

## 束縛状態

この章の冒頭部分では、水素 ( $e^-p^+$ )、ポジトロニウム ( $e^-e^+$ )、チャーモニウム ( $c\bar{c}$ )、ボトモニウム ( $b\bar{b}$ ) などの二つの粒子からなる束縛状態の非相対論的な理論について見ていく。この内容は、後の章で使うわけではないので、さっとやってもよいし、後でやってもよいし、全部を飛ばしてもよい。多少の量子力学の素養は不可欠である。最後の二つの節 (5.5 と 5.6) は、馴染み深い中間子やバリオンなどの軽いクォークからなる系の相対論的取り扱いだが、確定的なことは少ない。波動関数におけるスピン、フレーバー、色の構造について集中的に議論し、質量と磁気モーメントを見積もるためのモデルを構築していく。

### 5.1 シュレーディンガー方程式

構成物が  $c$  よりもはるかに遅く移動しているときは、束縛状態の解析は最も単純となる。というのは、そういう場合は、非相対論的量子力学の道具立てを使うことができるからだ。そのようなケースは、水素や、重いクォーク ( $c$  と  $b$ ) からなるハドロンに当てはまる。より馴染み深い軽いクォークからなる ( $u$  や  $d$  や  $s$  からできている) 状態は、取り扱うのがはるかに難しい。なぜなら、それらは基本的に相対論的であり、場の量子論は (現在行われているようなやり方では) 束縛状態の記述に適していない。利用可能な多くの方法では、初期状態で粒子は自由粒子であり、何らかの短時間の相互作用の後にもた自由粒子となるということを仮定している。一方で、束縛状態では、粒子はある期間中ずっと相互作用をしている。それゆえ、「チャーモニウム」 ( $c\bar{c}$  という  $\psi$  中間子系) や、「ボトモニウム」 ( $b\bar{b}$  という  $\Upsilon$  系) には、非常にすぐれた理論があるが、それに比べて (たとえば)  $u\bar{u}$  や  $d\bar{d}$  の励起状態に関してはほとんど何の理論もない。

ある与えられた状態が相対論的かどうかをどのように判断できるだろうか。最も単純な選択方法は以下だ。もし束縛エネルギーが構成物の静止エネルギーに比べて小さ

いときは、その系は非相対論的だ\*1。たとえば、水素の束縛エネルギーは13.6 eVだが、電子の静止エネルギーは511 000 eVである。これはあきらかに非相対論的な系だ。一方、クォークとクォークとの間の束縛エネルギーは数百 MeVのオーダーで、それは  $u$ ,  $d$ , あるいは  $s$  の実効的な静止エネルギーと同じくらいだが、 $c$  や  $b$  や  $t$  よりもはるかに小さい(表 4.4)。なので、軽いクォークからなるハドロンは相対論的であるが、重いクォークの系は相対論的にはならない。

非相対論的量子力学の最初の一步はシュレーディンガー方程式だ [1]。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi \quad (5.1)$$

これは、波動関数  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  の時間発展を支配していて、与えられたポテンシャルエネルギー  $V(\mathbf{r}, t)$  のもとでの質量  $m$  の粒子を記述する。とくに、 $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r}$  が<sup>s</sup>、時刻  $t$  に、無限小の体積  $d^3\mathbf{r}$  中に粒子を見出す確率になっている。粒子はどこかにいなければならないので、 $|\Psi|^2$  を全空間で積分すると 1 になる。

$$\int |\Psi|^2 d^3\mathbf{r} = 1 \quad (5.2)$$

これを波動関数が「規格化された」という\*2。

もし  $V$  があらわに  $t$  に依存していない場合は、シュレーディンガー方程式は変数を分離することで解ける。

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar} \quad (5.3)$$

ここで、 $\psi$  は時間に依存しないシュレーディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = E\psi \quad (5.4)$$

を満たして、分離された定数  $E$  が粒子のエネルギーである。左辺の演算子は、ハミルトニアン

\*1 一般的に、複合系のエネルギーの合計は、以下の三つの和だ。(i) 構成物の静止エネルギー、(ii) 構成物の運動エネルギー、そして (iii) その状態でのポテンシャルエネルギー。後ろの二つは、典型的には同じくらいの大きさだ(正確な関係はビリアル定理によって与えられる)。構成物の静止エネルギーよりも束縛エネルギーがはるかに小さいと、運動エネルギーも小さくなるので、その系は非相対論的になる。一方で、複合物の質量が個々の構成物の静止質量の合計よりもずっと大きいときは、運動エネルギーが大きく、その系は相対論的になる。

\*2 シュレーディンガー方程式の解に定数を掛けても解のままである。実際問題としては、式 (5.2) を満たすように定数を固定する。この操作は、波動関数を「規格化する」とよばれる。

表 5.1  $l = 0, 1, 2, 3$  に対する球面調和関数

$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$	$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$	$Y_3^0 = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$
	$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi}$	$Y_2^1 = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\phi}$	$Y_3^1 = -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} (5\cos^2\theta - 1) e^{i\phi}$
		$Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{2i\phi}$	$Y_3^2 = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2\theta \cos\theta e^{i\phi}$
			$Y_3^3 = -\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3\theta e^{3i\phi}$

$$H \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \tag{5.5}$$

で、(時間に依存しない) シュレーディンガー方程式は、固有方程式のかたちを取る。

$$H\psi = E\psi \tag{5.6}$$

$\psi$  は  $H$  の固有関数で、 $E$  は固有値である\*3。

球対称 (あるいは「中心対称」) なポテンシャルの場合、 $V$  は原点からの距離だけの関数となり、(時間に依存しない) シュレーディンガー方程式は球座標系で

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{u(r)}{r} Y_l^{m_l}(\theta, \phi) \tag{5.7}$$

となる。ここで、 $Y$  は球面調和関数である。これらの関数は (Particle Physics Booklet も含めて) いろいろな場所で表になっている。その中でとくによく使うものを表 5.1 にまとめた。定数  $l$  と  $m_l$  は、4章で導入した軌道角運動量に関する量子数に対応している。すると、 $u(r)$  は、動系方向のシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2u}{dr^2} + \left[ V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu \tag{5.8}$$

を満たす。興味深いことに、この式は、ポテンシャルに  $(\hbar^2/2m)l(l+1)/r^2$  という遠心力による障壁が付け加わっていることを除けば、1次元の式 (5.4) とまったく同じかたちをしている。

一般論として押し進めることができるのはほぼここまでで、ここからは、手元にある問題を解くためには、ある特定のポテンシャル  $V(r)$  を式に入れなければならない。まずは動径方向の方程式を  $u(r)$  に対して解き、その結果を適切な球面調和関数と合体

\*3  $|\Psi|^2 = |\psi|^2$  であることに注意せよ。たいていの目的では波動関数の絶対値の2乗だけが意味をもち、これからはほぼ  $\psi$  だけを使って計算していく。偶然の一致で、 $\psi$  を「波動関数」とたびたびよぶが、実際の波動関数は自然対数的な時間依存性をもっていることを忘れてはならない。

させ、自然対数である係数  $\exp(-iEt/\hbar)$  を掛けるという戦略で、波動関数  $\Psi$  全体を求める。しかし、動径方向の方程式を解く段階で、ある特定の  $E$  の値のみが許容される結果となることがわかる。多くの  $E$  の値に対して、式 (5.8) は  $r$  が大きいところで大きな値となり、波動関数を規格化できなくなってしまう。そのような解は、可能な物理的状态を記述していない。技術的といってもよいようなこの詳細は、量子力学の最も印象深い重要な特徴となっている。つまり、束縛状態は、(古典論で取り得たように) あらゆるエネルギーをもつことができるわけではなく、その系の許容エネルギーというある特別な値しかとれない。実際問題としては、われわれが注意すべきは波動関数自体ではなく、許容エネルギーのスペクトルなのだ。

## 5.2 水素

水素原子（電子と陽子）は、もちろん素粒子ではないが、非相対論的束縛状態の模型となる。陽子は（相対的に）非常に重いので、原点に居座る。つまり、問題となる波動関数は電子のものだ。原子核から電子への引力により、そのポテンシャルエネルギーは（ガウス単位で）

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \quad (5.9)$$

である。このポテンシャルを動径方向の方程式に代入すると、 $E$  が

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} = -\alpha^2 mc^2 \left( \frac{1}{2n} \right) = -13.6 \text{ eV}/n^2 \quad (5.10)$$

という特別な値をもつときだけ、規格化された解が得られる。ここで、 $n = 1, 2, 3, \dots$  で、

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.036} \quad (5.11)$$

は、微細構造定数である。それに対応する（規格化された）波動関数  $\Psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi, t)$  は

$$\left\{ \left( \frac{2}{na} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3} \right\}^{1/2} e^{-r/na} \left( \frac{2r}{na} \right)^l L_{n-l-1}^{2l+1} \left( \frac{2r}{na} \right) Y_l^{m_l}(\theta, \phi) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (5.12)$$

となる、ただし、



$$a \equiv \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-8} \text{ cm} \quad (5.13)$$

は、ボーア半径で（大雑把にいうと、原子の大きさ）、 $L$ はラゲールの陪多項式である。

あきらかに、波動関数は煩雑だが、それはまったく心配すべきことではない。大事なのは、許容エネルギーの公式である、式(5.10)だ。それは、1913年（シュレーディンガー方程式が紹介される10年以上前）にボーアによって初めて導き出された。それは、本来適用できないはずの古典的アイデアと原始的な量子論が混合した偶然の産物で、ラビがいったように、「芸術的かつ傲慢な<sup>ごうまん</sup>」ひらめきの混ぜ合わせから生まれた。

波動関数は、三つの数字でラベルづけされていることに注意してほしい。正の整数である $n$ （主量子数）は状態のエネルギーを決める（式(5.10)）。0から $n-1$ までの整数である $l$ は、角運動量を特定する（式(4.2)）。そして、 $-l$ から $l$ までの整数である $m_l$ が、角運動量の $z$ 成分を与える（式(4.4)）。あきらかに、それぞれの $l$ に対して $2l+1$ 通りの $m_l$ があり、それぞれの $n$ に対して $n$ 通りの $l$ がある。ゆえに、同じ主量子数 $n$ （すなわち、同じエネルギー）をもつ異なる状態の数は

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2 \quad (5.14)$$

になる。これは、 $n$ 番目のエネルギー順位の縮退とよばれる。水素は驚くべき縮退系だ。球対称性により、 $\mathbf{L}$ の方向だけの違いから、それぞれ異なる軌道角運動量をもつ $2l+1$ 個の状態が縮退している。しかし、それらは1, 3, 5, 7, ... という縮退数になる一方で、水素のエネルギー準位の縮退数はもっと多く1, 4, 9, 16, ... となっている。これは、異なる $l$ をもつ状態が同じ $n$ を共有するからだ。クーロンポテンシャルの風変わりな特徴なのだ。

実際には、われわれはエネルギーそのものを測定することはなく、むしろ、電子が上の準位から下に落ちたときに放出する光（あるいは、電子が逆向きに動いたときに吸収される光）の波長を測っている[2]。初期状態と終状態では光子のもつエネルギーに違いがある。プランクの公式（式(1.1)）によると、

$$E_{\text{photon}} = h\nu = E_{\text{initial}} - E_{\text{final}} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \quad (5.15)$$

である。それゆえ、放出される波長は

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (5.16)$$

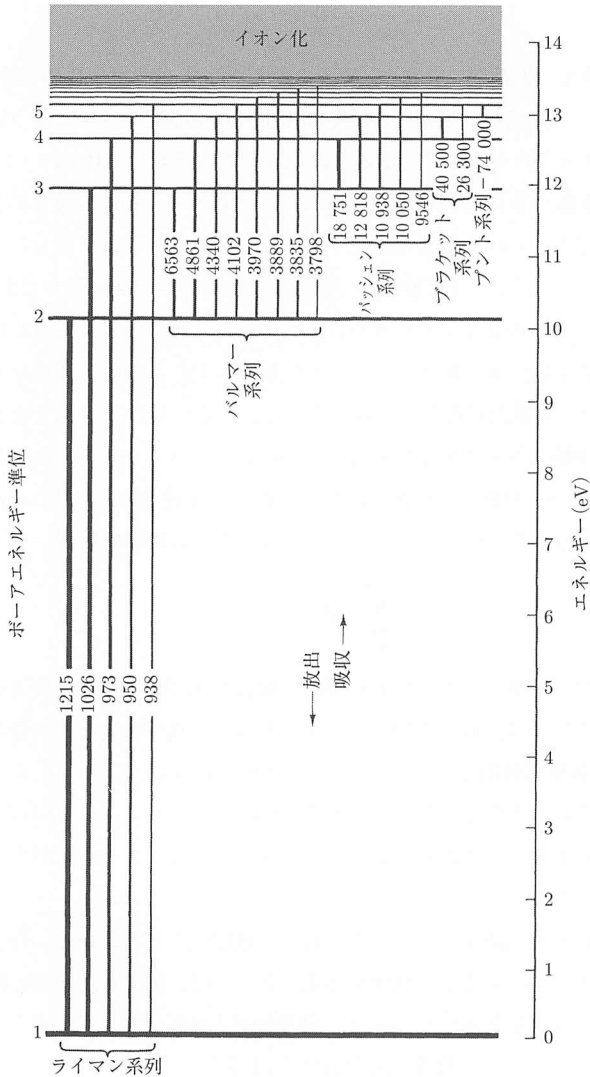


図 5.1 水素のスペクトル。原子がある状態から別の状態になると、そのエネルギー差が放射の量子として現れる。光子のエネルギーは、放射の周波数に直接比例し、波長に反比例する。放射を吸収すると高いエネルギー状態に移るきっかけを与え、低いエネルギー状態に落ちると原子は放射を放出する。下のエネルギー単位を共有するような複数の線でスペクトルが整理されている。波長はオングストロームの単位で書いてある（訳注： $1 \text{ \AA} = 0.1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$ ）。相対的な強度は線の太さで表現されている（出典：Hansch, T. W., Schawlow, A. L. and Series, G. W.: *The Spectrum of Atomic Hydrogen*, Scientific American, 94 (March 1979)。許可を得て掲載）

となる、ただし、

$$R \equiv \frac{me^4}{4\pi\hbar^3c} = 1.09737 \times 10^5/\text{cm} \quad (5.17)$$

である。式 (5.16) は、水素のスペクトルに対する有名なりユードベリの公式である。それは、19 世紀の分光学で実験的に発見され、リユードベリにとっては  $R$  はたんなる経験則的定数であった。ボーアの理論の大成功は、リユードベリ定数の導出と  $R$  を根本的な定数である  $m$ ,  $e$ ,  $c$ ,  $\hbar$  で表現したことである (図 5.1)。

### 5.2.1 微細構造

分光法の実験精度が上がると、リユードベリの公式からの小さな乖離<sup>かいり</sup>が検出された。スペクトルの線は、二重、三重、そして、もっとたくさんのわずかに離れたピークの重ね合わせになっていた。この微細構造は、実際には、二つの異なる仕組みによるものと解釈される。

1. 相対論的補正：ハミルトニアン (式 (5.5)) の第 1 項は、運動エネルギーの古典論的表現 ( $p^2/2m$ ) の量子置き換え  $p \rightarrow -i\hbar\nabla$  からの帰結である。最低次の相対論的補正は  $-p^4/8m^3c^2$  である (問題 5.4)。
2. スピン-軌道結合：スピンをもつ電子はきわめて小さい磁石をつくり出し、その双極子モーメントは\*4

$$\mu_e = -\frac{e}{mc}S \quad (5.18)$$

である。電子から見ると「軌道を描いている」陽子が磁場  $B$  を与え、スピン-軌道相互作用項がそれに付随する磁気エネルギー  $-\mu_e \cdot B$  となる。

正味の結果は  $n$  番目のエネルギー準位から [1],

\*4 SI 単位系では磁気双極子モーメントは、電流掛ける面積 ( $Ia$ ) と定義されるが、ガウス単位系では  $Ia/c$  である。磁気双極子モーメントと角運動量との間の比例係数は、磁気回転比として知られている。古典的には、(ガウス系で)  $-e/2mc$  という値をもつはずで [3]、軌道角運動量に対しては正しい。しかし、磁気双極子を生成するという観点からは、スピンは「そうあるべきよりも 2 倍の効率がある」ことがわかった (ディラックの電子に関する理論の多大なる成功の一つがこの余分な 2 の説明であった)。しかしながら、後にわかるように、これさえも完全に正しいわけではない。量子電気力学 (QED) による補正があり、1940 年代後半にシュウィンガーが初めて計算した。今日まで、電子の異常磁気モーメントの実験的および理論的な決定が素晴らしい精度で試みられ、それらは厳格な一致を見せている [4]。

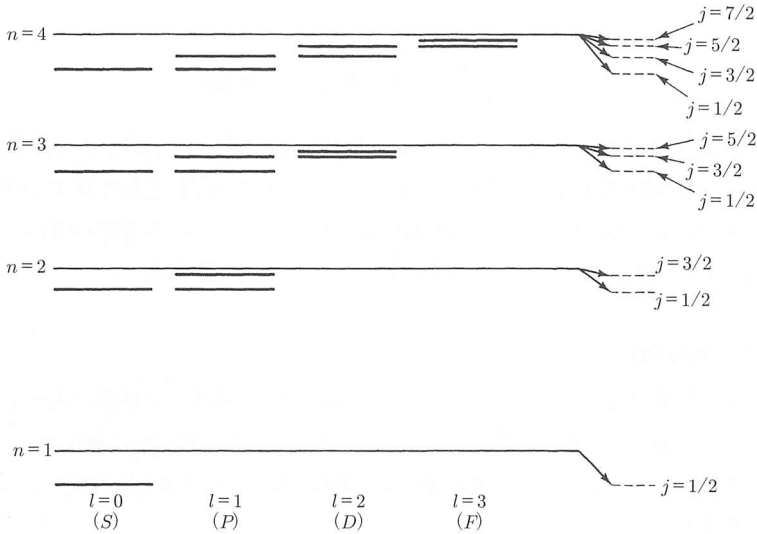


図 5.2 水素の微細構造.  $n$  番目のボーア単位 (細い実線) が,  $j = 1/2, 3/2, \dots, (n - 1/2)$  によって特徴づけられる  $n$  個の下層単位 (点線) に分かれる. 一番最後以外では,  $l = j - 1/2$  と  $l = j + 1/2$  という二つの異なる  $l$  がそれぞれの単位に寄与する. 分光学者の命名に従うと,  $l = 0$  は  $S$ ,  $l = 1$  は  $P$ ,  $l = 2$  は  $D$ ,  $l = 3$  は  $F$  とよばれる. 図示されているように, すべての単位は下にずれている (しかし, 図は現実のずれを表すようにスケールされていない)

$$\Delta E_{fs} = -\alpha^4 mc^2 \frac{1}{4n^4} \left[ \frac{2n}{(j + 1/2)} - \frac{3}{2} \right] \tag{5.19}$$

だけの摂動となる. ここで,  $j = l \pm 1/2$  は電子の角運動量の総和 (スピンと軌道角運動量の和) である (式 (4.12)). ボーアエネルギーが  $\alpha^2 mc^2$  という依存性をもっていること (式 (5.10)) を思い出すと, 微細構造はさらに  $\alpha$  の 2 乗をもっているので, 約  $10^{-4}$  だけ小さくなる. そう, われわれはちっぽけな補正について議論しているのだ\*5.  $l$  は 0 から  $n - 1$  までのいかなる整数でもあり得て,  $j$  は  $1/2$  から  $n - 1/2$  までのいかなる半整数でもあり得るので,  $n$  番目のボーア単位  $E_n$  はさらに  $n$  個の下層単位に分かれる (図 5.2).

\*5 微細構造定数という名前は, それ (あるいは, むしろ  $\alpha^2$ ) が, 水素原子中の微細構造の相対的なスケールを決めていることに由来している. しかし,  $\alpha^2$  がボーア単位自体のスケールを決めているともいえる. 実際, 微細構造定数の最大の特徴は, それが ( $hc$  を単位とすると) 素電荷 (の 2 乗) の大きさになっていることである. すなわち,  $\alpha = e^2/hc$  だ.

## 5.2.2 ラムシフト

微細構造の公式 (式 (5.19)) の驚くべき特徴は、 $j$  にのみ依存していて、 $l$  に依存せず、一般に二つの異なった  $l$  が同じエネルギー準位を分かち合うことだ。たとえば、 $2S_{1/2}$  ( $n=2, l=0, j=1/2$ ) と  $2P_{1/2}$  ( $n=2, l=1, j=1/2$ ) 状態は完全に縮退したままだ。1947年にラムとラザフォードは、古典的な実験を行い [5]、実際にはそうっていないことを示した。 $S$  状態の方が  $P$  状態よりもわずかにエネルギーが高いのだ。そのラムシフトの説明は、ベーテ、ファインマン、朝永らによってなされた。これは、電磁場自身の量子化によるものだ。その他すべての解析においては、ボーア単位でも、微細構造の公式でも、(次の節で出てくる) 超微細分離でさえも、電磁場はすべて古典的に扱われている。それとは対照的に、ラムシフトは QED における放射補正の例で、半古典的\*6理論ではそれを説明することができない。ファインマンの公式の中では、図 5.3 にあるように、ループの図から引き起こされる。それについては後で定量的な議論をする。

定性的には、図 5.3 の最初のダイアグラムは核子のすぐそばでの電子陽電子対の自発的生成を意味している (誤って真空偏極と名づけられた)、陽子の電荷の部分的な遮蔽を引き起こす (図 2.1)。2 番目のダイアグラムは、電磁場の基底状態がゼロではないという事実を反映している [6]。電子は場における「真空の変動」の中を動いているので、軽く揺れてエネルギーがわずかに変わる。3 番目のダイアグラムは電子の磁気双極子モーメントのわずかな変化を引き起こす (脚注 \*4 を見よ)。これらの効果についての計算をここではしないが、結果は以下のようなになる [7]。  $l=0$  に対して

$$\Delta E_{\text{lamb}} = \alpha^5 mc^2 \frac{1}{4n^3} k(n, 0) \quad (5.20)$$

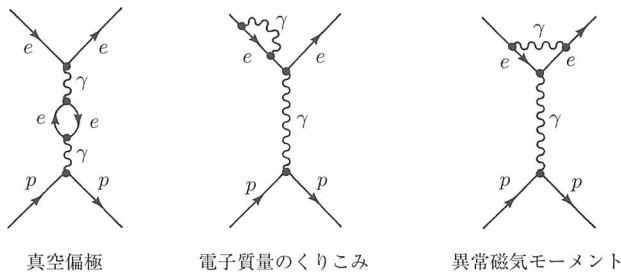


図 5.3 ラムシフトに寄与するいくつかの図

\*6 電子は量子力学的に取り扱われているが、電磁場は古典的に扱われているので、半古典的とよぶ。

ただし、 $k(n, 0)$  は  $n$  に依存する数値的係数で、( $n = 1$  に対する) 12.7 から ( $n \rightarrow \infty$  に対する) 13.2 まで変わる。  $l \neq 0$  のときは、

$$\Delta E_{\text{lamb}} = \alpha^5 mc^2 \frac{1}{4n^3} \left\{ k(n, l) \pm \frac{1}{\pi(j+1/2)(l+1/2)} \right\}, \quad j = l \pm \frac{1}{2} \quad (5.21)$$

ここで  $k(n, l)$  は非常に小さい値で (0.05 未満)  $n$  と  $l$  が変わるとわずかに変わる。微細構造の大きさの約 10 分の 1 の大きさになる  $l = 0$  の状態を除いては、あきらかにラムシフトは極微である。しかし、 $l$  に依存するので、図 5.2 にあるように、共通の  $n$  と  $j$  をもつ対の縮退をもち上げて、とくに  $2S_{1/2}$  と  $2P_{1/2}$  の準位を分離させる (問題 5.6)。

### 5.2.3 超微細分離

微細構造とラムシフトは、ボーアのエネルギー準位のわずかな補正だが、話はそれだけでは終わらない。核子のスピンによる、さらに小さい (約 1000 分の 1) 補正がある。陽子は、電子のように小さな磁石からできているが、電子よりもはるかに重いので、その双極子モーメントははるかに小さい

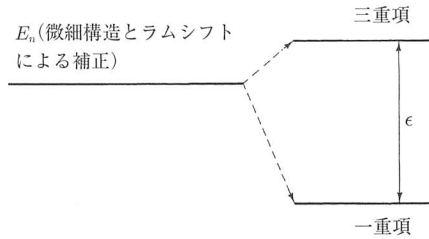
$$\mu_p = \gamma_p \frac{e}{m_p c} \mathbf{S}_p \quad (5.22)$$

(陽子は複合物で、その磁気モーメントは、真に素であるスピン  $1/2$  の粒子がもつ  $e\hbar/2m_p c$  にはならない。よって、因子  $\gamma_p$  が必要でその実験値は 2.7928 である。後で、クォーク模型からこの値をどのように算出するかを見ていく)。原子核のスピンは、スピンと軌道の相互作用が微細構造に寄与したのと同様の仕組みで、電子の軌道運動と相互作用する。加えて、電子のスピンとも直接相互作用する。まとめると、原子核のスピンと電子の軌道との相互作用、そして、陽子と電子の間でのスピン結合が超微細分離を引き起こす [8]。

$$\Delta E_{hf} = \left( \frac{m}{m_p} \right) \alpha^4 mc^2 \frac{\gamma_p}{2n^3} \frac{\pm 1}{(f+1/2)(l+1/2)}, \quad f = j \pm \frac{1}{2} \quad (5.23)$$

ここで、 $f$  は角運動量の総和 (軌道と両方のスピン) に対する量子数である。

微細構造の公式 (式 (5.19)) と比べると、その大きさの違いは式の前頭にある質量比 ( $m/m_p$ ) のせいであることに気づく。その因子があるため、水素の超微細効果は約 1000 倍小さいことになる。もし角運動量がゼロなら ( $l = 0$ )、 $f$  は 2 通りの値を取り得る。(スピンが反対向きに整列したときの) 一重項ではゼロで、(スピンが平行のときの) 三重項では 1 だ。それゆえ、 $l = 0$  の準位それぞれは二つに分かれる。一重項は

図 5.4  $l = 0$  に対する超微細分離

下へ押し下げられ、三重項は上へもち上げられる (図 5.4)。 $n = 1$  の基底状態では、エネルギーギャップは

$$\epsilon = E_{\text{triplet}} - E_{\text{singlet}} = \frac{32\gamma_p E_1^2}{3m_p c^2} \quad (5.24)$$

であり [9]、それに対応する光子の波長は

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\epsilon} = 21.1 \text{ cm} \quad (5.25)$$

となる。これが、マイクロ波天文学で有名な「21 cm 線」を引き起こす遷移である [10]。

### 5.3 ポジトロニウム

水素の理論は、いくつかの修正を加えて、いわゆる「エキゾチック」原子に対する理論へと変わった。エキゾチック原子とは、陽子か電子を何らかの別の粒子に置き換えたものである。たとえば、ミュー粒子水素 ( $p+\mu^-$ )、パイ中間子水素 ( $p+\pi^-$ )、ポジトロニウム ( $e+e^-$ )、ミューオニウム ( $\mu+e^-$ ) などをつくれる。もちろんこれらのエキゾチック状態は不安定である。しかし、その多くは、はっきりとしたスペクトルを見せるのに十分な寿命をもっている。とりわけ、ポジトロニウムは QED に対する豊かな試験環境を提供している。1944 年にビレンネによって理論的に解析され、1951 年にドイツによって実験室で初めて製造された [11]。素粒子物理学において、ポジトロニウムはクォークオニウムのモデルとして特別な重要性があると考えられている。

ポジトロニウムと水素との間の最も際立った違いは、電子の軌道の真ん中に位置する重くて基本的に動かない原子核をもはや取り扱わず、代わりに、共通の中心に対して軌道を描いている同じ質量の 2 粒子を扱うということである。古典力学での扱いのように、この二体問題は

$$m_{\text{red}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (5.26)$$

という換算質量をもつ一体問題に変換できる。ポジトロニウムの場合、 $m_1 = m_2 = m$ なので、 $m_{\text{red}} = m/2$ であり、ボーアの公式(式(5.10))でたんに  $m \rightarrow m/2$  という置き換えを行うだけで非摂動的なエネルギー準位を得ることができる(式(5.10))\*7.

$$E_n^{\text{pos}} = \frac{1}{2} E_n = -\alpha^2 m c^2 \frac{1}{4n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.27)$$

たとえば、基底状態の束縛エネルギーは  $13.6 \text{ eV}/2 = 6.8 \text{ eV}$  だ。波動関数は、 $1/m$  に比例するボーア半径(式(5.13))を除けば水素と同じだ(式(5.12))。ポジトロニウムではボーア半径は2倍となり、

$$a^{\text{pos}} = 2a = 1.06 \times 10^{-8} \text{ cm} \quad (5.28)$$

である。

厄介な数値因子があることを除けば、以前と同様に摂動近似を使える。しかし、一つ劇的な違いがある。ポジトロニウムでは、超微細分離は微細構造( $\alpha^4 m c^2$ )とほぼ同じ大きさだ。というのも、水素では陽子のスピン効果を抑圧している質量比( $m/m_p$ )が、ポジトロニウムでは1だからだ\*8。一方で、「原子核」である  $e^+$  がもはや静止していないので、電磁波が伝わるための有限時間に起因する新しい補正が加わる。その寄与の大きさもまた  $\alpha^4 m c^2$  のオーダーである。これらすべてをひとまとめにすると、ポジトロニウムの微細構造の公式は[11]

$$E_{\text{fs}}^{\text{pos}} = \alpha^4 m c^2 \frac{1}{2n^3} \left[ \frac{11}{32n} - \frac{(1 + \frac{1}{2}\epsilon)}{(2l + 1)} \right] \quad (5.29)$$

と導き出される。ただし、ここで一重項のスピン組み合わせに対しては  $\epsilon = 0$  で、三重項に対しては\*9

\*7 水素の場合、換算質量は電子の質量からほんの少ししか変わっておらず、約0.05%しか違わない。しかしながら、細かいことをいうと、ボーアの公式での  $m$  は換算質量であり、これにより水素と重水素のスペクトルに違いが現れる。

\*8 これが文献における用語上の混乱を招く。本書では、対消滅の項(以下を参照)を除いては、スピン-スピン、そして陽電子のスピン-軌道結合も含めて、 $\alpha^4 m c^2$  のオーダーの摂動すべてに対して「微細構造」という用語を使うことにする。

\*9 陽子のスピン ( $S_p$ ) が超微細レベルにだけ寄与する水素では、電子のスピンと軌道角運動量の和に対して  $J$  を ( $J = L + S_e$ )、そして、角運動量の総和に対しては新しい記号  $F = L + S_e + S_p$  を使った。ポジトロニウムでは、二つのスピンのように寄与し、慣習ではそれら二つをまず合成し ( $S = S_1 + S_2$ )、総和に対して  $J$  を使う。すなわち、 $J = L + S_1 + S_2$  である。



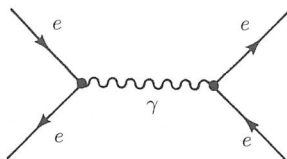


図 5.5 ポジトロニウムのスペクトルには影響を与えるが、水素では起こらない対消滅のダイアグラム

$$\epsilon = \begin{cases} \frac{-(3l+4)}{(l+1)(2l+3)}, & j = l+1 \\ \frac{1}{l(l+1)}, & j = l \\ \frac{3l-1}{l(2l-1)}, & j = l-1 \end{cases} \quad (5.30)$$

である。

これに加えて、オーダー  $\alpha^5 mc^2$  のラムシフトが補正を与える。しかし、ポジトロニウムでは微細構造の段階で「偶然的」縮退がすでに破れてしまっているのです。ラムシフトの補正にはそれほどの興味がない。だが、水素の場合にはない、 $e^+$  と  $e^-$  が仮想光子をつくるために一時的に消滅できるという事実の帰結として、まったく新しい摂動が存在する。ファインマンの描像では、この過程は図 5.5 のダイアグラムで表現される。電子と陽電子の重なりが要求されるので、この摂動は  $|\Psi(0)|^2$  に比例し、よって、 $l=0$  のときにのみ起こる（ $\Psi$  は原点近くでは  $r^l$  の依存性をもつ。式 (5.12) を参照）。さらに、光子はスピン 1 なので、対消滅は三重項の配位でのみ起こる。この過程は三重項  $S$  のエネルギーを

$$\Delta E_{\text{ann}} = \alpha^4 mc^2 \frac{1}{4n^3} \quad (l=0, s=1) \quad (5.31)$$

だけ増やす。この大きさは微細構造と同じオーダーである。ポジトロニウムにおける  $n=1$  と  $n=2$  のボーアレベルの分離の様子全体は図 5.6 に示されている\*10。

水素の場合と同様に、光子を放出あるいは吸収することによって、ポジトロニウムはある一つの状態から別の状態に移ることができる。その光子の波長は、二つの準位の間のエネルギー差によって決まる。水素と違い、ポジトロニウムは、陽電子と電子が消滅して二つあるいはそれ以上の数の光子に完璧に崩壊もできる。ポジトロニウムの荷電共役数は  $(-1)^{l+s}$  で、一方、 $n$  個の光子は  $C = (-1)^n$  だ（4.4.2 項）。ゆえに、状態

\*10 ポジトロニウムの状態は、慣習では  $n^{(2s+1)l_j}$  とラベルづけされる。 $l$  は分光学者の表記法で ( $l=0$  に対して  $S$ ,  $l=1$  に対して  $P$ ,  $l=2$  に対して  $D$  など)、 $s$  はスピンの合計である（一重項では 0、三重項では 1）。

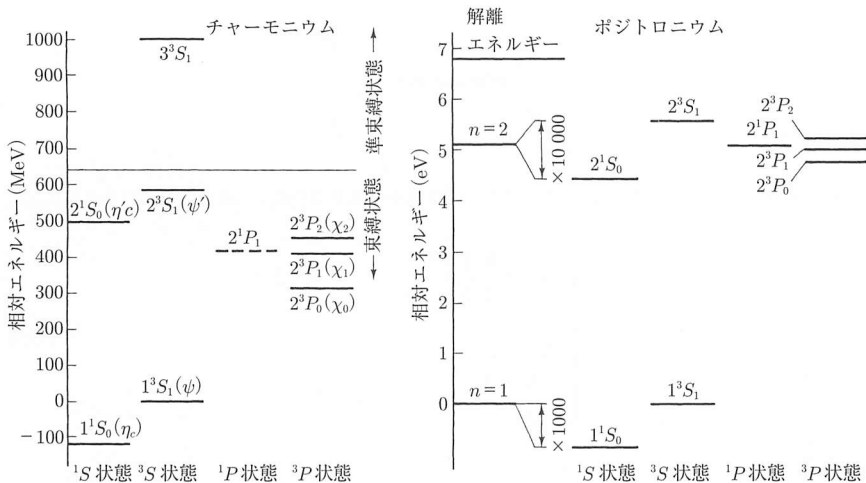


図 5.6 チャーモニウムとポジトロニウムのエネルギー準位のスペクトル。チャーモニウムに対しては大きさが 1 億倍になっていることに注意せよ。ポジトロニウムでは、角運動量のさまざまな組み合わせが（縦軸が引き伸ばされていることで見える）エネルギーの極微少なシフトしか引き起こさないが、チャーモニウムでは、そのシフトははるかに大きい。すべてのエネルギーは  $1^3S_1$  状態を基準にして描かれている。6.8 eV でポジトロニウムは解離してしまう。633 MeV を超えると、 $\psi$  チャーモニウムは  $D^0$  と  $\bar{D}^0$  に崩壊できるので準束縛状態になる（出典：E. Bloom and G. Feldman: Quarkonium, Scientific American, 66 (May 1982). 許可を得て掲載）

$l, s$  からのポジトロニウム崩壊においては、

$$(-1)^{l+s} = (-1)^n \tag{5.32}$$

という選択則が荷電共役保存から定められる。陽電子と電子は  $l = 0$  のときのみ重なりがあるので、そのような崩壊は状態  $S$  からのみ起こる<sup>\*11</sup>。あきらかに、一重項 ( $s = 0$ ) は偶数の光子に（典型的には二つ）、三重項 ( $s = 1$ ) では奇数の光子に（典型的には三つ）崩壊する。7 章まで進むと

$$\tau = \frac{2\hbar}{\alpha^5 mc^2} = 1.25 \times 10^{-10} \text{ 秒} \tag{5.33}$$

という基底状態の寿命を計算することができる。

<sup>\*11</sup> 実際のところ原理的には、ポジトロニウムは、高次の過程によって  $l > 0$  の状態から直接崩壊することができるが、まず最初に  $S$  状態に落ち込んだ後に崩壊する方が圧倒的に多い。

## 5.4 クォークonium

クォーク模型ではすべての中間子は  $q_1 \bar{q}_2$  という二つの粒子の束縛状態であり、水素やポジトロニウムのために開発した手法を中間子にも同じように使えるのか、というのは自然な問いだ。軽いクォーク ( $u, d, s$ ) の状態はそもそも相対論的なので、シュレーディンガー方程式に基づいていかなる解析も役に立たない。しかし、重いクォークからなる中間子 ( $c\bar{c}, b\bar{c}, b\bar{b}$ ) はちょうどよい候補だ。しかし、それらでさえも、相互作用のエネルギー ( $E$ ) は、全体に比べてかなりの部分を占めるので、さまざまなエネルギー準位が別々の粒子を表現しているとみなす立場を取る。ここで、質量は

$$M = m_1 + m_2 + E/c^2 \quad (5.34)$$

と与えられる。

扱うべき力が完全に電磁気力だけで、エネルギー準位を非常に高い精度で計算できる水素やポジトロニウムと違って、クォークは強い力によって束縛されていて、クーロンの法則の代わりにどんなポテンシャルを使えばよいかわからないし、スピン結合力を求めるための磁気に対応する強い力の類推が何なのかも知らない。原理的には、これらは量子色力学から導出されるものだが、いまだかつてその計算方法を誰も知らない。だが、経験に基づいていくらかの推測はできる。というのも、漸近的自由によって短距離では、おそらくあまり寄与のない非線形項を除いて、量子色力学の構造は電気力学に非常に似ているからだ。

量子色力学 (QCD) では、短距離での振る舞いは、ちょうど QED で一つの光子の交換が支配的であるように、一つのグルーオン交換に完全に支配されている。グルーオンと光子はともに質量がなくスピンの 1 なので、いま議論している近似では、全体の結合の強さと、与えられた過程に寄与するグルーオンの数の違いに由来するさまざまな因子、いわゆる「カラー因子」を除けば、相互作用としては等価である。ゆえに、短距離では  $V \sim 1/r$  というクーロン型のポテンシャルが期待でき、微細構造は定性的にはポジトロニウムのそれと近いことが予想される [12]。一方で長距離になると、クォークの閉じ込めを考えないといけな。すなわち、ポテンシャルが際限なく増え続ける。大きな  $r$  に対する  $V(r)$  の正確な関数形は予想でしかなく、調和振動的な  $V \sim r^2$  というポテンシャルだという者もいれば、対数的な依存性  $V \sim \ln(r)$  だという者もあるし、一定の力に対応する線形ポテンシャル  $V \sim r$  だという者もある。実際のところ、これらのどれもがデータをよく再現する。なぜなら、われわれが調査可能な距離のス

表 5.2 線形+クーロン型のポテンシャル (式 (5.35)) に対する  
さまざまな  $F_0$  での「ボーアの」エネルギー準位

$F_0$ (MeV fm <sup>-1</sup> )	$E_1$ (MeV)	$E_2$ (MeV)	$E_3$ (MeV)	$E_4$ (MeV)
500	307	677	961	1210
1000	533	1100	1550	1940
1500	727	1480	2040	2550

S 状態 ( $l = 0$ ) で,  $\alpha_S = 0.2$ ,  $m = 1500$  MeV/ $c^2$  を仮定している (換算質量は 750 MeV/ $c^2$ ).

ケールは小さく, その範囲内ではどれも大きな違いがないからだ.

われわれがいま取り組んでいる問題では, ポテンシャルを

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_S \hbar c}{r} + F_0 r \quad (5.35)$$

としてよい. ここで,  $\alpha_S$  は量子色力学の微細構造定数に対応するもので,  $4/3$  は色に関する因子で, 8 章でそれを計算する. 不運なことに, 線形+クーロン型ポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式の正確な解は見つかっておらず, 「ボーア」エネルギー準位に対する単純な公式を与えることはできない. しかし, もちろん数値的には解くことができ (表 5.2),  $F_0$  はデータに合うように選ぶ [13] (問題 5.11). その結果は約 16 トン (!) だ. あるいは, 気の利いた単位を使うと 900 MeV fm<sup>-1</sup> だ. つまり, クォークと反クォークはどんなに遠くに離れていようと, 互いを 16 トンの力で引きつけあっているのだ\*12. たぶんこれを考えると, 中間子から束縛されていないクォークを引っ張り出すことがいまだできていないことを理解しやすい.

#### 5.4.1 チャーモニウム

$\psi$  の発見直前に, アップルキストとポリツァーは, もし重い「チャーム」クォークが存在すれば (グラシヨールが提唱したように), それはポジトロニウムと同様のエネルギー準位のスペクトルをもつ非相対論的な束縛状態  $c\bar{c}$  を形成するはずだと提案した [14]. 彼らはその系を「チャーモニウム」とよんだ (きれいな言葉を選んだというよりも, 他の束縛状態との類似性を強調している). 1974 年に  $\psi$  が発見されたとき, チャーモニウムの  $1^3S_1$  状態だとすぐに同定された\*13 (SLAC での実験では  $\psi$  は  $e^+e^-$  の対消滅による仮想光子を介して, すなわち,  $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \psi$  と生成された. よって,  $\psi$  は  $\gamma$  と同じ量子数をもっており, とくに重要なのはスピン 1 をもっていることだ. ゆえに, それはチャーモニウムの基底状態にはなり得ないが, おそらく角運

\*12 極端に短距離では,  $F_0$  も  $\alpha_S$  も小さくなり漸近的自由近づくが, いまはそれらを定数として扱う.

\*13 命名の仕方はポジトロニウムにそそえている. 脚注 \*10 を参照せよ.

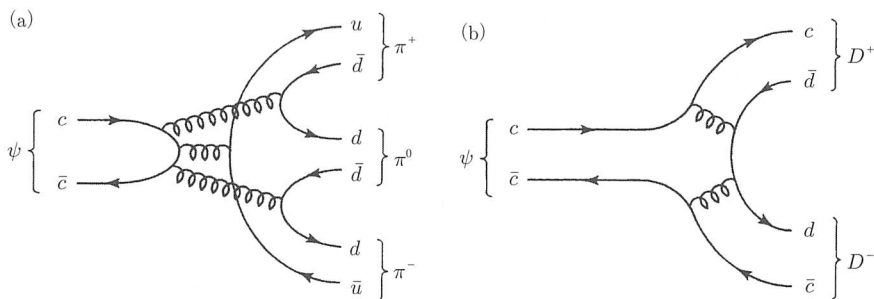


図 5.7 (a)  $D\bar{D}$  しきい値より下の、OZI 則で抑圧されるチャーモニウム崩壊. (b)  $D\bar{D}$  しきい値を超えて OZI 則で許されるチャーモニウム崩壊

動量 1 をもつものの中で最も低いエネルギー状態だ). ポジトロニウムのエネルギー準位の図を眺めると (図 5.6), すぐに, 最も質量が小さくてスピン 0 の状態と ( $1^1S_0$ ) と 6 個の  $n = 2$  の状態に気づく. 2 週間も経たずに,  $\psi'(2^3S_1)$  が見つかった. それもまた光子と同じスピンとパリティをもつので, 見つけるのは容易であった. たんにビームのエネルギーを少し上げるだけで,  $\psi$  と同様に生成された.

結局のところ, 予言された質量約  $3500 \text{ MeV}/c^2$  をもつ  $2^1P_1$  まで, すべての  $n = 1$  と  $n = 2$  の状態が発見され [15], 実験にかかわる特別な問題提起をした. 命名法としては以下が採用された. 一重項の  $S$  状態 (スピン 0) は  $\eta_c$  とよばれ, 三重項の  $S$  状態 (スピン 1) は  $\psi$ , そして, 三重項の  $P$  状態 (スピン 0 か 1 か 2) は,  $\chi_{c0}, \chi_{c1}, \chi_{c2}$  と命名された. しばらくの間は,  $n$  の値はダッシュによって示されていたが, すぐに手に負えなくなり, 現在の方法ではたんに括弧の中に質量を表示する. ゆえに,  $n = 1$  のときは  $\psi = \psi(3097)$ ,  $n = 2$  のときは  $\psi' = \psi(3686)$ ,  $n = 3$  のときは  $\psi'' = \psi(4040)$ ,  $n = 4$  のときは  $\psi''' = \psi(4160)$  などとなる\*<sup>14</sup>. チャーモニウムの状態とポジトロニウムの状態との相関はほぼ完璧である (図 5.6). 二つの  $n = 1$  の準位間のギャップ (水素の場合, 超微細分離とよばれるものだ) が, ポジトロニウムるときよりもチャーモニウムでは  $10^{11}$  倍も離れていることは我慢しよう. 大きさ自体にはそのようなとてつもなく大きい違いがあるが, エネルギー準位の順番と, ある  $n$  に対する相対的な離散の仕方は驚くほど酷似している.

チャーモニウムの  $n = 1$  あるいは  $n = 2$  のすべての状態は相対的に長寿命である. なぜなら, OZI 則 (2.5 節) により強い相互作用による崩壊が抑圧されているからだ.

\*<sup>14</sup> 著者によっては, Particle Physics Booklet の場合も含めて,  $s, l, j$  のそれぞれの組み合わせに対して 1 から順番に番号を割り振る場合もある. その場合, 私が  $2P$  とよぶ状態 (図 5.6) は  $1P$  と表示される (申し訳ない). 偶然にも  $\psi(3770)$  は  $3^3D_1$  状態と表示され, この階層には属さない.

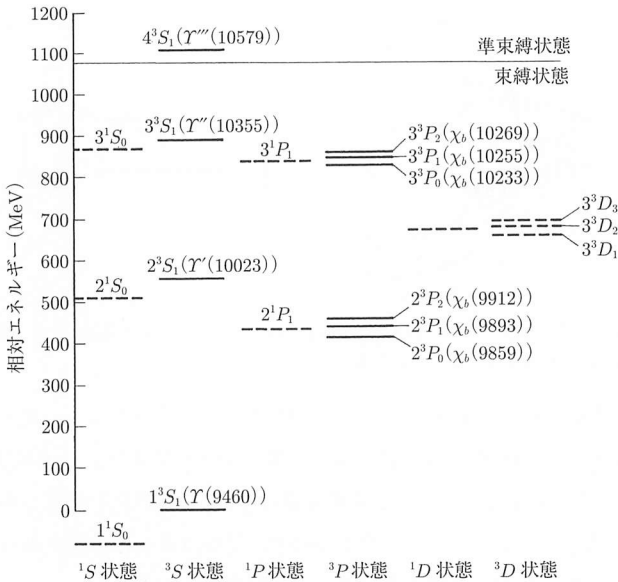
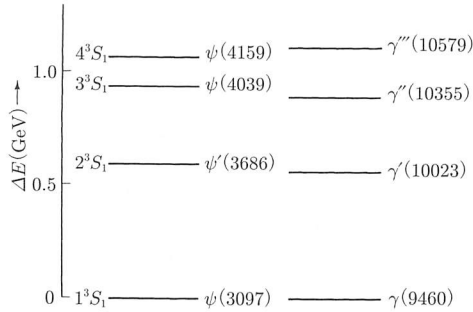


図 5.8 ボトムニウム. チャーモニウムよりもはるかにたくさんの束縛状態があることに注意せよ. 図 5.6 と比較せよ (出典: E. Bloom and G. Feldman: Quarkonium, Scientific American, 66 (May 1982). 許可を得て掲載. 質量については Particle Physics Booklet (2006) の値に訂正)

$n \geq 3$  の場合, チャーモニウムの質量は (OZI 則許容の) 二つのチャーム  $D$  中間子 ( $D^0$  と  $\bar{D}^0$  の質量は  $1865 \text{ MeV}/c^2$  で,  $D^\pm$  は  $1869 \text{ MeV}/c^2$ ) の生成しきい値を超えている. それゆえ, 寿命はずっと短く, それらを「準束縛状態」とよぶ (図 5.7). 準束縛状態のチャーモニウムは, 少なくとも  $n = 5$  まで観測されている.

### 5.4.2 ボトムニウム

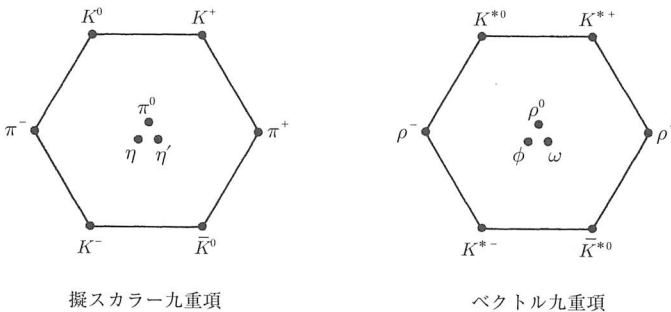
11月革命の後, 第3世代 ( $b$  と  $t$ ) の存在についての憶測が広まり, 1976年にはアイテンとゴットフリートが, 「ボトムニウム」 ( $b\bar{b}$ ) はチャーモニウムよりもさらに豊かな束縛状態の階層構造を示すだろうと予言した [16] (図 5.8). ボトムの場合の  $D$  中間子 (すなわち  $B$ ) は,  $n = 1$  と  $n = 2$  だけでなく,  $n = 3$  の単位も束縛されるに足る質量をもっていると見積もられた. 1977年に, ウプシロン中間子が発見され, すぐに  $1^3S_1$  状態のボトムニウムであると解釈された. 現在では,  $3^3S_1$  状態は  $n$  が 6 まで, また  $n = 2$  と  $n = 3$  に対しては 6 個の  $3^3P$  状態が見つかっている. チャームクォークよりもボトムクォークは 3 倍以上重いという事実にもかかわらず [17],  $\psi$  と  $\Upsilon$  系の単位の離れ方は, 驚くほど似ている (図 5.9).

図 5.9  $\psi$  と  $\Upsilon$  系の準位の離れ具合 (出典: Particle Physics Booklet (2006))

## 5.5 軽いクォークでできた中間子

さて今度は、全部が軽いクォーク ( $u$ ,  $d$ ,  $s$ ) からできた中間子について考えてみよう。これらは相対論的な系なので、シュレーディンガー方程式を使えないことや、理論に制約が多いことを思い出そう [18]。とくに、重いクォークのときには励起状態のスペクトル (表 4.6) に注目したが、いまは、 $l=0$  の基底状態に話を限ることにする。クォークのスピンは反平行 (一重項の  $s=0$ ) か、平行 (三重項の  $s=1$ ) になる。前者の配位だと擬スカラー九重項に、後者だとベクトル九重項になる (図 5.10)。

まず初めに、1 章で解決していなかった問題をはっきりさせたい。たんにクォークと反クォークを、可能なあらゆる組み合わせで結合させることで 9 個の中間子を得たが (1.8 節)、これによるとストレンジネス 0 の中性中間子が 3 個できて ( $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$ ,  $s\bar{s}$ )、これらのうちどれが  $\pi^0$  で、どれが  $\eta$  で、どれが  $\eta'$  なのか (ベクトルの場合は、 $\rho^0$ ,

図 5.10  $l=0$  の、軽いクォークからなる中間子

$\omega, \phi$  はつきりしない。いまならこの不定性を解くことができる。アップクォークとダウンクォークはアイソスピン二重項を形成する。

$$u = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle, \quad d = \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (5.36)$$

同様に反クォークは以下になる

$$\bar{d} = -\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \bar{u} = \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (5.37)$$

( $\bar{d}$  は  $I_3 = +1/2$  で、 $\bar{u}$  は  $I_3 = -1/2$  であることに注意せよ。一つの多重項の中では、より大きな電荷をもつ粒子に、より大きな  $I_3$  の値が割り振られる。負の符号は計算上の問題で [19]、ここでの議論の本質には何の影響もない)。  $I = 1/2$  をもつ二つの粒子を組み合わせると、

$$\begin{aligned} |11\rangle &= -u\bar{d} \\ |10\rangle &= (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2} \\ |1-1\rangle &= d\bar{u} \end{aligned} \quad (5.38)$$

というアイソ三重項 (式 (4.15)) と、

$$|00\rangle = (u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2} \quad (5.39)$$

というアイソ一重項 (式 (4.16)) を得る。擬スカラー中間子の場合、三重項はパイ中間子で、ベクトル中間子の場合には  $\rho$  だ。あきらかに、 $\pi^0$  (あるいは  $\rho^0$ ) は、 $u\bar{u}$  でも  $d\bar{d}$  でもなく、むしろ線形結合の

$$\pi^0, \rho^0 = (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2} \quad (5.40)$$

である。もし  $\pi^0$  を引き離すことができたなら、半分の確率で  $u$  と  $\bar{u}$  に、そして半分の確率で  $d$  と  $\bar{d}$  になるだろう。

残りは二つの  $I = 0$  状態 (アイソ一重項の組み合わせで、式 (5.39) と  $s\bar{s}$ ) になり、それらが  $\eta$  と  $\eta'$  (あるいは  $\omega$  と  $\phi$ ) になる。この状況はあまりすっきりしていない。というのは、これらの粒子は同一の量子数を持ち、実際のところ「混じり合う」。擬スカラーの場合、物理的な状態は

$$\eta = (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6} \quad (5.41)$$

$$\eta' = (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3} \quad (5.42)$$



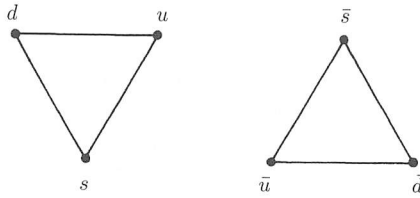


図 5.11 クォークと反クォーク

となる一方で、ベクトル中間子の場合

$$\omega = (u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2} \quad (5.43)$$

$$\phi = s\bar{s} \quad (5.44)$$

となる。八道説がよい対称性だという文脈では、擬スカラーの組み合わせは、より「自然」だ。というのも、 $u$ ,  $d$ , そして  $s$  を対称的に扱う  $\eta'$  は  $SU(3)$  変換で不変だ。つまり、 $\pi^0$  が  $SU(2)$  (アイソスピン) のもとで一重項であるのとまさに同様の意味合いで、 $SU(3)$  のもとでは「一重項」なのだ。一方、 $\eta$  は  $SU(3)$  「八重項」として変換し、その他のメンバーは三つのパイ中間子と四つの  $K$  だ (実際のところ、これが元々の擬スカラー八重項である)。対照的に、 $\phi$  も  $\omega$  も  $SU(3)$  一重項ではない。ストレンジクォークはその他の二つから分離されているので、それらは「最大限」混ざり合っている、といってよいかもしれない。ちなみに、他の中間子九重項は、 $\phi - \omega$  の混合パターンに従っているように見える [20]。

一方、ストレンジ中間子は、 $s$  クォークを  $u$  あるいは  $d$  クォークと組み合わせることで構築される。

$$K^+ = u\bar{s}, \quad K^0 = d\bar{s}, \quad \bar{K}^0 = -s\bar{d}, \quad K^- = s\bar{u} \quad (5.45)$$

群論の言葉を使うと、三つの軽いクォークは  $SU(3)$  の (3 と表される) 基本表現に属する一方で、反クォークは ( $\bar{3}$  と表される) 荷電共役表現に属する (図 5.11)。われわれがここまでやってきたことは、これらの表現を組み合わせることで、その結果として八重項と一重項を得た。

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 \quad (5.46)$$

それは、4章で、二つの2次元の (スピン 1/2 の)  $SU(2)$  の表現を組み合わせると三重

項と一重項を得たのとちょうど同じだ\*15.

$$2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1 \quad (5.47)$$

もし、 $SU(3)$  が完璧な対称性ならば、ある一つの多重項に属するすべての粒子は同じ質量をもつことになる。しかし、あきらかにそうはなっていない。たとえば、 $K$  は  $\pi$  よりも 3 倍以上重い。4 章で示したように、フレーバー対称性が破れているのは、クォークによって質量が違うという事実に起因する。 $u$  と  $d$  クォークはほぼ同じ重さだが、 $s$  はそれらよりもはるかに重い。ざっくりいうと、 $K$  が  $\pi$  より重いのは、 $u$  や  $d$  の代わりに  $s$  を含んでいるからだ。しかしそれですべてを説明できるわけではない。というのは、もし説明できるとしたら、 $\rho$  は  $\pi$  と同じ重さでなければならない。結局のところ、それらは同じクォークでできていて、かつ両方とも空間的には基底状態である ( $n=1, l=0$ )。擬スカラーとベクトル中間子はクォークのスピンの相対的な向きが違うだけなので、それらの質量の違いは、基底状態における水素の超微細分離の QCD 版であるスピン-スピン相互作用によるものに違いない。この考えに基づくと、中間子の質量公式は以下になる\*16.

$$M(\text{中間子}) = m_1 + m_2 + A \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2}{m_1 m_2} \quad (5.48)$$

ただしここで  $A$  は定数とする [21]。  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$  を両辺 2 乗することで、

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{S}^2 - \mathbf{S}_1^2 - \mathbf{S}_2^2) = \begin{cases} (1/4)\hbar^2, & s = 1 \text{ (ベクトル中間子)} \\ -(3/4)\hbar^2, & s = 0 \text{ (擬スカラー)} \end{cases} \quad (5.49)$$

を得る。構成質量  $m_u = m_d = 308 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_s = 483 \text{ MeV}/c^2$  に対して、 $A$  の最適な値は  $(2m_u/\hbar)^2 159 \text{ MeV}/c^2$  となり、表 5.3 の結果を得る。

\*15 (表記法の首尾一貫性という観点から) 不運にも、 $SU(3)$  の表現は、その次元によって慣習的にラベルづけされている一方で、 $SU(2)$  の表現はそのスピんで同定されることの方が多い。なので、式 (5.47) は、 $(1/2) \otimes (1/2) = 1 \oplus 0$  と通常書かれる。ところで、偶然にも  $SU(2)$  の基本表現はその荷電共役表現と同じだ。つまり、スピン  $1/2$  は 1 種類しかないのだ。それゆえに、式 (5.37) 中の  $\bar{u}$  と  $\bar{d}$  を通常のアイソスピン  $1/2$  状態で表現することができる。 $SU(3)$  の場合は、そうはならない。

\*16  $l=0$  状態では、超微細補正は磁気モーメントの内積  $\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2$  に比例し、双極子モーメントはスピン角運動量に比例し、質量に反比例する。それが、式 (5.48) 導出の背景となっている。もちろん、これは QED に対してのもので、QCD に対してではない。さらに悪いことに、それは波動関数の質量依存性を無視しており (「定数」 $A$  として入っている)、非相対論的量子力学に基づいている。しかし、これよりも成功を取っているものはなく、式 (5.48) は驚くほどうまくいっている (しかし、 $\eta'$  が表に含まれていないことには注意しよう。問題 5.12 を参照)。

表 5.3 擬スカラーとベクトル中間子の質量 (MeV/c<sup>2</sup>)

中間子	計算値	実測値
$\pi$	139	138
$K$	487	496
$\eta$	561	548
$\rho$	775	776
$\omega$	775	783
$K^*$	892	894
$\phi$	1031	1020

## 5.6 バリオン

おそらく、いつの日にか、非相対論的な重いクォークからなる  $ccc$ ,  $ccb$ ,  $cbb$ ,  $bbb$  というバリオンをつくれるはずである。これらは、クォーコニウムの親戚で「クォーケリウム」とよんでもよいかもしれない。というのも、原子との類推で最も近いのはヘリウムだからだ。しかし、いまのところ、重いクォークが1個入ったバリオンをつくるのでさえ難しく、3個なんてとんでもない話であり、ここでは重いクォークをもつバリオンのスペクトルについて推論することはしない。一方で、観測されている軽いクォークからなるバリオンの集団は膨大である (表 5.4)。

表 5.4 軽いクォークからなるバリオン

$SU(3)$ 表現	$J^P$	$S = 0$	$S = -1$		$S = -2$	$S = -3$
			$I = 0$	$I = 1$		
8	$(1/2)^+$	$N(939)$	$\Lambda(1116)$	$\Sigma(1193)$	$\Xi(1318)$	
10	$(3/2)^+$	$\Delta(1232)$		$\Sigma(1385)$	$\Xi(1530)$	$\Omega(1672)$
1	$(1/2)^-$		$\Lambda(1405)$			
1	$(3/2)^-$		$\Lambda(1520)$			
8	$(1/2)^-$	$N(1535)$	$\Lambda(1670)$	$\Sigma(1620)$	?	
8	$(3/2)^-$	$N(1520)$	$\Lambda(1690)$	$\Sigma(1670)$	$\Xi(1820)$	
8	$(5/2)^-$	$N(1675)$	$\Lambda(1830)$	$\Sigma(1775)$	?	
10	$(1/2)^-$	$\Delta(1620)$		?	?	?
10	$(3/2)^-$	$\Delta(1700)$		?	?	?
8	$(3/2)^+$	$N(1720)$	$\Lambda(1890)$	?	?	
8	$(5/2)^+$	$N(1680)$	$\Lambda(1820)$	$\Sigma(1915)$	$\Xi(2030)$	
10	$(5/2)^+$	$\Delta(1905)$		?	?	?
10	$(7/2)^+$	$\Delta(1950)$		$\Sigma(2030)$	?	?
8	$(1/2)^+$	$N(1440)$	$\Lambda(1600)$	$\Sigma(1660)$	?	

$J$  = スピン,  $P$  = パリティ,  $S$  = ストレンジネス,  $I$  = アイソスピン. これは完全なリストではない. 最大でスピン  $11/2$  をもつバリオンが観測されている. (出典: Review of Particle Physics (2006) Section 14.4)

### 5.6.1 バリオンの波動関数

いくつかの理由で、バリオンを解析するのは中間子より難しい。まず、バリオンは3体系だ。一つの軌道角運動量だけでなく、二つ考えねばならない(図5.12)。 $l=l'=0$ の基底状態に話を絞ろう。この場合、バリオンの角運動量は、三つのクォークのスピンの合計のみで決まる。クォークはスピン1/2をもつので、それぞれのクォークは「スピン上向き」( $\uparrow$ )か「スピン下向き」( $\downarrow$ )のどちらかの状態を取る。ゆえに、3個のクォークから可能なのは以下の8個の状態である。 $(\uparrow\uparrow\uparrow)$ ,  $(\uparrow\uparrow\downarrow)$ ,  $(\uparrow\downarrow\uparrow)$ ,  $(\uparrow\downarrow\downarrow)$ ,  $(\downarrow\uparrow\uparrow)$ ,  $(\downarrow\uparrow\downarrow)$ ,  $(\downarrow\downarrow\uparrow)$ ,  $(\downarrow\downarrow\downarrow)$ 。しかし、それらは角運動量の総和の固有状態ではないので、最も取り扱いやすい配位というわけではない。例題4.2で見たように、クォークのスピンは合計で3/2か1/2になり、後者は二つの違った組み合わせで達成できる。具体的には以下である。

スピン  $\frac{3}{2}$  ( $\Psi_S$ )

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle &= (\uparrow\uparrow\uparrow) \\ \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= (\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow)/\sqrt{3} \\ \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle &= (\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow)/\sqrt{3} \\ \left| \frac{3}{2} -\frac{3}{2} \right\rangle &= (\downarrow\downarrow\downarrow) \end{aligned} \tag{5.50}$$

スピン  $\frac{1}{2}$  ( $\Psi_{12}$ )

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_{12} = (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\uparrow/\sqrt{2}$$

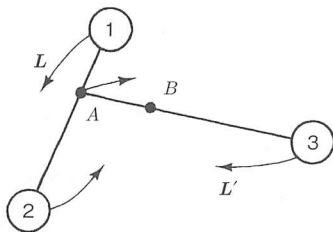


図5.12 三体系における角運動量。Lは1と2の重心(A)に対する1と2の角運動量。L'は3点の重心(B)に対するAと3の角運動量

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle_{12} = (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \downarrow / \sqrt{2} \quad (5.51)$$

スピン  $\frac{1}{2}$  ( $\Psi_{23}$ )

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_{23} &= \uparrow (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) / \sqrt{2} \\ \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle_{23} &= \downarrow (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (5.52)$$

いかなる二つの粒子を交換しても状態が変化しないという観点において、スピン  $3/2$  の組み合わせは完全に対称だ。スピン  $1/2$  の組み合わせは、部分的に反対称だ。二つの粒子の交換で符号が変わる。最初の組み合わせは、粒子 1 と 2 が反対称で、それを受けた下付き文字がついている。よって、2 番目は粒子 2 と 3 が反対称だ。もちろん、粒子 1 と 3 が反対称な組み合わせをつくろうと思えばつくれる。

スピン  $\frac{1}{2}$  ( $\Psi_{13}$ )

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_{13} &= (\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) / \sqrt{2} \\ \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle_{13} &= (\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (5.53)$$

しかしながら、これらは最初の二つと独立になっていない。読者が自分自身で確認できるように、

$$| \rangle_{13} = | \rangle_{12} + | \rangle_{23} \quad (5.54)$$

である。群論の言葉でいうと、三つの基本的な (2次元の)  $SU(2)$  表現の直積は、4次元表現と二つの 2次元表現との直和に分解できる\*17。

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2 \quad (5.55)$$

中間子よりもバリオンの方が取り扱いが複雑だという 2 点目は、パウリの排他原理に関係がある。元々の定式化では、パウリの原理によると二つの電子は同じ量子状態を占有することができない。原子中のすべての電子がなぜ単純に基底状態  $\psi_{100}$  に落ち込まないのかを説明するのが本来の目的であった (もしそうになってしまうと、化学

\*17 もし表現が次元の代わりにスピンのように表されているなら、式 (5.55) は  $1/2 \otimes 1/2 \otimes 1/2 = 3/2 \oplus 1/2 \oplus 1/2$  と読む。ちなみに、粒子 1 と 2 に対して対称なスピン  $1/2$  の組み合わせを  $| \rangle = | \rangle_{13} + | \rangle_{23}$  のようにつくることも可能だ。  $| \rangle_{12}$  と  $| \rangle_{23}$  の代わりに  $| \rangle_{12}$  と  $| \rangle_{13}$  を使うことを好む者もいる。

の余地はない)。そうならないのは、基底状態はスピン上向きと下向きの2個しか収容できないからだ。いったんそれらが占有されてしまうと、次の電子は最初の励起状態  $n = 2, \dots$  などにたまっていく。このやり方だと、パウリの原理は少しその場しのぎに思えるが、実際にはより深遠なものの上に立脚している。もし二つの粒子が完璧に同一だとしたら、波動関数はそれぞれを対等に扱わなければならない。もし誰かが内緒でそれを入れ替えても、物理的な状態は変わらないはずである。この点に基づいて、 $\psi(1,2) = \psi(2,1)$  と結論づけるかもしれないが、それは少しやりすぎだ。物理量は波動関数の2乗で決まるので、われわれが確実にいえるのは  $\psi(1,2) = \pm\psi(2,1)$  ということだ。二つの同一粒子の交換のもつと、波動関数は偶すなわち対称か、奇すなわち反対称のどちらかでなければならない\*18。しかし、そのどちらなのだろうか。非相対論的量子力学では答えは得られず、波動関数が偶であるボソンと奇であるフェルミオンという2種類の粒子が存在するとしかたない。経験則によると、スピン整数の粒子はすべてボソンで、一方、スピン半整数をもつ粒子はフェルミオンだ。場の量子論が成し遂げた重要な成果の一つが、この「スピンと統計」との関係の厄介な証明であった。

ボソン (スピン整数)  $\Rightarrow$  対称な波動関数:  $\psi(1,2) = \psi(2,1)$

フェルミ粒子 (スピン半整数)  $\Rightarrow$  反対称な波動関数:  $\psi(1,2) = -\psi(2,1)$

それぞれ  $\psi_\alpha$  と  $\psi_\beta$  の状態にいる二つの粒子があるとしよう。もしそれらの区別がつくとしたら (たとえば、ミュー粒子と電子)、どちらが状態  $\psi_\alpha$  でどちらが状態  $\psi_\beta$  であるかを問うことに意味がある。もし粒子1が  $\psi_\alpha$  で2が  $\psi_\beta$  なら、その系の波動関数は

$$\psi(1,2) = \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)$$

であり、その逆なら

$$\psi(1,2) = \psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)$$

である。しかし、その二つの粒子を区別できない場合は、どちらがどの状態かをいえない。二つの粒子が同一のボソンなら、波動関数は対称な組み合わせ

\*18  $|\psi(1,2)|^2 = |\psi(2,1)|^2$  からは、 $\psi(1,2) = e^{i\phi}\psi(2,1)$  しか導けない。しかし、粒子の交換を2回行くと元の状態に戻ることから、 $e^{2i\phi} = 1$  であり、ゆえに  $e^{i\phi} = \pm 1$  である。

$$\psi(1, 2) = (1/\sqrt{2})[\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) + \psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)] \quad (5.56)$$

となり、同一のフェルミオンなら、波動関数は反対称な組み合わせ

$$\psi(1, 2) = (1/\sqrt{2})[\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) - \psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)] \quad (5.57)$$

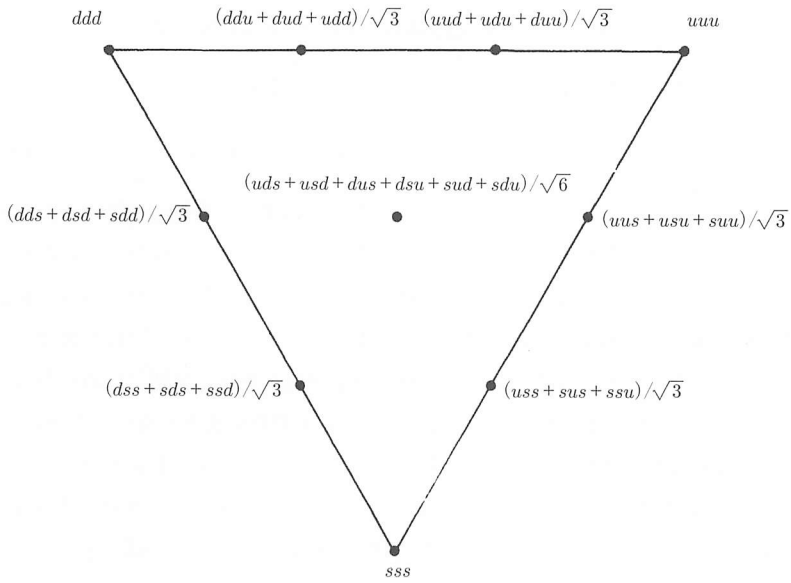
となる。とくに、もし二つのフェルミオン（たとえば電子）を同じ状態（ $\psi_\alpha = \psi_\beta$ ）に入れようとするときとゼロになってしまう。つまり、そうできないのだ。これがパウリの排他原理の起源だ。もはやそれはその場しのぎの仮定ではなく、むしろ同一粒子の波動関数の構成による要請からの帰結だとわかる。ところで、パウリの原理はボソンには適用されないことに注意しよう。多数のパイ中間子を同じ状態に詰め込むことができる。また、区別可能な粒子に対してはいかなる対称性の要求もない。だからこそ、中間子の波動関数を構築したときに対称性についての心配をする必要がなかったのだ（なぜなら、構成粒子の一つがクォークで、もう一つが反クォークであり、それらはつねに区別可能だ）。しかし、バリオンの場合は、三つのクォークを一緒にまとめようとしていて、今度は反対称性の要請を考慮に入れねばならない。

さて、バリオンの波動関数はいくつかの部分からできている。3個のクォークの位置を記述する空間部分、それらのスピンを表現するスピン部分、 $u$ ,  $d$ ,  $s$ のどのような組み合わせが含まれているのかを示すフレーバー部分、そして、クォークのカラーを指定する項がある。

$$\psi = \psi(\text{空間})\psi(\text{スピン})\psi(\text{フレーバー})\psi(\text{カラー}) \quad (5.58)$$

この波動関数がいかなる二つのクォークの交換のもとでも反対称になるようにすればよい\*19。空間部分に対する基底状態の関数形をわれわれは知らないが、それは確実に対称である。 $l = l' = 0$ なので、角度依存性は存在しないからだ。スピンの状態は完全な対称（ $j = 3/2$ ）か、混合状態（ $j = 1/2$ ）だ。フレーバーに関しては、 $uuu$ ,  $uud$ ,  $udu$ ,  $udd$ , ...,  $sss$ など  $3^3 = 27$ 通りの可能性があり、それらを対称、反対称、混合の組み合わせに振り分ける。それらは、スピンの組み合わせが  $SU(2)$  表現を形成するのとちょうど同様に、 $SU(3)$ の既約表現を形成する。八道節のパターンで表現すると便利だ。

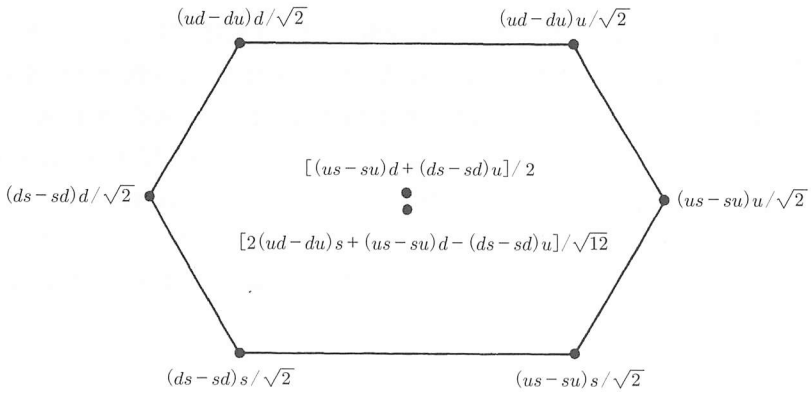
\*19 「同一粒子」という用語に対するかなりの拡張があることに注意してほしい。というのは、カラーやフレーバーさえも無視して、すべてのクォークを1種類の粒子の異なる状態として取り扱っているからだ。



$\psi_s$  : 完全に対称な状態

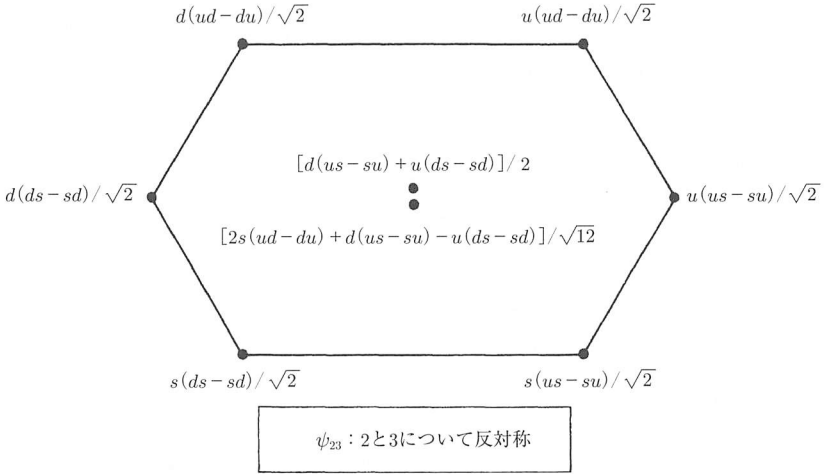
$(uds - usd + dsu - dus + sud - sdu) / \sqrt{6}$

$\psi_A$  : 完全に反対称な状態



$\psi_{12}$  : 1と2について反対称

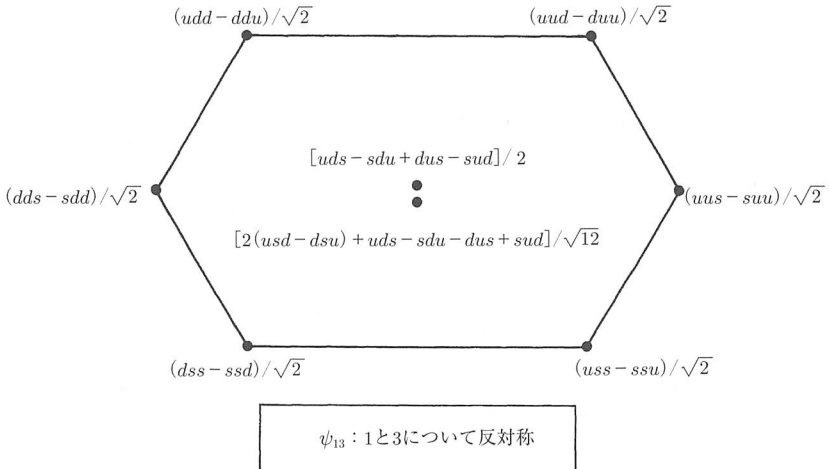




それゆえ、3個の軽いクォークの組み合わせは十重項と一重項と二つの八重項を生む\*20。群論の言葉では、SU(3)の基本表現三つの直積は、ルールに従うと

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \tag{5.59}$$

と分解される。ところで、1と3について反対称な八重項も構築できるが、これは独立ではない ( $\psi_{13} = \psi_{12} + \psi_{23}$ )。これで、四つの表現10, 8, 8, 1をつくるのに使える27個の状態をすべて使った。



\*20 八重項 (と九重項) の図でいつもそうであるように、中心の上側にアイソ三重項 ( $\Gamma \Sigma^0$ ) を下側にアイソ一重項 ( $\Gamma \Lambda$ ) を置いている。

最後に、カラーに関する問題がある。1章では、自然界に存在するすべての粒子は無色であるという一般論を述べた。中間子が赤のクォークをもっていたら、その中間子は反赤クォークもたねばならず、すべてのバリオンがそれぞれのカラー一つずつを含まねばならない。実際のところ、これは、深遠な法則の単純な定式化だ。

自然界に存在するあらゆる粒子はカラーの一重項である。

三つの軽いクォークのフレーバーがフレーバーに関する  $SU(3)$  を生成したのとちょうど同じように、三つのカラーはカラーについての  $SU(3)$  対称性を生成する（後者は完全に対称だ。異なるカラーのクォークは同じ重さだ。一方で、前者は近似的でしかない）。三つのカラーをひとまとめにすると、カラー十重項一つ、カラー八重項二つ、そしてカラー一重項一つを得る（たんに、先のダイアグラムで  $u \rightarrow$  赤,  $d \rightarrow$  緑,  $s \rightarrow$  青という、フレーバー  $\rightarrow$  カラーの置き換えをすればよい）。しかし、自然は一重項を選ぶので、バリオンに対するカラーの状態はいつも

$$\psi(\text{カラー}) = (rgb - rbg + gbr - grb + brg - bgr)/\sqrt{6} \quad (5.60)$$

になる。

カラーの波動関数はすべてのバリオンで同じなため、通常は面倒なのでそれを含めない。しかし、 $\psi(\text{カラー})$  が反対称であることを絶対に忘れてはならない。一方で、残りの波動関数は対称でなければならない。とりわけ、基底状態では、 $\psi(\text{空間})$  が対称であるので、 $\psi(\text{スピン})$  と  $\psi(\text{フレーバー})$  の積は、完璧に対称でなければならない。対称なスピンの配位から始めるとしよう。するとフレーバーについて対称でなければならないので、以下のスピン  $3/2$  のバリオン十重項を得る。

$$\psi(\text{バリオン十重項}) = \psi_s(\text{スピン})\psi_s(\text{フレーバー}) \quad (5.61)$$

例題 5.1 スピン状態  $m_j = -(1/2)$  の  $\Delta^+$  の波動関数を書け（空間とカラー成分は気にしないでよい）。

答え：

$$\begin{aligned} \left| \Delta^+ : \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle &= \{(uud + udu + duu)/\sqrt{3}\} \{(\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow)/\sqrt{3}\} \\ &= [u(\downarrow)u(\downarrow)d(\uparrow) + u(\downarrow)u(\uparrow)d(\downarrow) + u(\uparrow)u(\downarrow)d(\downarrow) \\ &\quad + u(\downarrow)d(\downarrow)u(\uparrow) + u(\downarrow)d(\uparrow)u(\downarrow) + u(\uparrow)d(\downarrow)u(\downarrow)] \end{aligned}$$

$$+ d(\downarrow)u(\downarrow)u(\uparrow) + d(\downarrow)u(\uparrow)u(\downarrow) + d(\uparrow)u(\downarrow)u(\downarrow)]/3$$

たとえば、もし粒子をばらばらにすることができたら、最初のクォークがスピン上向きの  $d$  である確率が  $1/9$  で、スピン下向きの  $u$  クォークである確率が  $4/9$  だ。

バリオン八重項は少しトリッキーだ。というのは、完全に対称な組み合わせをつくるには、対称性が混じり合っている状態を集めなければならないからだ。まず気づかなければならないのは、二つの反対称な関数の積は対称だということだ。ゆえに、 $\psi_{12}(\text{スピン}) \times \psi_{12}(\text{フレーバー})$  は 1 と 2 について対称だ。なぜなら、 $1 \leftrightarrow 2$  で、二つのマイナスの符号を拾い出すからだ。同様に、 $\psi_{23}(\text{スピン}) \times \psi_{23}(\text{フレーバー})$  は 2 と 3 について対称で  $\psi_{13}(\text{スピン}) \times \psi_{13}(\text{フレーバー})$  は 1 と 3 について対称である。これらを足し上げると、その結果はすべての三つについてあきらかに対称である（規格化因子については問題 5.16 を見よ）。

$$\begin{aligned} \psi(\text{バリオン八重項}) &= (\sqrt{2}/3)[\psi_{12}(\text{スピン})\psi_{12}(\text{フレーバー}) \\ &\quad + \psi_{23}(\text{スピン})\psi_{23}(\text{フレーバー}) \\ &\quad + \psi_{13}(\text{スピン})\psi_{13}(\text{フレーバー})] \end{aligned} \quad (5.62)$$

例題 5.2 スピン上向きの陽子の波動関数のスピンとフレーバーに関する部分を書け。

答え：

$$\begin{aligned} \left| p : \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= \left\{ \frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow)(udu - duu) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow)(uud - udu) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow)(uud - duu) \right\} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ &= \{ uud(2\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\ &\quad + udu(2\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow) \\ &\quad + duu(2\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) \} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{3\sqrt{2}}(u(\uparrow)u(\uparrow)d(\downarrow)) \\ &\quad - \frac{1}{3\sqrt{2}}(u(\uparrow)u(\downarrow)d(\uparrow)) \\ &\quad - \frac{1}{3\sqrt{2}}(u(\downarrow)u(\uparrow)d(\uparrow)) + \text{置換したもの} \end{aligned}$$

この例題から、特別なことがなければ、クォーク模型におけるバリオンの波動関数

を構築するのは簡単ではない、ということを読んでほしい。波動関数の空間部分を除いても、スピンを三つ、フレーバーを三つ、そしてカラーを三つ取り扱わなければならない、それらすべてをパウリの排他律と矛盾がないように組み立てなければならないのだ。三つのクォークからどのようにバリオン八重項をつくるのかの説明が変わってしまったことを（1章では単純にクォークを数え上げることによって十重項をつくった）、許してほしい。重要なのは、十重項の頂点には三つの同じクォーク ( $uuu$ ,  $ddd$ ,  $sss$ ) が必要だということだ。それらは必ずフレーバーについて対称なので、スピンについて対称な状態 ( $j = 3/2$ ) でなければならない。二つ同じクォークがあると（たとえば  $uud$ ）、3種類の配位 ( $uud$ ,  $udu$ ,  $duu$ ) が可能だ。この配位から対称な線形結合をつくるとそれらは十重項の中に入り、二つの対称の混ざり合った状態をつくると  $SU(3)$  八重項に属する。最後に、三つすべて異なる場合、つまり  $uds$  には6個の可能性がある。完全に対称な線形結合が十重項を完成させ、完全に反対称な組み合わせが  $SU(3)$  一重項をつくり、残りの四つが二つの八重項に入る。（隠れているとしても）これらすべてにおいて果たしているカラーの本質的な役割にもう一度注意してほしい。カラーがなかったとしたら、反対称なスピンあるいはフレーバーの波動関数を探すことになる。スピン  $3/2$ （対称）は、フレーバーの一重項（反対称）と一緒にならなければならない。カラーがなくてもスピン  $1/2$  の八重項をつくることは可能だが（問題 5.18）、十重項のところにはスピン  $3/2$  のバリオンがたった一つしかないことになってしまう。カラーが導入された最初の理由は、パウリの排他原理をそのままにこの大問題を避けるためであった。

## 5.6.2 磁気モーメント

バリオンのスピンおよびフレーバーの波動関数の応用として、八重項に属する粒子の磁気双極子モーメントを計算してみる。軌道運動がないことから、バリオンの正味の磁気モーメントは、単純に三つの構成クォークの磁気モーメントのベクトル和

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2 + \boldsymbol{\mu}_3 \quad (5.63)$$

となる。これは、クォークのフレーバーと（三つのフレーバーは異なる磁気モーメントをもっている）、スピンの配位に（それによって三つの極の相対的な向きが決まるから）依存する。わずかな放射補正を置いておくと、スピン  $1/2$ 、電荷  $q$ 、質量  $m$  をもつ点状粒子の磁気モーメントは（式 (5.18)）、

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{mc} \mathbf{S} \quad (5.64)$$

で、その大きさは、

$$\mu = \frac{q\hbar}{2mc} \quad (5.65)$$

である。より正確には、これは、 $S_z = \hbar/2$  をもつスピン上向き状態の  $\mu_z$  の値である。慣習的に  $\boldsymbol{\mu}$  (太字) 自身ではなく、 $\mu$  が粒子の「磁気モーメント」とよばれている。クォークに対しては以下になる。

$$\mu_u = \frac{2}{3} \frac{e\hbar}{2m_u c}, \quad \mu_d = -\frac{1}{3} \frac{e\hbar}{2m_d c}, \quad \mu_s = -\frac{1}{3} \frac{e\hbar}{2m_s c} \quad (5.66)$$

すると、バリオン  $B$  の磁気モーメントは

$$\mu_B = \langle B\uparrow | (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)_z | B\uparrow \rangle = \frac{2}{\hbar} \sum_{i=1}^3 \langle B\uparrow | (\mu_i S_{iz}) | B\uparrow \rangle \quad (5.67)$$

となる。

例題 5.3 陽子の磁気モーメントを計算せよ。

答え：波動関数は例題 5.2 で見出した。第 1 項は

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} [u(\uparrow)u(\uparrow)d(\downarrow)]$$

である。ここで

$$\begin{aligned} & (\mu_1 S_{1z} + \mu_2 S_{2z} + \mu_3 S_{3z}) |u(\uparrow)u(\uparrow)d(\downarrow)\rangle \\ &= \left[ \mu_u \frac{\hbar}{2} + \mu_u \frac{\hbar}{2} + \mu_d \left( -\frac{\hbar}{2} \right) \right] |u(\uparrow)u(\uparrow)d(\downarrow)\rangle \end{aligned}$$

なので、この項の寄与は

$$\left( \frac{2}{3\sqrt{2}} \right)^2 \frac{\hbar}{2} \sum \langle u(\uparrow)u(\uparrow)d(\downarrow) | (\mu_i S_{iz}) | u(\uparrow)u(\uparrow)d(\downarrow) \rangle = \frac{2}{9} (2\mu_u - \mu_d)$$

になる。同様に、第 2 項  $(u(\uparrow)u(\downarrow)d(\uparrow))$  は  $(1/18)\mu_d$  を与え、第 3 項もまた同じ寄与を与える\*21。すべての 9 個の項について同様のやり方を続けていけばよいが、残りは単純に置換して、 $d$  が位置 2 あるいは 1 を占有する。すると、その結果は、

\*21 すべてが規格化されていること、たとえば、 $\langle u(\uparrow)u(\uparrow) \rangle = 1$  になるように規格化されていること、そして、状態は互いに直交していること  $\langle u(\uparrow)u(\downarrow) \rangle = 0$  に注意せよ。

表 5.5 バリオン八重項に属するバリオンの磁気双極子モーメント

バリオン	モーメント	予測値	実測値
$p$	$\left(\frac{4}{3}\right)\mu_u - \left(\frac{1}{3}\right)\mu_d$	2.79	2.793
$n$	$\left(\frac{4}{3}\right)\mu_d - \left(\frac{1}{3}\right)\mu_u$	-1.86	-1.913
$\Lambda$	$\mu_s$	-0.58	-0.613
$\Sigma^+$	$\left(\frac{4}{3}\right)\mu_u - \left(\frac{1}{3}\right)\mu_s$	2.68	2.458
$\Sigma^0$	$\left(\frac{2}{3}\right)(\mu_u + \mu_d) - \left(\frac{1}{3}\right)\mu_s$	0.82	?
$\Sigma^-$	$\left(\frac{4}{3}\right)\mu_d - \left(\frac{1}{3}\right)\mu_s$	-1.05	-1.160
$\Xi^0$	$\left(\frac{4}{3}\right)\mu_s - \left(\frac{1}{3}\right)\mu_u$	-1.40	-1.250
$\Xi^-$	$\left(\frac{4}{3}\right)\mu_s - \left(\frac{1}{3}\right)\mu_d$	-0.47	-0.651

数値は、原子核の磁気モーメント  $e\hbar/2m_p c$  の何倍かを表す。(出典: Particle Physics Booklet (2006))

$$\mu_p = 3 \left[ \frac{2}{9}(2\mu_u - \mu_d) + \frac{1}{18}\mu_d + \frac{1}{18}\mu_d \right] = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d)$$

となる。

このようにして、すべての八重項の磁気モーメントを  $\mu_u$ ,  $\mu_d$ ,  $\mu_s$  を使って計算し、表すことができる(問題 5.19)。結果は、表 5.5 の第 2 列にリストアップされている。実際の数値を求めるには、クォークの磁気モーメントを知る必要がある(式 (5.66))。構成クォークの質量として  $m_u = m_d = 336 \text{ MeV}/c^2$  と  $m_s = 538 \text{ MeV}/c^2$  を使うと、表 5.5 の第 3 列の値を得る。クォーク質量の不定性を勘案すると、実験との比較はそれなりによい。比を取ると、何がしかのよりよい予言値を得ることができる。とりわけ、 $m_u = m_d$  という制約のもとでは

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3} \quad (5.68)$$

を得る。これは実測値  $-0.68497945 \pm 0.0000058$  とよい一致をしている。

### 5.6.3 質量

最後はバリオンの質量の問題だ。状況は中間子のときと同じである。もしフレーバー  $SU(3)$  が完全な対称性であれば、八重項に属するすべてのバリオンは同じ質量をもつだろう。しかし、そうはなっていない。まず  $s$  クォークが  $u$  や  $d$  よりもはるかに重いという事実のせいにしようとするが、それだけの話ではない。さもなければ、 $\Lambda$  は  $\Sigma$

と同じ重さになってしまうし、 $\Delta$ も陽子と同じ重さになってしまう。あきらかに、「超微細」スピン-スピン相互作用による大きな寄与があり、それは以前と同じく、スピンの内積に比例し、質量の積に反比例する。唯一の違いは、今度は、考えるべきスピン対が三つあることである。

$$M(\text{バリオン}) = m_1 + m_2 + m_3 + A' \left[ \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2}{m_1 m_2} + \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3}{m_1 m_3} + \frac{\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3}{m_2 m_3} \right] \quad (5.69)$$

ここで、 $A'$ は(式(5.48)の $A$ と同様に)、データとの一致が最適化になるように調整するための定数である。

三つのクォークの質量が等しいときは、スピンの積は最も簡単で

$$J^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3)^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3) \quad (5.70)$$

なので、

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 &= \frac{\hbar^2}{2} \left[ j(j+1) - \frac{9}{4} \right] \\ &= \begin{cases} 3/4\hbar^2, & j = 3/2 \text{ (十重項)} \\ -3/4\hbar^2, & j = 1/2 \text{ (八重項)} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.71)$$

となる。よって、核子(中性子か陽子)の質量は

$$M_N = 3m_u - \frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{m_u^2} A' \quad (5.72)$$

であり、 $\Delta$ は

$$M_\Delta = 3m_u + \frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{m_u^2} A' \quad (5.73)$$

であり、 $\Omega^-$ は

$$M_\Omega = 3m_s + \frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{m_s^2} A' \quad (5.74)$$

となる。十重項の場合、スピンはすべて「平行」(すべての対がスピン1になるように組み合わせられる)なので、

$$(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = 2\hbar^2 \quad (5.75)$$

となる(1と3, 2と3についても同様)。ゆえに十重項に対しては、

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 = \frac{\hbar^2}{4} \quad (5.76)$$

であり (式 (5.71) と整合性のあることに注意せよ), よって,

$$M_{\Sigma^*} = 2m_u + m_s + \frac{\hbar^2}{4} A' \left( \frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_u m_s} \right) \quad (5.77)$$

となる一方,

$$M_{\Xi^*} = m_u + 2m_s + \frac{\hbar^2}{4} A' \left( \frac{2}{m_u m_s} + \frac{1}{m_s^2} \right) \quad (5.78)$$

である.

$\Sigma$  と  $\Lambda$  については, それぞれのアイソスピンが 1 と 0 になるようにアップとダウンクォークを組み合わせればよい.  $u$  と  $d$  の入れ替えに対してスピンあるいはフレーバーの波動関数が対称になるためには, それぞれのスピン合計が 1 と 0 になるように組み合わせればよい. すると  $\Sigma$  に対しては,

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_d)^2 &= S_u^2 + S_d^2 + 2\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d = 2\hbar^2 \\ \text{よって } \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d &= \frac{\hbar^2}{4} \end{aligned} \quad (5.79)$$

となり, 一方  $\Lambda$  に対しては

$$(\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_d)^2 = 0 \quad \text{よって} \quad \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d = -\frac{3}{4}\hbar^2 \quad (5.80)$$

となる. これらの結果を式 (5.71) と一緒に使うと,

$$\begin{aligned} M_{\Sigma} &= 2m_u + m_s + A' \left[ \frac{\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d}{m_u m_d} + \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d}{m_u m_s} \right] \\ &= 2m_u + m_s + \frac{\hbar^2}{4} A' \left( \frac{1}{m_u^2} - \frac{4}{m_u m_s} \right) \end{aligned} \quad (5.81)$$

そして,

$$M_{\Lambda} = 2m_u + m_s - \frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{m_u^2} A' \quad (5.82)$$

となることがわかる.  $\Xi$  の質量については読者に算出してもらいたい (問題 5.22).

$$M_{\Xi} = 2m_s + m_u + \frac{\hbar^2}{4} A' \left( \frac{1}{m_s^2} - \frac{4}{m_u m_s} \right) \quad (5.83)$$

構成クォークの質量として,  $m_u = m_d = 363 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_s = 538 \text{ MeV}/c^2$ , そして,  $A' = (2m_u/\hbar)^2 50 \text{ MeV}/c^2$  を使うと, 実験値との素晴らしい一致を得る (表 5.6)\*22.

\*22 しかしながら, 表 4.4 の脚注で注意を与えたように, 表 5.3, 5.5, 5.6 それぞれでわずかに異なるクォーク質量値を使わなければならないことに留意しよう.



表 5.6 バリオン八重項と十重項の質量 (MeV/c<sup>2</sup>)

バリオン	計算値	実測値
N	939	939
Λ	1114	1116
Σ	1179	1193
Ξ	1327	1318
Δ	1239	1232
Σ*	1381	1385
Ξ*	1529	1533
Ω	1682	1672

## 参 考 書

- [1] 量子力学に精通していない読者は、適切な教科書で背景を学び、ここで示された計算の詳細について補習する必要がある。たとえば、D. Park: Introduction to the Quantum Theory, 3rd edn (McGraw-Hill, 1992); (a) J. S. Townsend: A Modern Approach to Quantum Mechanics (University Science Books, 2000); (b) D. J. Griffiths: Introduction to Quantum Mechanics, 2nd edn (Prentice Hall, 2005).
- [2] 19世紀半ばから現在までの水素スペクトルの実験的研究の魅力的な説明は、T. W. Hänsch, A. L. Schawlow, and G. W. Series: Scientific American, 94 (March 1979).
- [3] たとえば、D. J. Griffiths: Introduction to Electrodynamics, 3rd edn (Prentice Hall, 1999) Problem 5.56.
- [4] 計算は、T. Kinoshita and M. Nio: Physical Review, D **73**, 013003 (2006); 測定は、(a) B. Odom *et al.*: Physical Review Letters, **97**, 030801 (2006).
- [5] W. E. Lamb Jr. and R. C. Retherford: Physical Review, **72**, 241 (1947).
- [6] 電磁場の普通のモードは振動子であるが、量子力学において、調和振動子の基底状態のエネルギーはゼロではなく、 $(1/2)\hbar\omega$ である。J. D. Bjorken and S. D. Drell: Relativistic Quantum Mechanics (McGraw-Hill, 1964) 58.
- [7] 詳細は、H. A. Bethe and E. E. Salpeter: Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms (Plenum, 1977) Sect. 21.
- [8] H. A. Bethe and E. E. Salpeter: Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms (Plenum, 1977) 110.
- [9] 水素の基底状態での超微細分離のわかりやすい記述については、D. J. Griffiths: American Journal of Physics, **50**, 698 (1982).
- [10] H. I. Ewen and E. M. Purcell: Nature, **168**, 356 (1951).
- [11] ポジトロニウムのスペクトルが議論されているのは、H. A. Bethe and E. E. Salpeter: Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms (Plenum, 1977) Sect. 21, 23. 以下も参照。(a) S. Berko and H. N. Pendleton: Annual Review of Nuclear and Particle Science, **30**, 543 (1980); (b) A. Rich: Reviews of Modern Physics, **53**, 127 (1981).
- [12] 微細構造の詳細は、ポジトロニウムのようなクォーコニウムとまったく同じではない。E. Eichten and F. Feinberg: Physical Review Letters, **43**, 1205 (1979); Physical Review, D **23**, 2724 (1981).
- [13]  $F_0$ を推定する他の方法もあるが、おおよそ同じ答えが得られる。D. H. Perkins: Introduction to High Energy Physics, 4th edn (Cambridge University Press, 2000) Section 6.3.

- [14] T. Appelquist and H. D. Politzer: *Physical Review Letters*, **34**, 43 (1975); *Physical Review*, D **12**, 1404 (1975).
- [15] これらの発見の興味深い説明については、以下の記事を参照。E. D. Bloom and G. J. Feldman: *Quarkonium*, *Scientific American*, 66 (May 1982).
- [16] E. Eichten and K. Gottfried: *Physics Letters*, B **66**, 286 (1977).
- [17] ボトモニウムのスペクトルに対する真空分極の効果に関してわかりやすい説明は、J. Conway *et al.*: *European Journal of Physiology*, **22**, 533 (2001).
- [18] 「MIT バッグモデル」は、相対論的な軽いクォークの系に適用可能であるが、ダイナミクスの大幅な単純化という代償を払っている。クォークは、特別な外圧によって安定化される球状の「バッグ」内に閉じ込められた自由粒子として扱われる。バッグモデルを用いて多くの興味深い計算が行われているが、それがハドロン構造の現実的なものであるとは誰も思っていない。以下を参照。F. E. Close: *An Introduction to Quarks and Partons* (Academic, 1979) Chapter 18.
- [19] たとえば、F. Halzen and A. D. Martin: *Quarks and Leptons* (John Wiley & Sons, 1984) 42.
- [20] *Review of Particle Physics* (2006) Section 14.2.
- [21] S. Gasiorowicz and J. L. Rosner: *American Journal of Physics*, **49**, 954 (1981); クォークモデルについての有用でわかりやすい情報が豊富に含まれている。
- [22] A. Pais: *Inward Bound* (Oxford University Press, 1986) 425; 発展に関しては、(a) B. Cassen and E. U. Condon: *Physical Review*, **50**, 846 (1936).

## 問題

- 5.1 (a) 重陽子の質量は  $1875.6 \text{ MeV}/c^2$  である。この粒子の結合エネルギーはいくらか。これは相対論的な系か。
- (b) もしアップクォークとダウンクォークの質量が表 4.4 で与えられているものだとしたら、パイ中間子の結合エネルギーはいくらか。これは相対論的な系か。
- 5.2 式 (5.12) を用いて基底状態の波動関数  $\psi_{100}$  を求めよ。これが適切なエネルギーをもったシュレーディンガー方程式 (式 (5.1)) を満たすか確認せよ。そして、規格化されていることを確認せよ。[答え:  $\psi_{100} = (1/\sqrt{\pi a^3})e^{-r/a}e^{-iE_1 t/\hbar}$ ]
- 5.3 式 (5.12) を使用して、 $n = 2$  の水素の波動関数をすべて計算せよ (いくつあるか)。
- 5.4 式 (3.43) の運動エネルギー ( $T = E - mc^2$ ) を  $p$  (と  $m$ ) で表すと、 $T = p^2/2m$  に対する最低次の相対論的補正は、 $-p^4/8m^3c^2$  となることを示せ。
- 5.5  $n = 2$  における  $j = 3/2$  と  $j = 1/2$  の間のエネルギー差 (図 5.2) を電子ボルトで求めよ。 $n = 2$  と  $n = 1$  のボーアエネルギーの間隔と比較してどうか。
- 5.6 式 (5.20), (5.21) を用いて水素原子の  $2S_{1/2}$  と  $2P_{1/2}$  のラムシフトによるエネルギー差を見積もれ。また、この遷移で放出される光子の周波数はどれくらいだろうか (実験値は  $1057 \text{ MHz}$  である)。
- 5.7 微細構造、ラムシフト、超微細分離を含めると、水素原子の  $n = 2$  のエネルギー準位は全部でいくつあるだろうか。 $2S_{1/2}$  レベルと  $2P_{1/2}$  レベルの間の超微細な分離を見つけ、ラムシフト (問題 5.6) と比較せよ。
- 5.8 ポジトロニウムの  $n = 3$  ボーアレベルの分離を分析する。そこにはいくつの準位があり、その相対的なエネルギーはいくらだろうか。図 5.6 のような単位図を作成せよ。
- 5.9  $\phi(s\bar{s})$  中間子の結合、または準結合を考えられるだろうか。
- 5.10 次元解析から、線形のポテンシャル  $V(r) = F_0 r$  のエネルギー準位は、

$$E_n = \left( \frac{(F_0 \hbar)^2}{m} \right)^{1/3} a_n$$

となることを示せ。 $a_n$  は無次元数である。

- 5.11 表 5.2 の数値結果を使用して、四つの最も軽い  $\psi$  および  $\Upsilon$  の質量を「予測」して、実験結果 (図 5.9) と比較せよ。 $F_0$  の値をどうとれば、質量間隔に最も適すだろうか。計算された質量が実験とあまりよく一致しないのはなぜだろうか。
- 5.12 式 (5.48) を用いて、テキストの  $m_u$ ,  $m_d$ ,  $m_s$ ,  $A$  の値から表 5.3 の中間子の質量を計算せよ。[ヒント:  $\eta$  については、純粋な  $u\bar{u}$ , 純粋な  $d\bar{d}$ , 純粋な  $s\bar{s}$  の質量を最初に見つけて、 $\eta$  は  $(1/6)u\bar{u}$ ,  $(1/6)d\bar{d}$ ,  $(2/3)s\bar{s}$  を用いよ.] そして、公式を  $\eta'$  に適用し、ひどい結果になることを見よ。[ $\eta'$  質量問題の解説については、C. Quigg: Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions (Benjamin, 1997) 252 を見よ.]
- 5.13 本文中では、式 (5.48) を使用して、軽いクォークの擬スカラー中間子とベクトル中間子の質量を計算した。しかし、チャームクォークとビューティクォークを含む重クォーク系にも同じ公式を適用できる。
- (a) 擬スカラー中間子  $\eta_c(c\bar{c})$ ,  $D^0(c\bar{u})$ ,  $D_s^+(c\bar{s})$  の質量と対応するベクトル中間子  $\psi(c\bar{c})$ ,  $D^{*0}(c\bar{u})$ ,  $D^{*+}(c\bar{s})$  の質量を計算せよ。そして、Particle Physics Booklet の実験値と比較せよ。
- (b) 「ボトム」中間子  $u\bar{b}$ ,  $s\bar{b}$ ,  $c\bar{b}$ ,  $b\bar{b}$  についても同様な計算を行え。現時点では擬スカラー粒子  $B^+(u\bar{b})$ ,  $B_s^0(s\bar{b})$ ,  $B_c^+(c\bar{b})$  とベクトル粒子の  $\Upsilon(b\bar{b})$  だけが実験的に見つかっている。
- 5.14 5.6.1 項の  $\psi_{12}$  の八つの状態を構築せよ。[ヒント: 六つの外側のものは簡単で、クォークの自身は  $Q$  と  $S$  で決まっており、1 と 2 をすべて反対称化するだけでよい。中央の二つの状態を得るには、 $\Sigma^0$  の位置にあるものが  $\Sigma^+$  と  $\Sigma^-$  とアイソ三重項を形成することを忘れないこと。また、 $\Lambda$  は、 $\Sigma^0$  と  $\psi_A$  に対して直交化することで構築できる.]
- 5.15 式 (5.60) の類推で中間子の (一重項) カラーの波動関数を構築せよ。
- 5.16 バリオン八重項のスピン-フレーバー波動関数 (式 (5.60)) が正しく規格化されていることを確認せよ。 $\psi_{13}$  が、 $\psi_{12}$  と  $\psi_{23}$  とは独立でないことを忘れないこと。
- 5.17 例題 5.2 のように  $\Sigma^+$  のアップスピンと  $\Lambda$  のダウンスピンのスピン-フレーバー波動関数を構築せよ。
- 5.18 完全反対称のスピン-フレーバー・バリオン八重項を構築せよ (ここでは波動関数を反対称にするため、色の情報はいらぬ。しかしながら、反対称の十重項を構築することができない。Halzen and Martin [19] 問題 2.18 を参照)。
- 5.19 (a) 表 5.5 の 2 列目を導出せよ。  
(b) これらの結果から、表 5.5 の 3 列目の値を本文中のクォーク質量を用いて計算せよ。
- 5.20 問題 5.18 で見つけた配位で  $\mu_n/\mu_p$  比を計算せよ。ここで  $\mu_p$  が負になることに注目。これは実験と一致しているだろうか (これは、色がなかった場合のクォーク模型に対する二つ目の問題である。最初の問題は、十重項を説明できないことである)。
- 5.21  $\mu_{\rho^+} = -\mu_{\rho^-} = \mu_p$  を示せ (Halzen and Martin [19] 問題 2.19 を参照)。私の知る限りではベクトル中間子の磁気双極子はまだ測定されていない。
- 5.22 式 (5.69) を用いて  $\Xi$  の質量を決定せよ。
- 5.23 式 (5.12), (5.13), (5.28) を用いて、ポジトロニウムの基底状態  $|\psi_{100}(0)|^2$  における陽電子の位置での電子密度を計算せよ。