内包的」）断面積にのみ興味のあるときがある。

$$\sigma_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (6.7)$$

最後に、それぞれの断面積は、典型的には入射粒子の速度に依存する。最も単純に考えると、断面積は入射粒子が標的の近傍にいる時間に比例すると考えてよい。つまり、 σ は v に反比例すべきだ。しかし、この振る舞いは「共鳴」の近くで劇的に変わる。共鳴というのは、関与した粒子が相互作用するのを「好む」特別なエネルギーのことで、

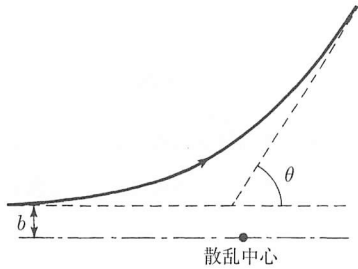


図 6.1 固定したポテンシャルからの散乱. θ は散乱角, b はインパクトパラメーター

ばらばらになる前に短寿命の準束縛状態を形成する. v に対する σ (あるいは, より一般的に表示されるように, E に対する σ) のグラフにある, そのような「でっぱり」は, 実際, 短寿命な粒子を発見する主要な手段である (図 4.6). というわけで, アーチリーの標的と違い, 素粒子の断面積にははるかに多くの物理が含まれている.

さて, 標的が軟らかいときの「断面積」が何を意味するのかという問題に戻ろう. ある粒子 (電子かもしれない) がやって来て, ある種のポテンシャル (静止した陽子がつくるクーロンポテンシャルかもしれない) に出会い, 角度 θ で散乱するでしょう. この散乱角は, インパクトパラメーター b の関数である. インパクトパラメーターとは, 入射粒子が元の飛跡のまま進んでいたときに, 散乱中心からどれだけ離れていたかの距離のことである (図 6.1). 通常, インパクトパラメーターが小さければ小さいほど, 曲がり方が大きい. しかし, 実際の $\theta(b)$ の関数形は, 反応に寄与するポテンシャルのかたちに依存する.

例題 6.1 剛体球面での散乱 粒子が半径 R の球で弾性的に散乱することを考えよう. 図 6.2 から

$$b = R \sin \alpha, \quad 2\alpha + \theta = \pi$$

であることがわかる. ゆえに,

$$\sin \alpha = \sin(\pi/2 - \theta/2) = \cos(\theta/2)$$

であり, よって,

$$b = R \cos(\theta/2) \quad \text{あるいは} \quad \theta = 2 \cos^{-1}(b/R)$$

となる. これが, 古典的な剛体球との散乱における θ と b との関係である.

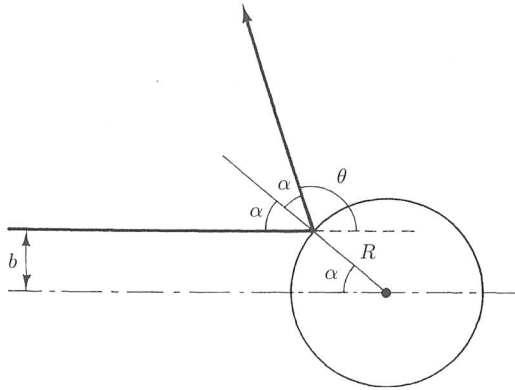
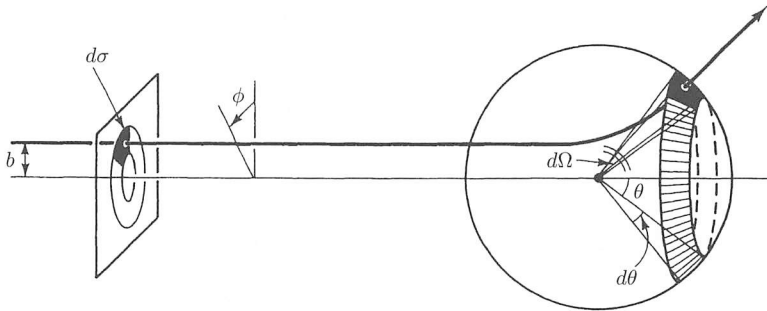


図 6.2 剛体球面での散乱

図 6.3 面積 $d\sigma$ に入った粒子は、立体角 $d\Omega$ に散乱して入る

もし粒子がインパクトパラメーター b と $b + db$ の間にやってくると、それは散乱角 θ と $\theta + d\theta$ の間に現れる。より一般的には、粒子が無限小の面積 $d\sigma$ を通過すると、それに対応する立体角 $d\Omega$ に散乱して入る (図 6.3)。当然のことながら、 $d\sigma$ が大きくなれば、 $d\Omega$ も大きくなる。その比例係数は微分 (散乱) 断面積 D とよばれる*1。

$$d\sigma = D(\theta)d\Omega \quad (6.8)$$

この命名はひどい。数学的には、微分にも導関数にさえもなっていない。その言葉は、 $d\sigma/d\Omega$ ではなく、 $d\sigma$ に使われるのが自然であった……。しかし、だからといって立

*1 原理的には、 D は方位角 ϕ に依存してもよい。しかし、たいいていのポテンシャルは球面対称で、その場合、微分断面積は θ だけ (あるいは b にだけ) 依存する。ところで、表記 D は私が独自に使用したものだ。多くの人のはたんに $d\sigma/d\Omega$ と書くが、本書ではこの後も D を使う。

ち止まるのはやめよう。

さて、図 6.3 から

$$d\sigma = |b db d\phi|, \quad d\Omega = |\sin\theta d\theta d\phi| \quad (6.9)$$

であることがわかる（面積と立体角は、正であることから、絶対値になっている）。したがって、

$$D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin\theta} \left(\frac{db}{d\theta} \right) \right| \quad (6.10)$$

である。

例題 6.2 例題 6.1 の剛体球での散乱の場合、

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

となるので、

$$D(\theta) = \frac{Rb \sin(\theta/2)}{2 \sin\theta} = \frac{R^2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)}{2 \sin\theta} = \frac{R^2}{4}$$

である。

最後に、全断面積は $d\sigma$ をすべての立体角で積分したものである。

$$\sigma = \int d\sigma = \int D(\theta) d\Omega \quad (6.11)$$

例題 6.3 剛体球散乱では

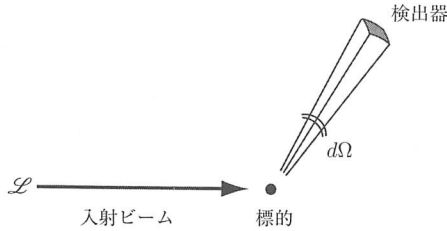
$$\sigma = \int \frac{R^2}{4} d\Omega = \pi R^2$$

である。つまり、当然であるが、それは入射ビームに対する球の全断面積になっている。この領域内のいかなる粒子も散乱するし、その外側にいるいかなる粒子も影響を受けずに通り過ぎる。

例題 6.3 が示すように、ここで展開してきた定式化は、「硬い」標的の場合の「断面積」という用語に対するわれわれの単純な直感と一致している。この定式化のよい点は、明確な端のない「軟らかい」標的にも適用できることだ。

例題 6.4 ラザフォード散乱 電荷 q_1 をもつ粒子が、電荷 q_2 をもつ動かない粒子と散乱する。古典力学では、インパクトパラメーターと散乱角を関係づける公式は

$$b = \frac{q_1 q_2}{2E} \cot(\theta/2)$$

図 6.4 ルミノシティ \mathcal{L} のビームの散乱

である [1]. ただしここで E は, 入射電荷の初期状態での運動エネルギーである. よって, 微分断面積は

$$D(\theta) = \left[\frac{q_1 q_2}{4E \sin^2(\theta/2)} \right]^2$$

となる. このとき, じつは全断面積は無限大になってしまう*2.

$$\sigma = 2\pi \left(\frac{q_1 q_2}{4E} \right)^2 \int_0^\pi \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \sin \theta \, d\theta = \infty$$

均一なルミノシティ \mathcal{L} (\mathcal{L} は, 単位面積, 単位時間あたりに通過する粒子数) をもつ入射粒子のビームを考えてみよう. すると, $dN = \mathcal{L} d\sigma$ は, 面積 $d\sigma$ を単位時間あたりに通過する粒子数になり, よって, 立体角 $d\Omega$ の中に単位時間あたりに散乱される粒子の数もまた

$$dN = \mathcal{L} d\sigma = \mathcal{L} D(\theta) d\Omega \quad (6.12)$$

となる. 衝突地点に対して立体角 $d\Omega$ を覆うように検出器を準備したとしよう (図 6.4). 単位時間あたりにこの検出器に到達する粒子数 (dN) を数える. それは, 実験家が事象頻度とよぶものだ. 式 (6.12) によると, 事象頻度は, ルミノシティと微分断面積と立体角の積に等しい. 加速器を操作している誰かがルミノシティをコントロールして, 検出器を準備した誰かが立体角を決める. これらのパラメーターがわかれば, 検出器に入ってくる粒子数をたんに数えるだけで微分断面積を測定できる.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN}{\mathcal{L} d\Omega} \quad (6.13)$$

*2 これは, クーロンポテンシャルは無限遠まで届くという事実と関係している (1.3 節の脚注 *2 を参照).

もし検出器が完全に標的を覆っていれば、 $N = \sigma \mathcal{L}$ になる。実験家がよくいうように「事象頻度は断面積掛けるルミノシティ」なのだ*3。

6.2 黄金律

6.1節で、計算する必要がある物理量、すなわち、崩壊頻度と断面積を導入した。どちらの場合も、レシピに二つ材料がある。すなわち、(i) その過程に対する振幅 (\mathcal{M}) と、(ii) 利用可能な位相空間である*4。振幅は、すべての動的な情報を含んでいる。問題となっている過程の相互作用に対する適切なファインマン則を使い、ファインマン図を評価することで振幅を計算する。位相空間因子は、純粋に運動学である。これは、反応に寄与する粒子の質量、エネルギー、そして運動量に依存し、より多くの「動ける余地」のある終状態に行く過程が起りやすいという事実を反映している。たとえば、重い粒子が軽い二次粒子へ崩壊する場合、大きな位相空間因子を含んでいる。というのは、利用可能なエネルギーを分配するための多くの道筋があるからだ。対照的に、中性子の崩壊 ($n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$) では使うことのできる余分な質量がほとんどないために強く制限され、位相空間因子は非常に小さい*5。

相互作用の頻度を計算する際の約束事は、エンリコ・フェルミによって黄金律としてまとめられた。フェルミの黄金律の本質は、遷移頻度は、位相空間と振幅の（絶対値の）2乗との積で与えられるということである。時間依存性のある摂動論 [2] の文脈で、非相対論版には出合ったことがあるかもしれない。われわれがいま必要なのは、場の量子論から導き出される相対論版である [3]。それをここで導出することはせず、黄金律について述べ、それを利用したい。実際のところ、まずは崩壊に適切な形式で、そしてもう一度散乱に適した形式で、2回黄金律を取り上げる。

6.2.1 崩壊の黄金律

（静止している）*6粒子 1 がいくつかの別の粒子 2, 3, 4, ..., n に崩壊することを考

*3 この議論では、標的は動かず、入射粒子は散乱のポテンシャルに飛び込むとたんに反射されると仮定してきた。ここでの目的は、なるべく単純な文脈で本質的な考え方を導入することだった。しかし、6.2節での定式化は非常に一般的だ。それは、標的の反跳を含み、散乱過程に寄与する粒子種の変化も許容する（たとえば、反応 $\pi^- + p^+ \rightarrow K^+ + \Sigma^-$ では、 $d\Omega$ は K^+ が散乱して入る立体角を表すことになる）。

*4 振幅は行列要素、位相空間は終状態密度とよばれることもある。

*5 より極端な例として、（運動学的に禁止される） $\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \bar{K}^0$ を考えてみよう。終状態の粒子が Ω より重いので、利用可能な位相空間は皆無で、崩壊頻度はゼロとなる。

*6 粒子 1 が静止していると仮定することで一般性を失うことはない。これはたんに見ている座標系を選択するにすぎない。

えよう。

$$1 \rightarrow 2 + 3 + 4 + \cdots + n \quad (6.14)$$

その崩壊頻度は、

$$\Gamma = \frac{S}{2\hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \cdots - p_n) \times \prod_{j=2}^n 2\pi \delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4} \quad (6.15)$$

という式によって与えられる。ただし、ここで、 m_i は i 番目の粒子の質量、 p_i は 4 元運動量である。 S は終状態に同種粒子が存在する場合の数えすぎを補正する統計因子で、 s 個の粒子群それぞれに対して、 $(1/s!)$ という因子をもつ。たとえば、 $a \rightarrow b + b + c + c + c$ ならば、 $S = (1/2!)(1/3!) = 1/12$ である。終状態に同種粒子がなければ（最も一般的な状況） $S = 1$ になる。

覚えておくべきこと：ある過程の力学は振幅 $\mathcal{M}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ に含まれており、さまざまな運動量の関数になっている。適切なファインマン図を評価することで（後で）それを計算する。残りは位相空間だ。すべての外に出て行く粒子の 4 元運動量で積分することで得られ、以下の三つの運動学的制約がある。

1. 外に出て行く粒子はそれぞれ質量殻上にある。つまり、 $p_j^2 = m_j^2 c^2$ ($E_j^2 - \mathbf{p}_j^2 = m_j^2 c^4$) である。これは、デルタ関数 $\delta(p_j^2 - m_j^2 c^2)$ により保証される。デルタ関数は引数が消えなければゼロになる*7。
2. 外に出て行く粒子それぞれのエネルギーは正である ($p_j^0 = E_j/c > 0$)。よって、それが θ 関数となる*8。
3. エネルギーと運動量は保存しなければならない、つまり、 $p_1 = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$ である。これは、係数 $\delta^4(p_1 - p_2 - p_3 \cdots - p_n)$ で保証される。

黄金律 (式 (6.15)) はとっつきにくいかもしれないが、実際、述べていることは単純で、上の三つの当たり前の運動学的制約と矛盾がなければ、すべての結果が同じ確率で起こり得る。念のため補足すると、(\mathcal{M} に含まれている) 力学によってある特定の組み合わせが他に比べて選ばれやすいかもしれないが、それらを含めてすべての可能性を足し上げている。いくつかの 2π という係数はどこから来るのであろうか。次

*7 もしディラックのデルタ関数に不慣れな場合、先に進む前に付録 A を注意深く勉強するように。

*8 $\theta(x)$ は (ヘヴィサイドの) 階段関数で、 $x < 0$ なら 0、 $x > 0$ なら 1 である (付録 A を参照)。

の法則を綿密につなぎ合わせれば、これらを追いかけることは簡単だ*9。

$$\text{すべての } \delta \text{ で } (2\pi) \text{ を得て, すべての } d \text{ で } (1/2\pi) \text{ を得る.} \quad (6.16)$$

4次元の「体積」要素は、空間部分と時間部分に分けられる

$$d^4p = dp^0 d^3\mathbf{p} \quad (6.17)$$

(簡略化のため、これから下付きの添字 j を落とす。この議論を、外に出て行く運動量それぞれに適用する)。 p^0 積分*10はデルタ関数

$$\delta(p^2 - m^2c^2) = \delta[(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2c^2] \quad (6.18)$$

を利用することですぐに実行可能だ。さて

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad (a > 0) \quad (6.19)$$

なので (問題 A.7 を参照),

$$\theta(p^0)\delta[(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2c^2] = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}}\delta(p^0 - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}) \quad (6.20)$$

である (θ 関数が $p^0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}$ でのスパイクを消し, $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}$ で 1 となる)。よって, 式 (6.15) は

$$\Gamma = \frac{S}{2\hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n) \times \prod_{j=2}^n \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m_j^2c^2}} \frac{d^3\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3} \quad (6.21)$$

となる。ただしここで (\mathcal{M} と残りのデルタ関数の中で)

$$p_j^0 \rightarrow \sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m_j^2c^2} \quad (6.22)$$

とつねに置き換える。これは物理的な意味を不明瞭にしまうが⁸, 黄金律のより便

*9 これらの因子のいくつかは結局打ち消し合ってしまうのだから, もっと効率的な手立てがないのかと思うかもしれない。だが, そうではない。ファインマンだったら, 「そういうつまらないことを気にかけない」大学院生に対して) 憤慨して叫ぶだろう。「 2π を正しく数えることができないなら, 君は何もわかっていない!」と。

*10 式 (6.15) の積分記号は, 実際には $4(n-1)$ 階の積分を意味している。 $n-1$ 個の外に出て行く運動量のそれぞれの成分の積分なのだ。

利な表現である*11.

6.2.1.1 2粒子への崩壊

とくに、終状態に2個の粒子しかない場合は

$$\Gamma = \frac{S}{32\pi^2 \hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta^4(p_1 - p_2 - p_3)}{\sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2 c^2}} d^3 \mathbf{p}_2 d^3 \mathbf{p}_3 \quad (6.23)$$

となる。4次元のデルタ関数は時間成分と空間成分の積である。

$$\delta^4(p_1 - p_2 - p_3) = \delta(p_1^0 - p_2^0 - p_3^0) \delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \quad (6.24)$$

しかし、粒子1は静止しているので $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$ で、 $p_1^0 = m_1 c$ である。一方、 p_2^0 と p_3^0 は置き換えられる(式(6.22))ので*12

$$\begin{aligned} \Gamma = \frac{S}{32\pi^2 \hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(m_1 c - \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_2^2 c^2} - \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2 c^2})}{\sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2 c^2}} \\ \times \delta^3(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) d^3 \mathbf{p}_2 d^3 \mathbf{p}_3 \end{aligned} \quad (6.25)$$

となる。 \mathbf{p}_3 に関する積分はいまや取るに足りない。最後のデルタ関数から見れば、たんに

$$\mathbf{p}_3 \rightarrow -\mathbf{p}_2 \quad (6.26)$$

という置き換えをするだけで、

$$\Gamma = \frac{S}{32\pi^2 \hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(m_1 c - \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_2^2 c^2} - \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_3^2 c^2})}{\sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_3^2 c^2}} d^3 \mathbf{p}_2 \quad (6.27)$$

を得る。

残りの積分に関しては、 $\mathbf{p}_2 \rightarrow (r, \theta, \phi)$ 、 $d^3 \mathbf{p}_2 \rightarrow r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ という球座標系(これはもちろん運動量空間で、 $r = |\mathbf{p}_2|$ である)を採用する。

$$\Gamma = \frac{S}{32\pi^2 \hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(m_1 c - \sqrt{r^2 + m_2^2 c^2} - \sqrt{r^2 + m_3^2 c^2})}{\sqrt{r^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{r^2 + m_3^2 c^2}} \times r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (6.28)$$

*11 $\sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m_j^2 c^2}$ が E_j/c であることに気づくかもしれないし、多くの本ではそのように表記されている。だがそれは危険な表記だ。 \mathbf{p}_j は積分変数なので、 E_j は積分の外に出せる何らかの定数ではない。もしそうしたいなら省略化したものを使えばよいが、 E_j は \mathbf{p}_j の関数で独立な変数ではないことを忘れてはならない。

*12 $\delta(-x) = \delta(x)$ なので最後のデルタ関数のマイナスの符号を落としてもよい。

こうして、 \mathcal{M} はもともと 4 元ベクトル p_1, p_2, p_3 の関数であったが、 $p_1 = (m_1 c, \mathbf{0})$ が定数で (少なくとも積分に関する限りは)、すでに行われた積分で $p_2^0 \rightarrow \sqrt{p_2^2 + m_2^2 c^2}$, $p_3^0 \rightarrow \sqrt{p_3^2 + m_3^2 c^2}$, $\mathbf{p}_3 \rightarrow -\mathbf{p}_2$ という置き換えをしたので、いまや \mathcal{M} は \mathbf{p}_2 にだけ依存するようになった。しかし、これから見ていくように、振幅はスカラーでなければならず、ベクトルからつくることのできる唯一のスカラー量は自分自身との内積^{*13}、すなわち $\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_2 = r^2$ である。すると、この段階では、 \mathcal{M} は r だけ (θ にも ϕ にも依存していない) の関数である。そうだとすると、角度に関する積分ができて

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2, \quad \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \quad (6.29)$$

であるから、残っているのは r に関する積分だけである。

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi\hbar m_1} \int_0^\infty |\mathcal{M}(r)|^2 \frac{\delta(m_1 c - \sqrt{r^2 + m_2^2 c^2} - \sqrt{r^2 + m_3^2 c^2})}{\sqrt{r^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{r^2 + m_3^2 c^2}} r^2 dr \quad (6.30)$$

デルタ関数の引数を簡単にするために、

$$u \equiv \sqrt{r^2 + m_2^2 c^2} + \sqrt{r^2 + m_3^2 c^2} \quad (6.31)$$

とおくと、

$$\frac{du}{dr} = \frac{ur}{\sqrt{r^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{r^2 + m_3^2 c^2}} \quad (6.32)$$

となる。よって、

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi\hbar m_1} \int_{(m_2+m_3)c}^\infty |\mathcal{M}(r)|^2 \delta(m_1 c - u) \frac{r}{u} du \quad (6.33)$$

である。最後の積分で u は $m_1 c$ になり^{*14}、よって r は

$$r_0 = \frac{c}{2m_1} \sqrt{m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2} \quad (6.34)$$

になる (問題 6.5)。 r は変数 $|\mathbf{p}_2|$ を簡略化したもので、 r_0 はエネルギー保存を満たす $|\mathbf{p}_2|$ の特別な値であり、式 (6.25) は 3 章で得た結果 (問題 3.19) をたんに再現してい

^{*13} もし粒子がスピンをもっていれば、 \mathcal{M} は $(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{S}_j)$ と $(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j)$ に依存してもよい。しかし、実験でスピンの方向を測定することはめったにないので、ほとんどの場合、スピンについて平均した振幅を扱うことになる。その場合と、それからもちろんスピン 0 の場合は、現れる唯一のベクトルは \mathbf{p}_2 で、唯一のスカラー量が $(\mathbf{p}_2)^2$ である。

^{*14} これは $m_1 > (m_2 + m_3)$ を仮定している。そうでないと、デルタ関数のスパイクが積分領域の外に出て $\Gamma = 0$ になる。これは、粒子はより重い二次粒子に崩壊できないという事実を反映している。

るだけだということを忘れてはならない。さらにすっきりさせた表記では

$$\Gamma = \frac{S|\mathbf{p}|}{8\pi\hbar m_1^2 c} |\mathcal{M}|^2 \quad (6.35)$$

となる。ここで、 $|\mathbf{p}|$ は、式 (6.34) に出てくる三つの質量を単位とした、外に出ていく粒子どちらかの運動量の大きさであり、 \mathcal{M} は保存則によって決められた運動量を使って計算される。さまざまな置換 (式 (6.22), (6.26), (6.34)) は系統的にこれらの保存則を強制しているが黄金律に組み込まれているので驚きではない。

二体崩壊の公式 (式 (6.35)) は驚くほど単純だ。 \mathcal{M} の関数型を知ることなしにすべての積分を実行できた。数学的には、すべての変数をカバーするだけのデルタ関数があったにすぎない。物理的には、二体崩壊は運動学的に決まってしまう。二つの粒子はそれぞれ反対向きの 3 元運動量をもって飛び出す。その軸の方向は決まっていないが、初期状態が対称なので気にする必要はない。これから式 (6.35) を高い頻度で使っていく。不運にも、終状態に 3 個以上の粒子がある場合は、 \mathcal{M} の関数型がわからないと積分できない。そのような場合 (これから出会うことはほとんどないが) は、黄金律に戻って初めからやり直さなければならない。

6.2.2 散乱の黄金律

粒子 1 と 2 が衝突して、3, 4, ..., n を生成することを考えよう。

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n \quad (6.36)$$

散乱断面積は、以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{S\hbar^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 \dots - p_n) \\ & \times \prod_{j=3}^n 2\pi \delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4} \end{aligned} \quad (6.37)$$

ただしここで p_i は、粒子 i (質量 m_i) の 4 元運動量で、統計因子 S は以前と同じである (式 (6.15))。位相空間は本質的には以前と同じで、外に出て行くすべての粒子の運動量で積分し、三つの運動学的制約 (外に出ていくすべての粒子は質量殻上にあり、また出ていく粒子すべてのエネルギーは正で、エネルギーと運動量は保存する) は、デルタ関数と θ 関数で保証される。ここでもまた、 p_j^0 積分を行うことで簡略化でき、

$$\sigma = \frac{S\hbar^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 \cdots - p_n) \times \prod_{j=3}^n \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m_j^2 c^2}} \frac{d^3 \mathbf{p}_j}{(2\pi)^3} \quad (6.38)$$

となる。ただし、 \mathcal{M} やデルタ関数の中にあるときはいつでも

$$p_j^0 = \sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m_j^2 c^2} \quad (6.39)$$

である。

6.2.2.1 重心系での二体散乱

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad (6.40)$$

という過程を重心系、すなわち $p_2 = -p_1$ (図 6.5) で考えてみよう。ここで、

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_2 m_2 c^2)^2} = (E_1 + E_2) |\mathbf{p}_1| / c \quad (6.41)$$

である (問題 6.7)。この場合、式 (6.38) は

$$\sigma = \frac{S\hbar^2 c}{64\pi^2 (E_1 + E_2) |\mathbf{p}_1|} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_4^2 c^2}} d^3 \mathbf{p}_3 d^3 \mathbf{p}_4 \quad (6.42)$$

になる。以前と同様に、デルタ関数を書き直すことから始める^{*15}。

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \delta\left(\frac{E_1 + E_2}{c} - p_3^0 - p_4^0\right) \delta^3(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \quad (6.43)$$

次に、式 (6.39) を代入し \mathbf{p}_4 積分 (それにより \mathbf{p}_4 を $-\mathbf{p}_3$ にもっていく) を行う。



図 6.5 重心系での二体散乱

^{*15} \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 は (われわれが選んだ参照系 $p_2 = -p_1$ では) 固定されたベクトルであるが、この段階では \mathbf{p}_3 と \mathbf{p}_4 は積分変数であることに注意しよう。 \mathbf{p}_4 の積分の後で初めてそれらは $\mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_3$ に制限され、 $|\mathbf{p}_3|$ 積分の後で初めて散乱角 θ によってその値が決まる。

$$\sigma = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2 \frac{Sc}{(E_1 + E_2)|\mathbf{p}_1|} \int |\mathcal{M}|^2 \times \frac{\delta\left[(E_1 + E_2)/c - \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2 c^2} - \sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_4^2 c^2}\right]}{\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_4^2 c^2}} d^3 \mathbf{p}_3 \quad (6.44)$$

しかし今度は $|\mathcal{M}|^2$ が \mathbf{p}_3 の方向と大きさに依存しているので*16, 角度に関する積分を行えない。だがそれは問題ない。われわれは本当のところ σ を出したかったのではなく, $d\sigma/d\Omega$ を求めたかったのだ。球座標系を用いると, 以前のように

$$d^3 \mathbf{p}_3 = r^2 dr d\Omega \quad (6.45)$$

であり (r は $|\mathbf{p}_3|$ の省略形で, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ である),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2 \frac{Sc}{(E_1 + E_2)|\mathbf{p}_1|} \int_0^\infty |\mathcal{M}|^2 \times \frac{\delta\left[(E_1 + E_2)/c - \sqrt{r^2 + m_3^2 c^2} - \sqrt{r^2 + m_4^2 c^2}\right]}{\sqrt{r^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{r^2 + m_4^2 c^2}} r^2 dr \quad (6.46)$$

を得る。 r に関する積分は, 式 (6.30) において $m_2 \rightarrow m_4$, $m_1 \rightarrow (E_1 + E_2)/c^2$ と置き換えるのと同じだ。前の結果 (式 (6.35)) を引用すると, その結果は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} \quad (6.47)$$

となる。ただしここで, $|\mathbf{p}_f|$ は外に出ていく運動量のどちらかで, $|\mathbf{p}_i|$ は入ってくる運動量のどちらかだ。

崩壊のときと同様, \mathcal{M} の関数形を明示的に知らなくても計算を最後までやれるという意味において, 二体の終状態はやけに単純だ。後の章で式 (6.47) を頻繁に使うことになる。

ところで, 寿命はあきらかに時間 (秒) の次元をもつので, 崩壊頻度 ($\Gamma = 1/\tau$) は秒の逆数で測定される。断面積は面積, すなわち cm^2 の次元をもつ。あるいはより便利な単位は「barn」だ。

*16 一般的には, $|\mathcal{M}|^2$ はすべての4元ベクトルに依存している。しかしこの場合は, $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ かつ $\mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_3$ なので, \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_3 だけの関数になっている (ここでもまたスピンはないと仮定している)。これらのベクトルから, $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1 = |\mathbf{p}_1|^2$, $\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_3 = |\mathbf{p}_3|^2$, $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = |\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta$ という三つのスカラー量をつくれる。しかし, \mathbf{p}_1 は固定されているので, $|\mathcal{M}|^2$ が依存することのできる積分変数は $|\mathbf{p}_3|$ と θ だけになる。

$$1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (6.48)$$

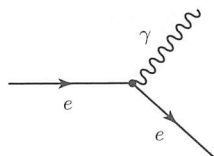
微分断面積 $d\sigma/d\Omega$ はステラジアンあたりのバーン, あるいはたんにバーンで与えられる (ステラジアンはラジアンと同様無次元だ). 振幅 \mathcal{M} は, 反応に寄与する粒子数に依存する単位をもつ. もし n 個の外線 (入ってくるのと出ていくものの和) があると, \mathcal{M} の次元は運動量の単位の $(4-n)$ 乗になる.

$$\mathcal{M} \text{ の次元} = (mc)^{4-n} \quad (6.49)$$

たとえば, 三体の過程 ($A \rightarrow B + C$) では \mathcal{M} の単位は運動量だ. 四体の過程 ($A \rightarrow B + C + D$ あるいは $A + B \rightarrow C + D$) では \mathcal{M} は無次元になる. 二つの黄金律によって Γ と σ の正しい単位が得られることは読者自身で確認できるだろう.

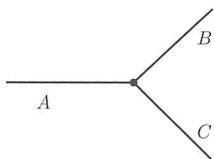
6.3 トイモデルに対するファインマン則

6.2節では, 問題となっている過程に対する振幅を \mathcal{M} として, 崩壊頻度や散乱断面積の計算の仕方を学んだ. 今度は, その問題に対応するダイアグラムを評価するための「ファインマン則」を使って \mathcal{M} そのものを決定する方法を示す. 電子と光子が基本的なバーテックスによって相互作用する量子電気力学のような「現実世界」の系に飛び込んでもよい. それが, ファインマンによる元来の方法であり, 最も重要, かつ最もよく理解された応用である. だが不運にも, それは, ファインマンの方法そのものとは何の関係もないさまざまな複雑な問題 (電子はスピン $1/2$ で, 光子は質量がなくスピン 1 である) をはらんでいる. 7章で, スピンをもつ粒子の取り扱い方を説明するが, とりあえず, 論点をぼやかしたくないので, トイモデルを導入する. その理論は実世界を再現しようとするのではなく, 余分な荷物を最小限にし, 計算方法の説明に役立つ [4].

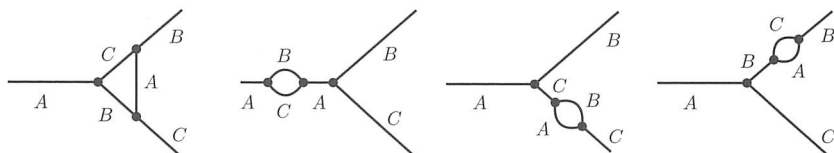


3種類の粒子だけが存在する世界を想像してみよう. それらを A, B, C とよび, 質量が m_A, m_B, m_C だとする. それらはすべてスピン 0 で, 反粒子と同一である (よって, ダイアグラムに矢印は必要ない). 基本的なバーテックスが一つ存在し, そ

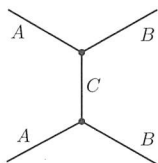
のバーテックスで3個の粒子が相互作用する。



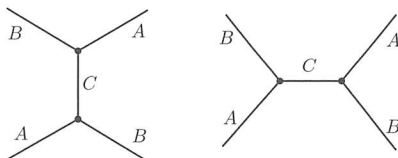
Aがその三つの中で一番重くて、実際のところ、 B と C の合計よりも重いと仮定する。よって、それは $B + C$ に崩壊できる。この崩壊を記述する最低次のダイアグラムは、その基本的なバーテックス自身だ。これに加えて、(小さな)3次のオーダーの補正が存在する。



そして、さらに小さな効果をもたらす、より高次の補正もある。われわれの最初の目標は、最低次において、 A の寿命を計算することである。その後、 $A + A \rightarrow B + B$,



あるいは $A + B \rightarrow A + B$



などのさまざまな散乱過程を見ていく。

われわれの課題は、与えられたファインマン図に対応する振幅 \mathcal{M} を見つけることだ。その奥義は以下だ [5].

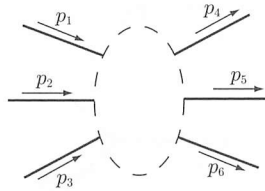


図 6.6 外線に名前が付けられた一般的なファインマン図
(内線は記していない)

1. 表記法：入ってくるものと出ていく 4 元ベクトルに p_1, p_2, \dots, p_n のように名前を付ける (図 6.6). 外に出ない運動量は q_1, q_2, \dots のように名前を付ける。「正の」方向 (外線については時間の進む向きで, 内線については任意) がわかるように, それぞれの線に矢印を付ける.
2. バーテックス因子：それぞれのバーテックスで因子

$$-ig$$

を付ける. g は結合定数とよばれ, A, B, C の間の相互作用の強さを指定する. 今回のトイモデルでは, g は運動量の次元をもつ. 後に出合う「現実世界」の理論では, 結合定数はつねに無次元だ.

3. 伝播関数：それぞれの内線に因子

$$\frac{i}{q_j^2 - m_j^2 c^2}$$

を付ける. ここで, q_j はその線の 4 元運動量で, m_j はその線が表している粒子の質量である (仮想粒子は質量殻上がないので, $q_j^2 \neq m_j^2 c^2$ であることに注意せよ).

4. エネルギーと運動量の保存：それぞれのバーテックスにデルタ関数を

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3)$$

という形式で書く. ここで, k はバーテックスに入ってくる 4 元運動量である (矢印が外向きなら k はその線の運動量にマイナス符号を付けたものとなる). 入ってくる運動量の和と出ていく運動量の和が等しくないとデルタ関数がゼロになるので, この因子によってエネルギーと運動量の保存が保証される.

5. 内線の運動量についての積分：内線それぞれに対して, 因子^{*17}

^{*17} すべての δ が因子 (2π) を拾い, すべての d が因子 $1/(2\pi)$ を拾うことに (もう一度) 注意しよう.

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_j$$

を書いて、内線すべてについて積分する。

6. デルタ関数の打ち消し合い：全体のエネルギーと運動量の保存を反映して、結果はデルタ関数

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \cdots - p_n)$$

を含む。この因子を消して*18、 i を掛ける。その結果が \mathcal{M} だ。

6.3.1 A の寿命

$A \rightarrow B + C$ への最低次の寄与を表現する最も単純なダイアグラムは、いかなる内線も含まない (図 6.7)。バーテックスが一つあり、そこに因子 $-ig$ (ルール 2) とデルタ関数 (ルール 4)

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3)$$

が掛かるが、それはすぐに捨て去られる (ルール 6)。 i を掛けて、

$$\mathcal{M} = g \tag{6.50}$$

を得る。これが (最低次に対する) 振幅である。 \mathcal{M} を式 (6.35)に代入することで崩壊頻度が得られる。

$$\Gamma = \frac{g^2 |\mathbf{p}|}{8\pi \hbar m_A^2 c} \tag{6.51}$$

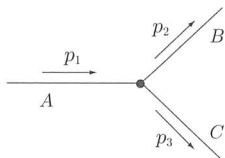


図 6.7 $A \rightarrow B + C$ に対する最低次の寄与

*18 もちろん、黄金律がこの因子を式 (6.15) と (6.37) に入れてしまう。読者はなぜ \mathcal{M} の中に残しておかないのかと思うかもしれない。問題は、 \mathcal{M} ではなく $|\mathcal{M}|^2$ が黄金律に入っていることで、デルタ関数の 2 乗を定義できない。そこで、次の段階でまた入れるにもかかわらず、その因子をここでいったん取り除かなければならない。

ただしここで $|\mathbf{p}|$ (外に出ていく運動量のいずれかの大きさ) は

$$|\mathbf{p}| = \frac{c}{2m_A} \sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2} \quad (6.52)$$

である。すると、 A の寿命は

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{8\pi \hbar m_A^2 c}{g^2 |\mathbf{p}|} \quad (6.53)$$

となる。 τ の単位が正しいことを自身で確認せよ。

6.3.2 $A + A \rightarrow B + B$ 散乱

$A + A \rightarrow B + B$ 過程に対する最低次の寄与は図 6.8 で示される。この場合、二つのバーテックス (よって $-ig$ という因子が二つ) と、

$$\frac{i}{q^2 - m_C^2 c^2}$$

という伝播関数をもつ内線と、

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - q), \quad (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q - p_4)$$

という二つのデルタ関数と、一つの積分

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q$$

がある。すると、ルール 1 から 5 により

$$-i(2\pi)^4 g^2 \int \frac{1}{q^2 - m_C^2 c^2} \delta^4(p_1 - p_3 - q) \delta^4(p_2 + q - p_4) d^4 q$$

を得る。積分をすると 2 番目のデルタ関数が q を $p_4 - p_2$ へもっていくことから

$$-ig^2 \frac{1}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

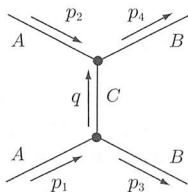


図 6.8 $A + A \rightarrow B + B$ に対する最低次の寄与

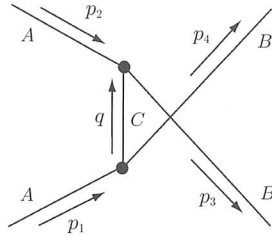


図 6.9 $A + A \rightarrow B + B$ に最低次の寄与を与える 2 番目のダイアグラム

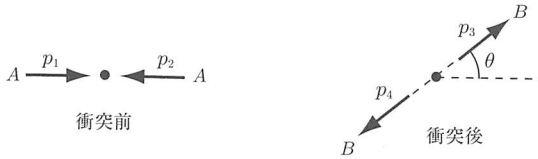


図 6.10 重心系での $A + A \rightarrow B + B$

になる。前に述べたように、デルタ関数が一つ残り、全体のエネルギーと運動量保存を反映している。それを消して i を掛けることで (ルール 6),

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} \tag{6.54}$$

が残る。

しかし、これで話が終わるわけではない。というのも、 B の線を「ねじる」ことで得られる g^2 のオーダーのダイアグラムが他にもあるからだ (図 6.9)^{*19}。図 6.8 との違いは p_3 と p_4 の入れ替えだけなので、最初からすべての計算をやり直す必要はない。式 (6.54) を参考にして、 $A + A \rightarrow B + B$ という過程に対する (オーダー g^2 の) すべての振幅はすぐに

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} + \frac{g^2}{(p_3 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} \tag{6.55}$$

と書ける。ちなみに、 \mathcal{M} がローレンツ不変 (スカラー) になっていることに注意してほしい。ファインマン則にそれが組み込まれているので、いつもそうなる。

この過程の重心系における微分断面積に興味があるとしよう (図 6.10)。話を簡単にするために、たとえば、 $m_A = m_B = m$ で、 $m_C = 0$ だとしよう。すると、

^{*19} A をねじることによってさらにもう一つの新しいダイアグラムを得ることはない。ここでの唯一の選択は、 p_3 を p_1 につなげるか、 p_2 につなげるかだ。

$$(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2 = p_4^2 + p_2^2 - 2p_2 \cdot p_4 = -2\mathbf{p}^2(1 - \cos\theta) \quad (6.56)$$

$$(p_3 - p_2)^2 - m_C^2 c^2 = p_3^2 + p_2^2 - 2p_3 \cdot p_2 = -2\mathbf{p}^2(1 + \cos\theta) \quad (6.57)$$

(ここで \mathbf{p} は粒子 1 の入射運動量である) となり, それゆえ

$$\mathcal{M} = -\frac{g^2}{\mathbf{p}^2 \sin^2 \theta} \quad (6.58)$$

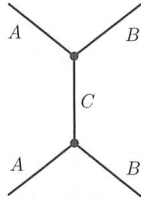
となる. さらに式 (6.47) に従うと,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{16\pi E \mathbf{p}^2 \sin^2 \theta} \right)^2 \quad (6.59)$$

となる (終状態に二つの同一種粒子が存在するので $S = 1/2$ になる). ラザフォード散乱のときのように (例題 6.4), 全断面積は無限大になる.

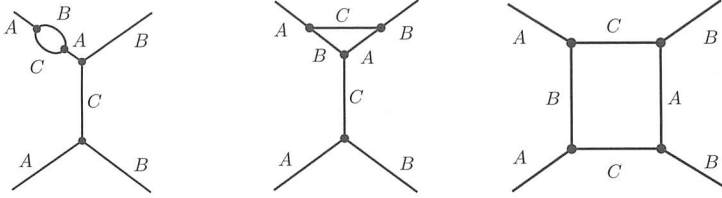
6.3.3 高次のダイアグラム

これまででは, 最低次 (「ツリーレベル」) のファインマン図だけを見てきた. たとえば, $A + A \rightarrow B + B$ の場合, 以下のダイアグラムだけを考えた.

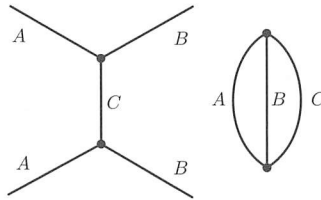


このダイアグラムにはバーテックスが二つあるので, \mathcal{M} は g^2 に比例する. しかし, 四つのバーテックスをもつダイアグラムは 8 個ある (そして, 外線の B を「ねじった」ものがさらに 8 個ある).

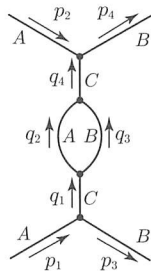
- ・ 5 個の「自己エネルギー」ダイアグラム. これらは, どれか一つの線にループが発生している.
- ・ 2 個の「バーテックス補正」. これらは, バーテックスが三角形になっている.
- ・ そして 1 個の「箱型」ダイアグラム.



(下の左図のようにつながっていないものは数えない。)



これらすべての「1 ループ」ダイアグラムを計算することは決してしないが（あるいは2ループダイアグラムに関しては考えることさえしない）、そのうちの一つ、仮定のC線に一つの泡をもった図については詳しく見てみたい。



ファインマン則の1から5を適用すると、

$$g^2 \int \frac{\delta^4(p_1 - q_1 - p_3) \delta^4(q_1 - q_2 - q_3) \delta^4(q_2 + q_3 - q_4) \delta^4(q_4 + p_2 - p_4)}{(q_1^2 - m_C^2 c^2)(q_2^2 - m_A^2 c^2)(q_3^2 - m_B^2 c^2)(q_4^2 - m_C^2 c^2)} \times d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_3 d^4 q_4 \quad (6.60)$$

を得る。 q_1 で積分し、最初のデルタ関数を使い q_1 を $(p_1 - p_3)$ に置き換える。 q_4 で積分し、最後のデルタ関数を使い q_4 を $(p_4 - p_2)$ に置き換える。

$$\frac{g^4}{[(p_1 - p_3)^2 - m_C^2 c^2][(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2]} \times \int \frac{\delta^4(p_1 - p_3 - q_2 - q_3) \delta^4(q_2 + q_3 - p_4 + p_2)}{(q_2^2 - m_A^2 c^2)(q_3^2 - m_B^2 c^2)} d^4 q_2 d^4 q_3 \quad (6.61)$$

ここで、最初のデルタ関数により $q_2 \rightarrow p_1 - p_3 - q_3$ となり、2 番目のデルタ関数は

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

になる。ルール 6 によりこれを消すと、残るのは

$$\mathcal{M} = i \left(\frac{g}{2\pi} \right)^4 \frac{1}{[(p_1 - p_3)^2 - m_C^2 c^2]^2} \int \frac{1}{[(p_1 - p_3 - q)^2 - m_A^2 c^2](q^2 - m_B^2 c^2)} d^4 q \quad (6.62)$$

である（ここでは、 q_3 の下付き添字を省略した）。

もし元気があるなら、この積分の計算を試してみるのもよい。しかし、思わぬ障壁に出合ってしまうということをいまのうちにいっておく。4次元の体積要素は、ちょうど2次元の極座標系で面積要素を $r dr d\theta$ と書けたように、そして3次元の球座標系で空間要素を $r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$ と書けたように、 $d^4 q = q^3 dq d\Omega'$ （ただしここで $d\Omega'$ は角度部分を意味する）と書いてもよいだろう。 q の大きなところでは、積分は基本的にはたんに $1/q^4$ となるので、 q の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^4} q^3 dq = \ln |q|^\infty = \infty \quad (6.63)$$

というかたちになる。大きな q で積分が対数発散してしまうのだ。どういうかたちであれ、この災難が生じてしまうことから、ディラック、パウリ、クラマース、ワイスコップ、ベーテに始まり、朝永、シュウィンガー、ファインマンに至る多くの偉大な物理学者が力を合わせて、20年に近い年月をかけて量子電気力学を発展させなければならなかった。その結果、「じゅうたんの下に無限大を隠してしまう」系統だった方法を開発した。その第一歩は、(ローレンツ不変のような) 望ましい特徴を損なうことなく有限にするための適切なカットオフの手順に従い、積分を正則化することである。式(6.62)の場合だと、

$$\frac{-M^2 c^2}{(q^2 - M^2 c^2)} \quad (6.64)$$

という因子を積分の中に導入すればよい。カットオフ質量 M は非常に重いと仮定し、計算の最後に無限大にもっていく（その「ごまかした因子」である式(6.64)は $M \rightarrow \infty$

で1になる)*²⁰。そうすると積分を計算できて [6], M によらず有限な項と, (いまの場合) $M \rightarrow \infty$ のように膨れ上がる M の対数を含む項の二つに分解できる。

この時点で奇跡が起きる。すべての発散, すなわち M に依存する項は, 最終的な結果では質量や結合定数への足し算というかたちで現れる。これを真面目に受け取ると, 物理的な質量や結合定数は, 元々のファインマン則に現れている質量や結合定数とは違い, むしろ, 以下のような余分な項をもつ「くりこまれた」ものだということの意味している。

$$m_{\text{physical}} = m + \delta m, \quad g_{\text{physical}} = g + \delta g \quad (6.65)$$

δm や δg が ($M \rightarrow \infty$ という極限で) 無限大だという事実はうっとうしいが, 大惨事というわけではない。というのも, いずれにせよわれわれはそれらを決して測定しないからだ。実験室でこれまで見てきたものすべては, 物理的な値であり, それらは (あきらかに) 有限だ (測定できない「裸の」質量 m や結合定数 g は, あきらかに, δm や δg の発散を打ち消すための無限大を含んでいる)*²¹。実際問題として, ファインマン則では m と g の物理的な値を使って無限大を考慮に入れている。そして, 高次のダイアグラムからの発散の寄与は系統的に無視する。

一方で, ループ図からの有限な (M に依存しない) 寄与は依然存在する。それらによっても m や g は変更されるが (この場合は, 完全に計算できるものである), それらはループが挿入された線 (いまの例では $p_1 - p_3$) の4元運動量の関数になってい

*²⁰ 誰もがこの手順は恣意的だと思うだろう。だが, 式 (6.64) を入れることは, 場の量子論における, 高エネルギー (短距離) での振る舞いに対する無知をたんにさらけ出しているにすぎないともいえる。たぶん, この領域ではファインマンの伝播関数は完全には正しくはなく, M はやり方のわからない修正を勘案するための荒っぽい方法なのだ (たとえば, 「粒子」が下層構造をもつかどうか, というようなきわめて短距離での議論が, そのケースに当てはまる)。ディラックは, くりこみについて以下のように語った。

『それは, たんに一時しのぎの手法だ。われわれのアイデアに何らかの本質的な変化があるに違いない。おそらく, ちょうどボーアの軌道理論が量子力学に向かった道筋のように, 本質的な変化があるはずだ。有限であるべき数が無限大になるとしたら, 方程式に何か間違いがあることを認めるべきだし, その数字をたんに手当てするだけでよい理論を獲得できると期待すべきではない。』

P. Buckley and F. D. Peat: A Question of Physics (University of Toronto Press, 1979) 39 より。

*²¹ 多少気分をよくしたいなら, 本質的には同じことが古典電気力学にも起こっていたことを思い出そう。点電荷の静電エネルギーは無限大で, 粒子の質量に ($E = mc^2$ の関係を通して) 無限大の寄与を与える。これが意味するのは, おそらく, 古典電気力学には真の点電荷が存在しないということだ。たぶん, 場の量子論においても同じことを意味しているのだ。しかし, どちらの場合も, 理論的なつくり物としての点粒子をどう回避すればよいのかをわれわれは知らない。

る。これが意味するのは、実効質量と実効結合定数は寄与する粒子のエネルギーに実際依存するということである。それを「走る」質量、「走る」結合定数とよぶ。その依存性は、低エネルギーでは典型的には小さくて、通常は無視できる。しかし、(QEDにおける)ラムシフトや、(QCDにおける)漸近的自由というかたちで観測にかかる帰結を導く*22。

上の三つの段落で書いた手順はくりこみとよばれる [7]。高次のダイアグラムからの寄与で現れるすべての発散をこの方法で処理できる場合、理論がくりこみ可能だという。ABC理論と量子電気力学はくりこみ可能だ。1970年代初頭、トフーフトは、量子色力学やグラシヨウ、ワインバーグ、サラムによる電弱理論を含むすべてのゲージ理論がくりこみ可能であることを証明した。これは、きわめて重要な発見であった。なぜなら、最低次以上の計算では、くりこみ不可能な理論が出す答えはカットオフに依存したものになってしまい、本当のところ意味がないということになってしまうからだ。

参 考 書

- [1] たとえば, J. R. Taylor: *Classical Mechanics* (University Science Books, 2005) Sect.14.6; (a) H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko: *Classical Mechanics*, 3rd edn (Addison-Wesley, 2002) Sect. 3-10.
[2] たとえば, D. Park: *Introduction to the Quantum Theory*, 3rd edn (McGraw-Hill, 1992)

*22 QED と QCD における走る (running) 結合定数の物理的な解釈については、2章の2.3節で提案した。質量に関するくりこみのうまい説明は *American Scientist*, **73**, 66 (1985) の中で P. Nelson によってなされている。

『くりこみの理論によると、さまざまな相互作用の強さだけでなく、相互作用に与している粒子の質量も、長さのスケールによって変化する。この一見して矛盾しているかのような言い回しに対するイメージをつかむために、水中で大砲を撃つことを想像してみよう。摩擦を無視したとしても、その飛跡は地上とはずいぶん違ったものになるだろう。というのも、大砲の弾はかなりの量の水を引っ張ることになり、その結果見かけ上の、あるいは「実効的な」質量を変化させるからだ。実験的には頻度 ω で大砲の弾をやり動かして $F = ma$ から質量を計算することで、大砲の弾の実効質量を測定できる (この方法で、宇宙飛行士は宇宙空間で自身の「重さ」を測る)。実効質量を見つけることにより、水中での弾道学という難しい問題を単純な近似に置き換えることができる。つまり水が存在をすっかり無視して、ニュートンの方程式において弾丸の質量をたんに実効質量に置き換えればよいのだ。媒質との相互作用という複雑な詳細が、一つの実効パラメーターの決定へと簡略化されたのだ。このアプローチの鍵は、実効質量の計算が ω に依存していることだ。たとえば、 ω がゼロに近づけば水の影響がなくなる。つまり、媒質の存在により、スケールに依存する実効質量というものが見える。このことを、実効質量が媒質によって「くりこまれた」という。量子力学では、あらゆる粒子は理論に存在するすべての粒子の量子ゆらぎからなる「媒質」の中を動いている。ここでもまた媒質の存在を無視するが、パラメーターをスケールに依存する「実効的な」値に変えることで、量子ゆらぎを考慮に入れているのだ。』

- Sect. 7.9; (a) J. S. Townsend: A Modern Approach to Quantum Mechanics (University Science Books, 2000) Sect. 14.7; (b) D. J. Griffiths: Introduction to Quantum Mechanics, 2nd edn (Prentice Hall, 2005) Sect. 9.2.3.
- [3] 説得力があり入手可能な科学的記述を見つけるのはじつは難しい。R. P. Feynman: Theory of Fundamental Processes (Benjamin, 1961) の 15, 16 章から読み始めるのはよい。他に以下も参照。(a) J. M. Jauch and F. Rohrlich: Theory of Photons and Electrons, 2nd edn (Springer-Verlag, 1976) Sect. 8.6; (b) R. Hagedorn: Relativistic Kinematics (Benjamin, 1963) Chap. 7; (c) L. H. Ryder: Quantum Field Theory (Cambridge University Press, 1985) Sect. 6.10; (d) M. E. Peskin, and D. V. Schroeder: An Introduction to Quantum Field Theory (Perseus, 1995) Chap. 4; (e) S. Weinberg: The Quantum Theory of Fields, vol. I (Cambridge University Press, 1995) Sect. 3.4.
- [4] このモデルはマックス・ドレスデンに教えてもらった。より洗練された扱いについては, I. J. R. Aitchison, and A. J. G. Hey: Gauge Theories in Particle Physics, 3rd edn, vol. I (Institute of Physics, 2003) Section 6.3.
- [5] 読者はこれらのルールがどこから来たのか聞きたいかもしれない。ファインマンが最初に QED のルールを公表した 1949 年に、彼自身が完全に満足のいく答えを出せたかどうかは怪しい。R. P. Feynman: Physical Review, **76**, 749-769 (1949). 後を継いだフリーマン・ダイソンはファインマン則が場の量子論からどのように得られるかを示した。(a) F. J. Dyson: Physical Review **75**, 486, 1376 (1949); **82**, 428 (1951). これら魅力的な個人の出来事については, Dyson: Disturbing The Universe (Harper & Row, 1979) Chap 5, 6 を参照。ファインマン則がどのように導き出されたかという問題については 11 章で再び議論する。いまはたんに公理として扱う。
- [6] この方法について説明されているのは, J. J. Sakurai: Advanced Quantum Mechanics (Addison-Wesley, 1967) とくに Appendix E の有用な式を参照。
- [7] ABC 理論のくりこみについては, D. J. Griffiths and P. Kraus: American Journal of Physical, **60**, 1013 (1992).

問題

- 6.1 式 (6.3) を導出せよ。[ヒント: t と $t + dt$ の間で元のサンプルはどれだけ崩壊するか。そして, t と $t + dt$ の間で粒子が崩壊する (初期の) 確率 $p(t)dt$ はいくらか。平均寿命は $\int_0^{\infty} tp(t) dt$ である。]
- 6.2 原子核物理では伝統的に平均寿命 (τ) の代わりに「半減期」($t_{1/2}$) を使う。 $t_{1/2}$ は多数の原子核が崩壊により半数になる時間のことである。指数関数的崩壊 (式 (6.2)) について、半減期 $t_{1/2}$ の式を (τ の倍数として) 導出せよ。
- 6.3 (a) (静止している) ミュー粒子が 100 万個存在したとする。約 2.2×10^{-5} 秒後には何個になっているだろうか。
 (b) π^- が 1 秒以上生存する確率はいくつだろうか (10 のべき乗で答えよ)。
- 6.4 質量 m で (運動) エネルギー E の非相対論的粒子が、固定された斥力ポテンシャル $V(r) = k/r^2$ で散乱した場合を考える。 k はここでは定数である。
 (a) インパクトパラメーターを b の関数として、散乱角度 θ を求めよ。
 (b) 微分断面積 $d\sigma/d\Omega$ を θ の関数として求めよ。
 (c) 全断面積を求めよ。[参照: H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko: Classical Mechanics, 3rd edn (Addison-Wesley, 2002) Sect. 3-10, 式 (3-97); R. A. Becker: Introduction to Theoretical Mechanics (McGraw-Hill, 1954) Example 10-3.]
- 6.5 式 (6.31) で $u = m_1c$ から式 (6.34) を導出せよ。
- 6.6 黄金律を適用して $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ の崩壊を考える。もちろん π^0 は複合物で厳密には式 (6.35) を

適用することはできない。しかし、素粒子とみなしてどれほど近い値になるか確かめよ。残念ながら振幅 \mathcal{M} はわからないが、質量 \times 速度の次元をもつ必要があり (式 (6.49)), 使用可能な質量と速度が一つだけある。また、7章で述べるように光子の放出ごとに \mathcal{M} には係数 $\sqrt{\alpha}$ (微細構造定数) が掛かる。よって振幅は α に比例する。これをもとに、 π^0 の寿命を概算せよ。また、実験値と比較せよ。[あきらかに、 π^0 の崩壊は、この粗模型が示唆するよりはるかに複雑な過程である。C. Quigg: Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions (Benjamin, 1997) 252 を参照すること。ただし、 f_π が f_π^2 であるべき間違いには気をつけよ。

6.7 (a) 重心系の粒子 1 と粒子 2 の散乱から式 (6.41) を導出せよ。

(b) 実験室系 (粒子 2 を静止状態とする) の場合を求めよ。[答え: $m_2 |\mathbf{p}_1| c$]

6.8 実験室系で $a + b \rightarrow a + b$ の弾性散乱を考える (b は始状態で静止)。標的は非常に重く ($m_b c^2 \gg E_a$) 反跳を無視できるとする。微分断面積を求めよ。[ヒント: この極限では実験室系と重心系を同じものとみなせ。] [答え: $(d\sigma/d\Omega) = (\hbar/8\pi m_b c)^2 |\mathcal{M}|^2$]

6.9 実験室系で $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ の衝突を考える (2 は静止)、粒子 3 と 4 は質量がない。ここから微分断面積を求めよ。

$$\left[\text{答え: } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi} \right)^2 \frac{S |\mathcal{M}|^2 |\mathbf{p}_3|}{m_2 |\mathbf{p}_1| (E_1 + m_2 c^2 - |\mathbf{p}_1| c \cos \theta)} \right]$$

6.10 (a) 実験室系で弾性散乱について考える (ここで $m_3 = m_1$, $m_4 = m_2$)。粒子 2 は静止している。微分断面積を求めよ。

$$\left[\text{答え: } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi} \right)^2 \frac{p_3^2 S |\mathcal{M}|^2}{m_2 |\mathbf{p}_1| (E_1 + m_2 c^2) |\mathbf{p}_3| - |\mathbf{p}_1| E_3 \cos \theta} \right]$$

(b) もし入射粒子の質量がない ($m_1 = 0$) とすると、(a) の結果が以下のように簡単になることを確かめよ。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = S \left(\frac{\hbar E_3}{8\pi m_2 c E_1} \right)^2 |\mathcal{M}|^2$$

6.11 (a) $A \rightarrow B + B$ の反応は ABC 理論から可能だろうか。

(b) ダイアグラムに n_A 個の A の外線, n_B 個の B の外線, および n_C 個の C の外線があるとす。それが許される反応であるかどうかを判断するための簡単な基準をつくれ。

(c) A が十分重いと仮定した場合, $A \rightarrow B + C$ の次に起こりやすい崩壊モードは何だろうか。それぞれの崩壊についてファインマン図を描け。

6.12 (a) 最低次の $A + A \rightarrow A + A$ のダイアグラムを描け (6通り存在する)。

(b) この過程の振幅を, $m_B = m_C = 0$ と仮定して, 最低次で求めよ。一つ残る 4 元運動量 q に対する積分のかたちで答えること。

6.13 $A + A \rightarrow B + B$ についての $d\sigma/d\Omega$ を重心系で求めよ。ただし, $m_B = m_C = 0$ と仮定する。また, 全断面積 σ を求めよ。

6.14 $A + A \rightarrow B + B$ についての $d\sigma/d\Omega$ と σ を実験室系で求めよ (E を入射 A のエネルギー, \mathbf{p} を運動量として, $m_B = m_C = 0$ と仮定する)。得られた式の非相対論的および超相対論的限界を決定せよ。

6.15 (a) 最低次の $A + B \rightarrow A + B$ の振幅を求めよ (2通りのダイアグラムが存在する)。

(b) この過程の重心系での微分断面積を求めよ。このとき, $m_A = m_B = m$, $m_C = 0$ と仮定する。答えは, (A の) 入射エネルギー E , (粒子 A に対する) 散乱角 θ を用いて表せ。

(c) この過程の $d\sigma/d\Omega$ を実験室系で求める。 B は A より非常に重く, 固定されていると仮定せよ。 A はエネルギー E で入射する。[ヒント: 問題 6.8 を見よ。 $m_B \gg m_A$, m_C , E/c^2 と仮定する。]

(d) (c) の全断面積 σ を求めよ。