

## 対称性

素粒子物理学では対称性が重要な役割を果たす。というのも、一つには保存則との関連から、そしてもう一つには、運動の理論がまだ完全になっていないときでも、対称性を利用することで何らかの知見を得られるからだ。この章の最初の節では、対称性の数学的描写(群論)に関する一般論と、対称性と保存則(ネーターの定理)を取り扱う。そして次に、回転対称性と角運動量およびスピンとの関連を取り上げる。これにより、アイソスピン、 $SU(3)$ 、そしてフレーバー  $SU(6)$  などの「内部」対称性へつながる。最後に、パリティ、荷電共役、そして時間反転などの、「離散」対称性について考える。後の章で多く使うようになるスピンの理論(4.2節)と、第9章の有用な背景であるパリティに関する4.1節の記述を除いては、読者の好みにより、この章は表面だけを軽く流してもよい(あるいは、深くやってもよい)。私のおすすめは、この段階ではさらっとやり、後で必要になったら特定の節に戻ってくるというものだ。行列理論は多少わかっているものとしている。量子力学に慣れている読者にとっては、角運動量の節はやさしい概論だろう(量子力学をやっていない人にとっては、まったくわからないかもしれない。そのときは、量子力学の初歩的な教科書の対応する章を勉強しよう)。群論については、あきれるほど大雑把に触れている(おもな目的は標準的な用語を紹介することである)ので、素粒子物理学を学ぼうとする真面目な学生は、この話題については、この後にはるかに詳しく勉強する計画を立てるべきだ。

### 4.1 対称性, 群, 保存則

図4.1のグラフを見てほしい。 $f(x)$ の関数形を教えるつもりはないが、これが、 $f(-x) = -f(x)$ という奇関数であることはあきらかだ(もし信じられないならば、その曲線を写し取り、その写しとったものを $180^\circ$ 回転し、それが元の線と完全に一致することを確かめよ)。これからわかるのは、たとえば、

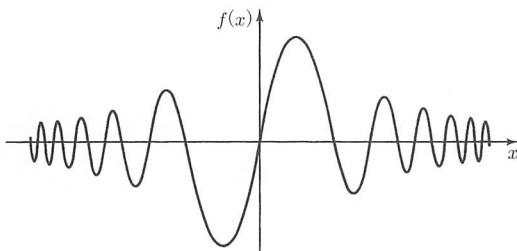


図 4.1 奇関数

$$\begin{aligned} |f(-x)|^6 &= |f(x)|^6, & \int_{-3}^3 f(x)dx &= 0, \\ \frac{df}{dx} \Big|_{+2} &= \frac{df}{dx} \Big|_{-2}, & \int_{-7}^{+7} [f(x)]^2 dx &= 2 \int_0^{+7} [f(x)]^2 dx \end{aligned} \quad (4.1)$$

ということだったり、 $f(x)$  のフーリエ展開にはコサインは現れないということだったり、その関数のテイラー展開は  $x$  の奇数べき乗項しかもたないことだったりする。実際、たとえその関数形を知らなくても、その関数もっている特定の対称性（いまの場合、奇関数ということ）から、 $f(x)$  について非常に多くのことを導き出すことができる。物理では、直観や普遍的な原理が、対称性を示唆することがあり、その対称性を体系的に使うことがきわめて強力な武器になる\*1。

物理における対称性で最もインパクトがあるのは、結晶だと思う。しかし、運動における動的な対称性と違い、形状における静的な対称性にはいまはそれほど興味がない。古代のギリシャ人は、自然の中に現れる対称性は物体の動きに直接反映されるはずだと信じていたらしい。星は円軌道を描かなければならない。なぜなら、円が最も対称的な軌道だからだ。もちろん、惑星は円軌道を描かず、人々を困惑させた（対称性に関する単純な直観が実測と一致しなかったのはこれが最後ではなかった）。ニュートンは、根源的な対称性は個々の物体の運動に現れるのではなく、可能な運動のすべての組み合わせに現れるということ、つまり、対称性は運動方程式に見出されるのであり、運動方程式の個々の解に見出されるのではないということを確認していた。たとえば、ニュートンの万有引力の法則は、球対称であるが（力はすべての方向で同じで

\*1 ある意味、対称性に訴えかけるということは、理論が不完全であることの特徴である。たとえば、もし  $f(x)$  の関数形が、 $f(x) = e^{-x^2} \sin(x^3)$  というように明示的にわかったとしたら、式 (4.1) の法則は輝きを失ってしまう。すべてを知っているときには、部分的な情報を気にする必要はない。しかし、たとえ成熟した理論であったとしても、対称性を考察することでより深い理解に到達したり、計算を簡略化することができる。たとえば、 $f(x)$  を  $-3$  から  $3$  まで積分せよといわれたら、たとえ  $f(x)$  の関数形を知っていたとしても、 $f(x)$  が奇関数だということに注目するはずだ。

表 4.1 対称性と保存則

対称性	保存則
時間の並行移動	⇔ エネルギー
空間の並行移動	⇔ 運動量
回転	⇔ 角運動量
ゲージ変換	⇔ 電荷

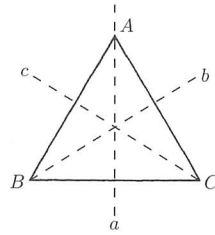


図 4.2 正三角形の対称性

ある), 惑星軌道は楕円になってしまう. それゆえ, われわれは, その系に横たわっている対称性を間接的に認知できるだけである. 実際, 太陽の重力場が球対称で「なければならぬ」ということを知らなかったとしたら, 観測されている惑星軌道がどのようなものかをどうやって発見すればよいのか悩む.

1917年になるまで, 対称性が力学的に示唆している内容は完全には理解されていなかった. その年, エミー・ネーターが対称性と保存則とを結びつける有名な論文を発表した.

ネーターの定理: 対称性  $\iff$  保存則

自然界のあらゆる対称性が保存則を生み出し, 逆に, あらゆる保存則は背後にある対称性を反映している. たとえば, 物理法則は時間の平行移動に関して対称的である (それらが昨日正しかったら, 今日と同じく正しい). ネーターの定理はこの不変性をエネルギー保存と関係づける. もし, ある系が空間における平行移動で不変であれば, 運動量が保存している. もし, ある一点における回転のもとで対称であるなら, 角運動量が保存している. 同様に, ゲージ変換のもとで電気力学が不変なことから, 電荷保存則が導かれる (時空間の対称性とは対照的に, これを内部対称性とよぶ). ネーターの定理を証明することはしない. 詳細はあまり啓発的ではないのだ [1]. 重要なのは, 対称性が保存則と関係づけられるという深遠, かつ美しいアイデアである (表 4.1).

これまでは系統立てずになんとなく対称性について語ってきたし, いくつかの例も取り上げた. しかし, 正確には対称性とは何であろうか. それは, ある系に対して (少なくとも概念的に) 何らかの操作を行ってもその系が変化しないことである. つまり, 何らかの操作の後, 元の状況と区別できないことだ. 図 4.1 の関数の場合, 引数  $x$  の符号を  $-x$  と変え, かつ, 全体に  $-1$  を乗じる操作  $f(x) \rightarrow -f(-x)$  は対称な操作である. より内容の充実した例として, 正三角形を考えてみよう (図 4.2). この三角形

は、時計回りの  $120^\circ$  の回転 ( $R_+$ ) や反時計回りの  $120^\circ$  の回転 ( $R_-$ )、垂直な軸  $a$  でひっくり返す操作 ( $R_a$ )、あるいは軸  $b$  ( $R_b$ ) や軸  $c$  ( $R_c$ ) でひっくり返す操作で、元のかたちに戻る。それで全部だろうか。何にもしないこと ( $I$ ) もあきらかにかたちを変えないので、あまりにも当たり前とはいえ、これも対称操作である。そして、たとえば、 $240^\circ$  時計回りに回すように、これらの操作を組み合わせたことができるかもしれない。しかしこれは反時計周りの  $120^\circ$  の回転と同じだ (すなわち  $R_+^2 = R_-$ )。後でわかるように、正三角形に対する識別可能なあらゆる対称操作をすでに同定している (問題 4.1)。

(ある特定の系における) あらゆる対称操作の一群は以下の特徴をもつ。

1. 閉じていること：もし  $R_i$  と  $R_j$  がその一群に含まれているなら、それらの積 (最初に  $R_j$  を行い、その次に  $R_i$  を行うという操作\*<sup>2</sup>) もまた群に含まれる。つまり、 $R_i R_j = R_k$  となるような  $R_k$  が存在することになる。
2. 単位元の存在：あらゆる要素  $R_i$  に対して、 $I R_i = R_i I = R_i$  となるような元  $I$  が存在する。
3. 逆元の存在：あらゆる要素  $R_i$  に対して、 $R_i R_i^{-1} = R_i^{-1} R_i = I$  となる逆元  $R_i^{-1}$  が存在する。
4. 結合法則： $R_i (R_j R_k) = (R_i R_j) R_k$  が成り立つ。

これらは、数学の「群」を定義する特徴である。実際に、群論は対称性の系統だった研究とみなしてもよい。一般に、群の元は可換ではないこと、 $R_i R_j \neq R_j R_i$  に注意しよう。もしすべての要素が可換なら、その群はアーベル群とよばれる。時空間の移動に関する操作はアーベル群を形成するが、(3次元空間における) 回転操作はアーベル群にならない [2]。群は、(たんに6個の要素をもつ三角形の群のように) 有限か、(たとえば、整数全体が足し算による「加法」に対して群をつくるように) 無限かのどちらかだ。われわれは、(平面上のあらゆる回転群のように) 元が一つあるいは複数の連続的な変数\*<sup>3</sup> (この場合、回転角) による連続群と、元が整数のみの識別子でラベルづけされるような不連続群 (すべての有限群はもちろん不連続だ) とを見ていく。

後にわかるように、物理で興味のあるほとんどの群は行列の群として定式化できる。たとえば、ローレンツ群は、3章で導入された、4行4列の  $\Lambda$  行列からなっている。素粒

\*<sup>2</sup> 順番が逆になっていることに注意せよ。対称操作は系の右側から作用すると考えよう。つまり、 $R_i R_j(\Delta) = R_i [R_j(\Delta)]$  となる。 $R_j$  が最初に作用し、次に、その結果に  $R_i$  が作用する。

\*<sup>3</sup> この依存性が解析的な関数系に従う場合、リー群とよばれる。物理で出合う連続群のすべてはリー群である [3]。



表 4.2 重要な対称群

群の名前	次元	行列
$U(n)$	$n \times n$	ユニタリー ( $U^T U = 1$ )
$SU(n)$	$n \times n$	ユニタリー, かつ行列式 = 1
$O(n)$	$n \times n$	直交 ( $O^T O = 1$ )
$SO(n)$	$n \times n$	直交, かつ行列式 = 1

子物理学では、最もよく使われる群は数学者が  $U(n)$  とよぶものである。  $U(n)$  とは、  $n$  行  $n$  列のすべてのユニタリー行列の集合である (表 4.2), (ユニタリー行列とは、その逆行列が複素転置行列と等しいもの、すなわち  $U^{-1} = U^T$  である)。もし、行列式が 1 のユニタリー行列に話を限ると、その群は  $SU(n)$  とよばれる。(  $S$  は「特別 (special)」の  $S$  であり、たんに「行列式 = 1」を意味する。) もし、実ユニタリー行列に話を限ると、その群は  $O(n)$  となる。(  $O$  は「直交 (orthogonal)」の  $O$  であり、直交行列とはその逆行列が転置行列と等しいもの、つまり、  $O^{-1} = O^T$  である。) そして最後に、  $n \times n$  の実直交行列で行列式が 1 に等しい群は  $SO(n)$  である。  $SO(n)$  は、  $n$  次元空間におけるあらゆる回転を表現する群とみなしてもよい。ゆえに、  $SO(3)$  は、われわれの住む世界の回転対称性を表現する。この対称性はネーターの定理によって角運動量保存と関係づけられる。実際、角運動量の量子理論全体は本当に群論に近い。たまたまではあるが、数学的な構造に関しては  $SO(3)$  は、素粒子物理学上最も重要な内部対称性である  $SU(2)$  とほぼ等しい。なので、次節以降でみるように、角運動量の理論は二つの役目を果たす。

最後にもう一つ。あらゆる群  $G$  は、行列群によって表現される。そしてそのすべての群の元  $a$  に対して、対応する行列  $M_a$  が存在する。その対応関係においては、  $ab = c$  なら  $M_a M_b = M_c$  という意味において、群の掛け算を保存しなければならない。群の表現は必ずしも「忠実」でなくてもよい。同じ行列によって表現される、別の群の多くの元が存在する (数学的には、行列群は  $G$  に対して準同形ではあるが、必ずしも同形である必要はない)。実際、  $1 \times 1$  の単位行列 (つまり数字の 1 だ) によって表現されるという、あきらかなケースがある。もし  $G$  が、  $SU(6)$  あるいは  $O(18)$  のような行列の群のときは、これは (あきらかに) 自身の表現になっている。これを基本表現とよぶ。しかし、一般には、さまざまな次元の行列による別の表現が存在するだろう。たとえば、  $SU(2)$  には、次元 1 (あきらかなもの)、次元 2 (行列自身)、次元 3, 4, 5, そして実際にはあらゆる正の整数次元がある。群論における主要な問題は、与えられた群のすべての表現の分類である。

もちろん、二つの表現を組み合わせることでいつも新しい表現を構築することがで

きる。それゆえ、

$$M_a = \begin{bmatrix} M_a^{(1)} & (\text{ゼロ}) \\ (\text{ゼロ}) & M_a^{(2)} \end{bmatrix}$$

も可能だ。しかし、これを数えたりはしない。というのは、群の表現をリストにして整理する場合、対角行列のブロックに分解できない、いわゆる既約表現だけについて考える。実際のところ、たぶん実感せずに、すでにいくつかの群の表現の例に出合ってきた。普通のスカラーは回転群の1次元の表現に属しているし、 $SO(3)$ とベクトルは3次元表現に属している。4元ベクトルはローレンツ群の4次元の表現に属しているし、ゲルマンの八道説の幾何学的に興味深い配置は $SU(3)$ 群の既約表現に対応している。

## 4.2 角運動量

地球は、その運動において、2種類の角運動量をもっている。太陽の周りの公転に伴う  $rmv$  の大きさをもつ軌道角運動量と、地軸を中心とした自転に伴う  $I\omega$  のスピン角運動量だ。同じことが水素原子中の電子にもいえて、軌道角運動量とスピン角運動量の両方をもつ。この二つの運動量の違いは、巨視的に見た場合はあまり重要ではない。結局のところ、地球のスピン角運動量は、地球をつくっている岩や土すべての地軸周りの軌道角運動量の総和にすぎない。電子の場合は、この解釈はあまりよろしくない。われわれの知る限り、電子は真に点状の粒子であり、スピン角運動量を地軸周りに回転している構成物のせいにはすることができない。それはたんに粒子がもつ固有の性質なのだ（問題4.8）。

古典的には、軌道角運動量ベクトル  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$  の三つすべての成分を、いかなる精度で測定することも可能で、これらの値はどんな値も取り得る。しかし、量子力学では、三つの成分を同時に測定することは原理的に不可能だ。たとえば、 $L_x$  の測定は必然的に  $L_y$  の値を予期せぬ量だけ変化させてしまう。われわれができる最善は、一つの成分（慣例として  $z$  成分である  $L_z$  とする）とともに、 $\mathbf{L}$  の大きさを測定することだ（あるいは、その2乗、 $L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}$ ）。さらに、これらの測定で得られるのは「許容される」値にすぎない\*4。具体的には、（ちゃんとした） $L^2$  の測定は、つねに、

\*4 角運動量に対する量子化法則を証明するつもりはない。もしここでの内容に触れたことがないのであれば、量子力学の教科書を読む方がよい。ここでやろうと提案しているすべては、後に必要となる本質的な結果のまとめである。

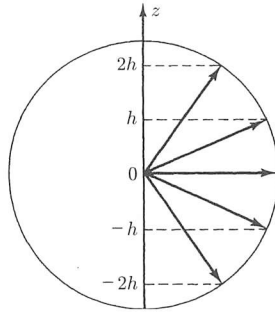


図 4.3  $l = 2$  に対する、あり得る角運動量の方向

$$l(l+1)\hbar^2 \quad (4.2)$$

に従う数値になる。ここで、 $l$  は負ではない整数

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

である。ある値  $l$  に対して、 $L_z$  の測定はつねに

$$m_l \hbar \quad (4.4)$$

というかたちの値になる。ここで、 $m_l$  は  $-l$  から  $+l$  までの間の整数

$$m_l = -l, -l+1, \dots, -1, 0, +1, \dots, l-1, l \quad (4.5)$$

であり、 $(2l+1)$  通りの可能性がある。図 4.3 は、いまの状況を視覚化するのに役立つかもしれない。ここでは、 $l=2$  なので  $L$  の大きさは  $\sqrt{6}\hbar = 2.45$  になっている。 $L_z$  は、 $2\hbar$ ,  $\hbar$ ,  $0$ ,  $-\hbar$ ,  $-2\hbar$  と仮定してよい。角運動量ベクトルは、完全には  $z$  の方向を向くことができないことに注意せよ。

同じことがスピン角運動量についてもいえる。 $S^2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}$  の測定で得られる値は、

$$s(s+1)\hbar^2 \quad (4.6)$$

のかたちになっている。しかしスピンの場合は、量子数  $s$  は、整数だけでなく半整数も取り得る。

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots \quad (4.7)$$

ある値  $s$  に対して、 $S_z$  の測定では

表 4.3 スピンによる粒子の分類

ボソン (スピン整数)		フェルミオン (スピン半整数)		
スピン 0	スピン 1	スピン 1/2	スピン 3/2	
—	力の媒介粒子	クォークとレプトン	—	← 素粒子
擬スカラー中間子	ベクトル中間子	バリオン八重項	バリオン十重項	← 複合粒子

$$m_s \hbar \tag{4.8}$$

というかたちの値を取る。ここで、 $m_s$  は ( $s$  が何であれ)  $-s$  から  $s$  までの間の整数、あるいは半整数

$$m_s = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s \tag{4.9}$$

であり、 $(2s + 1)$  通りの可能性がある。

さて、ある粒子に対してどのような軌道角運動量  $l$  を割り振ることも可能だが、 $s$  はそれぞれの粒子の種類によって決まった値しかとれない。たとえば、あらゆるパイ中間子や  $K$  中間子は  $s = 0$  をもつし、あらゆる電子、陽子、中性子、そしてクォークは  $s = 1/2$  をもつ。  $\rho$  や、  $\psi$  や、光子や、グルーオンは  $s = 1$  だ。そして、  $\Delta$  や  $\Omega^-$  は  $s = 3/2$  などとなる。  $s$  のことを「スピン」とよぶ。スピンの半整数の粒子はフェルミオンである。すべてのバリオン、レプトン、そしてクォークはフェルミオンだ。スピンの整数の粒子はボソンである。すべての中間子と力の媒介粒子はボソンだ (表 4.3)\*<sup>5</sup>。

### 4.2.1 角運動量の足し算

角運動量の状態は、  $|l m_l\rangle$  あるいは  $|s m_s\rangle$  という「ケット」で表現される。よって、水素原子中の電子が、軌道  $|3 -1\rangle$ 、スピン  $|1/2 1/2\rangle$  の状態を占めている場合、  $l = 3$ 、  $m_l = -1$ 、  $s = 1/2$  (もちろんこれは必要はない。もし電子ならば  $s$  は  $1/2$  でなければならない。)、そして  $m_s = 1/2$  という状態のことをいう。さて、スピンと軌道角運動量別々ではなく、合計の角運動量  $\mathbf{L} + \mathbf{S}$  の方に興味をもつ場合があるかもしれない ( $\mathbf{L}$  と  $\mathbf{S}$  の間に結合がある場合、地球と太陽の系では潮による結合、電子陽子系なら磁場による結合、保存するのは、  $\mathbf{L}$  と  $\mathbf{S}$  個別ではなく、それらの和だ)。あるいは

\*<sup>5</sup> 「フェルミオン」と「ボソン」という用語は、同一粒子の波動関数を合成する際のルールに基づいている。ボソンの波動関数は、いかなる 2 粒子の交換に対しても対称であり、フェルミオンの波動関数は反対称だ。この事実がフェルミオンがもつパウリの排他原理を説明し、それらの二つのタイプの粒子の統計力学における深遠な違いを引き起こす。「スピンと統計との接合」(すべてのフェルミオンが半整数のスピンをもち、すべてのボソンが整数のスピンをもつこと) は、場の量子論における意味深い定理である。

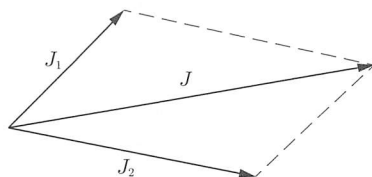


図 4.4 角運動量の合成

は、 $\psi$  中間子を構成する二つのクォークについて考えるかもしれない。この場合、これから見ていくように、軌道角運動量はゼロだが、二つのクォークのスピンから  $\psi$  の合計のスピン  $S = S_1 + S_2$  を求めるという問題に直面する。しかしいずれの場合も、疑問が生じる。二つの角運動量をどのようにして足すのだろうか。<sup>\*6</sup>

$$J = J_1 + J_2 \quad (4.10)$$

古典的にはもちろん各成分をたんに足す。しかし量子力学では、3成分すべてを扱うことができない。われわれに許されているのは、どれか1成分と大きさの扱いである。それゆえ、問題は以下になる。二つの状態  $|j_1 m_1\rangle$  と  $|j_2 m_2\rangle$  を組み合わせると、どのような全角運動量状態  $|j m\rangle$  になるのだろうか。z成分はこの場合も自然に足せるので

$$m = m_1 + m_2 \quad (4.11)$$

となるが、大きさはそうならない。大きさは、 $J_1$  と  $J_2$  の相対的な向きに依存する (図 4.4)。それが平行ならば大きさは足されるが、反平行だと引かれる。一般に、ベクトルの和の大きさは両極端の間の値を取る。つまり、 $j_1 + j_2$  から  $|j_1 - j_2|$  の整数間隔のすべての  $j$  になる [4]。

$$j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, (j_1 + j_2) - 1, (j_1 + j_2) \quad (4.12)$$

たとえば、スピン1で軌道量子数  $l = 3$  の粒子は、全角運動量  $j = 4$  (つまり、 $J^2 = 20\hbar^2$ )、あるいは  $j = 3$  ( $J^2 = 12\hbar^2$ )、あるいは  $j = 2$  ( $J^2 = 6\hbar^2$ ) のどれかをもつ。

例題 4.1 クォークと反クォークは、軌道角運動量ゼロの束縛状態の中間子を形成することができる。この中間子を取り得る可能なスピンはいくつか。

<sup>\*6</sup>  $J$  という文字を、一般の角運動量を表すものとして使う。それは、軌道 ( $L$ ) だったり、スピン ( $S$ ) だったり、あるいは何らかの合成量だったりする。

答え：クォークは（よって、反クォークも）スピン  $1/2$  をもつので、 $1/2 + 1/2 = 1$  あるいは  $1/2 - 1/2 = 0$  となる。スピン  $0$  の組み合わせは「擬スカラー中間子」（ $\pi$  三つ、 $K$  四つ、 $\eta$ ,  $\eta'$ ）となる\*7。「スカラー」はスピン  $0$  を意味し、「擬」の意味はこの後すぐに説明する。スピン  $1$  の組み合わせは「ベクトル」中間子（ $\rho$  三つ、 $K^*$  四つ、 $\phi$ ,  $\omega$ ）を形成する。「ベクトル」はスピン  $1$  を意味する。

角運動量三つを足すには、式 (4.12) を使ってまず最初の二つを合成し、その後もう一つを付け加える。ゆえに、例題 4.1 でクォークが軌道角運動量  $l > 0$  をもつことを許されると、スピン  $l+1$ ,  $l$ , そして  $l-1$  の中間子が存在できる。軌道量子数は整数でなければならないので、すべての中間子はスピンの整数となる（これらはボソンである）。同様に（クォーク三つからなる）バリオンすべては半整数のスピンをもたなければならない（これらはフェルミオンである）。

例題 4.2 三つのクォークを軌道角運動量ゼロの状態に組み上げることを想定しよう。結果として生まれるバリオンの可能なスピンはいくつか。

答え：それぞれスピン  $1/2$  のクォーク二つから、角運動量の合計は  $1/2 + 1/2 = 1$  あるいは  $1/2 - 1/2 = 0$  となる。これに三つ目のクォークを加えると、 $1 + 1/2 = 3/2$  あるいは  $1 - 1/2 = 1/2$ （最初の二つのクォークの足し算がスピン  $1$  になったとき）か、 $0 + 1/2 = 1/2$ （最初の二つのクォークの足し算がスピン  $0$  になったとき）になる。したがって、バリオンのスピンは  $3/2$  か  $1/2$  になる（後者は二つの違った方法で構成される）。実際には、 $s = 3/2$  は十重項で、 $s = 1/2$  は八重項で、あきらかに、クォーク模型だと  $s = 1/2$  のもう一つ別の仲間が存在する（もしクォークが別のクォークの周りを回転することを許し、何らかの軌道角運動量をもったとすると、それに伴って可能な組み合わせの数は増える。しかし、角運動量のトータルはいつも半整数となるだろう）。

式 (4.12) を使えば、角運動量  $j_1$  と  $j_2$  を組み合わせると、合計の角運動量  $j$  がいくつになるかわかる。しかし、時として、 $|j_1 m_1\rangle$  と  $|j_2 m_2\rangle$  をある特定の合計角運動量  $|jm\rangle$  にあらわに分解することが必要になる。

$$|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{(j_1+j_2)} C_{mm_1 m_2}^{j j_1 j_2} |jm\rangle, \quad m = m_1 + m_2 \quad (4.13)$$

$C_{mm_1 m_2}^{j j_1 j_2}$  の数値は、クレブシュ-ゴルダン係数として知られている。量子力学の上級者

\*7 訳注：ここでは、 $u$ ,  $d$ ,  $s$  クォークのみを考えている。

		5/2							
2 × 1/2		+5/2		5/2 3/2					
+2 1/2		1		3/2 +3/2					
		+2 -1/2		1/5 4/5		5/2 3/2			
		+1 +1/2		4/5 -1/5		+1/2 +1/2			
				1 -1/2		2/5 3/5		5/2 3/2	
				0 +1/2		3/5 -2/5		-1/2 -1/2	
						0 -1/2		3/5 2/5	
						-1 +1/2		2/5 -3/5	
								5/2 3/2	
								-3/2 -3/2	
								-1 -1/2	
								4/5 1/5	
								5/2	
								-2 +1/2	
								1/5 -4/5	
								-5/2	
								-2 -1/2	
								1	

図 4.5  $j_1 = 2, j_2 = 1/2$  に対するクレブシュ-ゴルダン係数 (実際にはそれぞれの数の平方根)

向けの本にはこれらをどのように算出するかが説明してある。実際のところ、通常われわれはたんにその表の数を使う (Particle Physics Booklet に載っているし、 $j_1 = 2, j_2 = 1/2$  の場合は図 4.5 に再掲してある)。二つの角運動量状態  $|j_1 m_1\rangle$  と  $|j_2 m_2\rangle$  からなる系で  $J^2$  を測定したときに、あらゆる特定の値  $j$  に対して  $j(j+1)\hbar^2$  を得る確率がクレブシュ-ゴルダン係数によってわかる。その確率は、対応するクレブシュ-ゴルダン係数の 2 乗である。

例題 4.3 水素原子中の電子は、軌道量子数  $|2 -1\rangle$  とスピン量子数  $|1/2 1/2\rangle$  をもつ。もし  $J^2$  を測定したとしたら、どのような値をもち得るか、またそれぞれの確率はどれだけか。

答え：可能な  $j$  の値は、 $l + s = 2 + 1/2 = 5/2$  と  $l - s = 2 - 1/2 = 3/2$  である。 $z$  成分を足すと、 $m = -1 + 1/2 = -1/2$  となる。 $j_1 = 2$  と  $j_2 = 1/2$  の合成を意味する  $2 \times 1/2$  という表題のついているクレブシュ-ゴルダン係数 (図 4.5) のところへ行き、 $[-1 1/2]$  というラベルのある行を見る。これらが  $m_1$  と  $m_2$  の値である。書き込まれている二つを見ると  $|2 -1\rangle |1/2 1/2\rangle = \sqrt{2/5} |5/2 -1/2\rangle - \sqrt{3/5} |3/2 -1/2\rangle$  ということがわかる。よって、 $j = 5/2$  となる確率は  $2/5$  で、 $j = 3/2$  となる確率は  $3/5$  である。もちろん、そうなって当然であるが、それぞれの確率を足すと 1 になることに注意せよ。

例題 4.4 例題 4.1 から、二つのスピン 1/2 状態を合成すると、スピン 1 と 0 になることを知っている。これらの状態をクレブシュー-ゴルダンで分解せよ。

答え：1/2 × 1/2 の表を参照すると、以下がわかる。

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= |1 \ 1\rangle \\
 \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |1 \ 0\rangle + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |0 \ 0\rangle \\
 \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |1 \ 0\rangle - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) |0 \ 0\rangle \\
 \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle &= |1 \ -1\rangle
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

ゆえに、三つのスピン 1 の状態は

$$\begin{aligned}
 |1 \ 1\rangle &= \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \\
 |1 \ 0\rangle &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left[ \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \right] \\
 |1 \ -1\rangle &= \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

となり、一方、スピン 0 の状態は

$$|0 \ 0\rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left[ \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \right] \tag{4.16}$$

となる。ところで、式 (4.15) と (4.16) は、クレブシュー-ゴルダンの表から直接読み取ることでもできる。係数はどちら向きでも成立する。

$$|jm\rangle = \sum_{j_1, j_2} C_{m m_1 m_2}^{j j_1 j_2} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \tag{4.17}$$

今度は、行に沿ってではなく、列を下に読み取る。説明するまでもなく、スピン 1 の組み合わせは「三重項」とよばれ、スピン 0 の組み合わせは「一重項」とよばれる。後の参考としていうが、三重項は粒子の入れ替え  $1 \leftrightarrow 2$  に対して対称である一方、一重項は反対称である（すなわち、符号を変える）ことに注意せよ。ちなみに、一重項ではスピンの向きが反対にそろっている（反平行）が、三重項では必ずしも平行というわけではない。 $m = 1$  と  $m = -1$  では平行だが、 $m = 0$  では平行ではない。



### 4.2.2 スピン 1/2

スピンの関する系で最も重要なのは  $s = 1/2$  だ。陽子、中性子、電子、すべてのクォーク、そしてすべてのレプトンがスピン 1/2 をもつ。さらに、いったん  $s = 1/2$  での定式化を理解すれば、比較的簡単に他の場合も理解できる。そこで、ここで立ち止まってスピン 1/2 の理論を少し詳細に議論してみる。

スピン 1/2 の粒子は  $m_s = 1/2$  (「スピン・アップ」) か  $m_s = -1/2$  (「スピン・ダウン」) をもつ。簡単のために、これら二つの状態を  $\uparrow$  と  $\downarrow$  という矢印で表現する。しかし、よりよい表記法は、2 成分の列ベクトル、つまりスピノルによる表現だ。

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

スピン 1/2 の粒子は、アップかダウンという二つの状態のどちらかとしてしか存在できないとよくいわれるが、それは大きな間違いだ。スピン 1/2 の粒子の最も一般的な状態は、

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

という線形結合である。ここで、 $\alpha$  と  $\beta$  はそれぞれ複素数である。 $S_z$  の測定値が  $+(1/2)\hbar$  か  $-(1/2)\hbar$  にしかならないというのは真だが、たとえば、前者だからといって測定の前に状態が  $\uparrow$  だったとは証明できない。一般的な場合 (式 (4.19)) を考えると、 $|\alpha|^2$  は  $S_z$  の測定値が  $+(1/2)\hbar$  になる確率で、 $|\beta|^2$  は  $-(1/2)\hbar$  になる確率である。これらのみが許される結果なので、

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (4.20)$$

ということである。この「規格化」条件を除いては、 $\alpha$  と  $\beta$  に対して測定の前にかなる制約もない。

さて、今度は式 (4.19) で与えられる一般的な状態にいる粒子の  $S_x$  あるいは  $S_y$  を測定することを考えてみよう。どのような結果を得て、それぞれはどれくらいの確率だろうか。対称性により、可能な値は  $\pm(1/2)\hbar$  だ。結局のところ、最初に  $z$  の方向をどう選ぶかは完全に任意なのだ。しかし、確率を求めるのはそれほど単純ではない。S のそれぞれの成分に、 $2 \times 2$  の行列を対応させる\*8。

\*8 これらの行列の導き方は、どんな量子力学の教科書にも載っている。ここでの目的は、角運動量が素粒子物理学においてどのように扱われるかを示すことで、なぜこのようになるかではない。

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$\hat{S}_x$  の固有値は  $\pm\hbar/2$  で、それに対応する規格化された固有ベクトルは\*9

$$\chi_{\pm} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

である (問題 4.15). 任意のスピンル  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  は、これらの固有ベクトルの線形結合として書くことができる.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

ここで,

$$a = (1/\sqrt{2})[\alpha + \beta]; \quad b = (1/\sqrt{2})[\alpha - \beta] \quad (4.24)$$

である.  $S_x$  の測定値が  $(1/2)\hbar$  になる確率が  $|a|^2$  で,  $-(1/2)\hbar$  になる確率が  $|b|^2$  である. あきらかに  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  となっている (問題 4.16).

ある特定の例を見てきたが, 一般化した手順は以下である.

1. 問題となっている観測量  $A$  を表す行列  $\hat{A}$  をつくる.
2.  $A$  の取り得る値は  $\hat{A}$  の固有値である.
3.  $\hat{A}$  の固有ベクトルの線形結合で, 系の状態を書く.  $i$  番目の固有ベクトルの係数の絶対値の 2 乗が,  $A$  の測定値が  $i$  番目の固有値となる確率である.

\*9  $n \times n$  のある行列  $M$  に対して, ある数値  $\lambda$  (固有値) が

$$M\chi = \lambda\chi$$

を満たすとき, ゼロでない列ベクトル

$$\chi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

を固有ベクトルとよぶ.  $\chi$  を何倍しても同じ固有値に対する固有ベクトルのままであることに注意.

例題 4.5 状態  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  にいる粒子の  $(S_x)^2$  を測定すると仮定しよう。どのような測定値になるか、また、それぞれになる確率はどれだけか。

答え： $(S_x)^2$  で表される行列は、 $S_x$  で表される行列の 2 乗

$$\hat{S}_x^2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

である。

$$\frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

なので、すべてのスピノルが固有値  $\hbar^2/4$  をもち、 $\hat{S}_x^2$  の固有ベクトルになっている。ゆえに、 $\hbar^2/4$  が確実に測定値となる（確率は 1）。同じことが  $\hat{S}_y^2$  と  $\hat{S}_z^2$  にもいえて、すべてのスピノルは固有値  $3\hbar^2/4$  をもち、 $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$  の固有状態になっている。これは驚くには値しない。一般に、スピン  $s$  に対しては  $S^2 = s(s+1)\hbar^2$  なのだ。

数学的な観点から、式 (4.21) における係数  $\hbar/2$  は美しくないので、慣例的に以下のパウリ・スピン行列を導入する。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

すると  $\hat{S} = (\hbar/2)\sigma$  となる。パウリ行列はたくさんの面白い性質をもっていて、その中のいくつかについては問題 4.19 と 4.20 で調べてみる。本書を読み進めていくと、くり返しこれらの行列に出会う。

ある意味、(2 成分からなる) スピノルは、スカラー (1 成分) とベクトル (3 成分) の中間に位置する。さて、座標軸を回転させると、所定のルールに従って (問題 4.6) ベクトルの成分は変化するので、同じ状況のもとでスピノルの成分はどのように変換されるのか考えたい。答えは、以下のルールで与えられる [5]。

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = U(\theta) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

ただしここで  $U(\theta)$  は  $2 \times 2$  の行列で

$$U(\theta) = e^{-i(\theta \cdot \sigma)/2} \quad (4.28)$$

を満たす。ベクトル  $\theta$  は、回転軸に沿った向きをもち、その大きさは軸について右手系で回転した回転角の大きさである。ここでは指数そのものが行列であることに注意！この形式での表現は、以下のような級数展開の省略形だとみなす（問題 4.21）\*10。

$$e^A \equiv 1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 + \dots \quad (4.29)$$

自身で確認してもらおうのがよいが（問題 4.22）、 $U(\theta)$  は行列式が 1 のユニタリー行列だ。実際のところ、そのような回転行列は  $SU(2)$  群を構成する。ゆえに、スピン 1/2 の粒子は、回転のもとでは  $SU(2)$  の 2 次元表現に従い変換する。同様に、ベクトルで記述されるスピン 1 の粒子は  $SU(2)$  の 3 次元表現に属し、4 成分によって記述されるスピン 3/2 の粒子は  $SU(2)$  の 4 次元表現に基づき変換する、などとなる（これらの高次元表現の構築については問題 4.23 で調べる）。読者は、 $SU(2)$  が回転とどんな関係があるのかと思うかもしれない。前に言及した通り、 $SU(2)$  は本質的には\*11、 $SO(3)$  と同じグループで、3 次元の回転群である。ということは、違ったスピンをもち粒子は、回転群の別の表現に属していることになる。

### 4.3 フレーバー対称性

中性子には非常に変わった性質がある。1932 年の中性子発見の直後にその性質をハイゼンベルクが観測した。電荷をもたないというあきらかな事実以外、中性子は陽子とほぼ違いがないのだ。とくに、その質量は驚くほど近く、 $m_p = 938.28 \text{ MeV}/c^2$ 、 $m_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2$  だ。ハイゼンベルクは、陽子と中性子を核子という一つの粒子の二つの「状態」であるとみなすことを提案した [6]。質量におけるわずかな違いさえ、陽子は荷電であるという事実のせいにした。というのは、電場に蓄えられたエネルギーがアインシュタインの式  $E = mc^2$  に従って慣性質量に寄与するからだ（残念ながら、この議論によれば、この二つの粒子のうち重いのは陽子でなければならない。

\*10 注意：行列においては一般的には  $e^A e^B = e^{A+B}$  ではない。これを問題 4.21 の行列を使って確認してもよい。しかし、 $A$  と  $B$  が可換であれば（すなわち、もし  $AB = BA$  なら）、通常のルールを適用してよい。

\*11 実際のところ、 $SU(2)$  と  $SO(3)$  には微妙な違いがある。問題 4.21 によると、角度  $2\pi$  の回転に対応する行列  $U$  は  $-1$  である。スピノルはそのような回転のもとで符号を変える。だがしかし、幾何学的には、 $2\pi$  の回転はまったく回転しないのと同じだ。 $SU(2)$  はある意味  $SO(3)$  の「2 倍」だ。そこでは、 $720^\circ$  回転しないと元の場所に戻って来ない。この意味においては、 $SU(2)$  によるスピノルの表現は、回転群の「真の」表現ではない。そして、だからこそ古典物理には現れない。量子力学では、波動関数の 2 乗のみが物理的な意味をもち、2 乗することによってマイナスの符号が消える。

実際はそうなのではないが、もしそうなら物質の安定性が悲惨なことになる。この後すぐに少し言及しよう)。もし、とにかくすべての電荷を「消し去る」ことができたならば、ハイゼンベルクによると陽子と中性子は見分けがつかなくなる。あるいは、もっとつまらない表現をすると、陽子と中性子が受ける強い力を区別できないのだ。

ハイゼンベルクのアイデアを実現するために、核子を2成分の列ベクトル

$$N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

で書き表し、

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

とする。これは、たんなる表記法にすぎないが、角運動量の理論において出合ったスピノルを思わず連想してしまう。スピン  $S$  の直接的な類似として、アイソスピン  $I$  を導入することにする\*12。しかし、 $I$  は、座標軸  $x, y, z$  をもつ通常の空間におけるベクトルではなく、むしろ「アイソスピン空間」という抽象空間中のベクトルで、その成分を  $I_1, I_2, I_3$  とよぶ。この理解に立つと、この章の前半でやった角運動量に関する道具立てすべてを借りることができる。核子はアイソスピン  $1/2$  をもち、その第3成分  $I_3$  は固有値\*13  $+1/2$  (陽子) と  $-1/2$  (中性子) をもつ。

$$p = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle, \quad n = \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (4.32)$$

陽子は「アイソスピン・アップ」、中性子は「アイソスピン・ダウン」だ。

ここまでは、まだたんに表記法だ。ハイゼンベルクの提案に物理が入ってくるのは、たとえば、電気力は通常の配位をもつ空間中では回転しても不変なのと同様に、強い力はアイソスピン空間中での回転のもとで不変であるという点である。これを内部対称性とよぶ。なぜなら、時空と何の関係もなく、むしろ、異なる粒子間についての対称性だからだ。アイソスピン空間中の軸番号1について  $180^\circ$  回転させると、陽子が中性子になり、中性子は陽子になる。もし強い力がアイソスピン空間中の回転のもとで不変であるならば、ネーターの定理によって、アイソスピンはすべての強い相互作用で保存していることになる。通常の空間中で回転不変性があれば角運動量が

\*12 この言葉は、誤解を生じさせる古い用語である (1937年にウィグナーによって導入された) 「同位体スピン」に由来する。原子核物理学者は「同重体」スピンという (よりよい) 言葉を使う。

\*13 ここでは係数  $\hbar$  がない。アイソスピンは無次元量だ。

保存しているのとちょうど同じだ\*<sup>14</sup>。

群論の言葉を使うと、ハイゼンベルクは、内部対称群  $SU(2)$  のもとで強い相互作用は不変で、核子は 2 次元表現 (アイソスピン  $1/2$ ) に属していると主張したことになる。1932 年当時、これは大胆な提案であった。今日では、ハドロン「多重項」構造の中に最も顕著に、たくさんの証拠がある。1 章の八道説を思い出してほしい。ハイゼンベルクの目にとまった核子についての特徴が、まさに横の行として表現されている。それらはちょうど同じような質量をもつが、電荷が違う。これらの多重項それぞれに特定のアイソスピン  $I$  を割り振り、多重項のメンバーそれぞれに特定の  $I_3$  を割り振る。たとえばパイ中間子なら  $I = 1$  で、

$$\pi^+ = |1\ 1\rangle, \quad \pi^0 = |1\ 0\rangle, \quad \pi^- = |1\ -1\rangle \quad (4.33)$$

となり、 $\Lambda$  なら  $I = 0$  で

$$\Lambda^0 = |0\ 0\rangle \quad (4.34)$$

となり、 $\Delta$  なら  $I = 3/2$  で

$$\Delta^{++} = \left| \frac{3}{2}\ \frac{3}{2} \right\rangle, \quad \Delta^+ = \left| \frac{3}{2}\ \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \Delta^0 = \left| \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad \Delta^- = \left| \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2} \right\rangle \quad (4.35)$$

となる、などである。多重項のアイソスピンを決めるには、たんにその多重項に含まれている粒子数を数えればよい。 $I_3$  は  $-I$  から  $I$  まで整数間隔の値を取るので、多重項中の粒子の数は  $2I + 1$  となる。

$$\text{多重度} = 2I + 1 \quad (4.36)$$

アイソスピン第 3 成分の  $I_3$  は、粒子の電荷  $Q$  と関係がある。多重項の中で最も電荷の大きい粒子に  $I_3 = I$  を割り振り、後は、電荷  $Q$  が減る順番に割り振っていく。「1974 年より前」のハドロンに対しては、 $u$ 、 $d$ 、 $s$  クォークからのみ構成されていたので、 $Q$  と  $I_3$  との間の明示的な関係は、ゲルマン-西島の法則に従っている。

\*<sup>14</sup> いわゆる、強い力の「電荷独立性」(陽子に対しても中性子に対しても同じという事実) について誇張したくなる誘惑にかられる。だが、個々の中性子を陽子に置き換えて同じ結果を得られるとはっていない。すべての陽子と中性子を入れ換えたときのみ成立する。(たとえば、陽子と中性子の束縛状態、すなわち、重陽子は存在するが、二つの陽子、あるいは二つの中性子の束縛状態は存在しない。) 実際、陽子と中性子は同じ量子状態を占めることができるが、二つの中性子(あるいは二つの陽子)は同じ量子状態にいられないので、そのような主張はパウリの排他原理と矛盾してしまうだろう。

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(A + S) \quad (4.37)$$

ここで、 $A$  はバリオン数であり、 $S$  はストレンジネスである\*15。元々は、この式は純粹に経験則であったが、クォーク模型という文脈においてはたんにクォークに対するアイソスピンの割り振りとなった。 $u$  と  $d$  は (陽子と中性子のように) 「二重項」を形成し、

$$u = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle, \quad d = \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (4.38)$$

となり、すべての他のフレーバーはアイソスピン 0 をもつ (問題 4.25 と 4.26)\*16。

しかし、アイソスピンは分類にだけ役立つのではない。それにより、重要な動的な示唆も得られる。たとえば、二つの核子があったとしよう。角運動量の加法から、合成されたアイソスピンの値は 1 か 0 となる。具体的には (例題 4.4 を使って)

$$\begin{aligned} |1 \ 1\rangle &= pp \\ |1 \ 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(pn + np) \\ |1 \ -1\rangle &= nn \end{aligned} \quad (4.39)$$

という対称的なアイソスピン三重項と

$$|0 \ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(pn - np) \quad (4.40)$$

という反対称なアイソスピン一重項を得る。実験的には、中性子と陽子は、重水素 ( $d$ ) という一つの束縛状態を形成する。二つの陽子、あるいは二つの中性子の束縛状態は存在しない。ゆえに、重水素はアイソスピン一重項に違いない。もしそれが三重項だったとしたら、三つすべての状態が存在すべきだ。なぜなら、それらはアイソスピン空間中における回転の違いしかないからだ。あきらかに、強い引力が  $I = 0$  のチャンネルにはあり、 $I = 1$  のチャンネルにはない。おそらく、二つの核子間の相互作用を記述するポテンシャルには  $\mathbf{I}^{(1)} \cdot \mathbf{I}^{(2)}$  というかたちの項を含んでいて、その値は三重項のときは  $1/4$  で一重項のときは  $-3/4$  になるのだ (問題 4.27)。

\*15  $Q$ ,  $A$ ,  $S$  とともに電磁力で保存するので、 $I_3$  も保存することになる。しかし、他の二つの成分 ( $I_1$  と  $I_2$ ) は保存しないので、 $I$  自身も電磁力のもとで保存しない。たとえば、 $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$  崩壊では、 $I$  は 1 から 0 に変わる。弱い相互作用では  $S$  さえも保存しないので、 $I_3$  も保存しない (たとえば、 $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$  では  $I_3 = 0$  から  $I_3 = -1/2$  になる)。

\*16 アイソスピンは強い力とだけ関係があるので、レプトンにとっては意味のない量だ。理論の整合性のために、すべてのレプトンと力の媒介粒子にはアイソスピン 0 が割り振られている。

アイソスピン不変性から核子-核子散乱に対する示唆も得られる。

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } p + p \rightarrow d + \pi^+ \\
 & \text{(b) } p + n \rightarrow d + \pi^0 \\
 & \text{(c) } n + n \rightarrow d + \pi^-
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

という過程を考えよう。重水素は  $I = 0$  なので、右辺はそれぞれ  $|1\ 1\rangle$ ,  $|1\ 0\rangle$ ,  $|1\ -1\rangle$  である。一方、左辺は  $pp = |1\ 1\rangle$ ,  $nn = |1\ -1\rangle$ ,  $pn = (1/\sqrt{2})(|1\ 0\rangle + |0\ 0\rangle)$  である\*17。  $I = 1$  の組み合わせだけが反応に寄与するので（それぞれの場合の終状態は純粋に  $I = 1$  で、アイソスピンは保存するので）、散乱振幅の比は

$$\mathcal{M}_a : \mathcal{M}_b : \mathcal{M}_c = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1 \tag{4.42}$$

となる。後に見るように\*18、断面積  $\sigma$  は振幅の絶対値の2乗に比例する。ゆえに、

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = 2 : 1 : 2 \tag{4.43}$$

である。(c)の過程を実験で実現するのは難しいが、(a)と(b)は測定されていて、(電磁力による補正を加えると) 予言された比と一致することが確かめられている [7]。

最後の例として、パイ中間子と核子の散乱  $\pi N \rightarrow \pi N$  を考察してみよう。以下の六つの弾性散乱過程と、

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p & \text{(b) } \pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p \\
 & \text{(c) } \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p & \text{(d) } \pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n \\
 & \text{(e) } \pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n & \text{(f) } \pi^- + n \rightarrow \pi^- + n
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

四つの電荷交換過程が存在する。

$$\begin{aligned}
 & \text{(g) } \pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p & \text{(h) } \pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n \\
 & \text{(i) } \pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p & \text{(j) } \pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

パイ中間子は  $I = 1$  で核子は  $I = 1/2$  なので、アイソスピンの合計は  $3/2$  か  $1/2$  になる。ゆえに、区別すべき振幅は二つだけになる。  $I = 3/2$  のときの  $\mathcal{M}_3$  と  $I = 1/2$  の

\*17 式 (4.39) と (4.40) を足せばよい。

\*18 散乱振幅と断面積についての理論は6章で議論する。この段落と次の段落では、後から出てくる結果を使ってしまふ。しかし、計算がどのように行われるかという文脈においては意味が通ることを願っている。もし望むなら、いまはこれら二つの段落を飛ばしてもよい。



ときの  $\mathcal{M}_1$  だ。クレブシュ-ゴールドン係数の表から、以下のように分解できる。

$$\begin{aligned}
 \pi^+ + p: & \quad |1\ 1\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle \\
 \pi^0 + p: & \quad |1\ 0\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle - \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \\
 \pi^- + p: & \quad |1\ -1\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \\
 \pi^+ + n: & \quad |1\ 1\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \\
 \pi^0 + n: & \quad |1\ 0\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \\
 \pi^- + n: & \quad |1\ -1\rangle \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2} -\frac{3}{2} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

反応 (a) と (f) は純粋な  $I = 3/2$  の過程なので、

$$\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_f = \mathcal{M}_3 \tag{4.47}$$

となる。他はすべて複数のアイソスピン状態の混ぜ合わせで、たとえば、

$$\mathcal{M}_c = \frac{1}{3} \mathcal{M}_3 + \frac{2}{3} \mathcal{M}_1, \quad \mathcal{M}_j = \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \mathcal{M}_3 - \frac{\sqrt{2}}{3} \mathcal{M}_1 \tag{4.48}$$

である (残りは読者自身にやってもらおう。問題 4.28)。よって、断面積を比で表すと

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 |\mathcal{M}_3|^2 : |\mathcal{M}_3 + 2\mathcal{M}_1|^2 : 2 |\mathcal{M}_3 - \mathcal{M}_1|^2 \tag{4.49}$$

である。重心系エネルギー 1232 MeV では、パイ中間子-核子散乱における有名でドラマチックな事象過多が発生する [8]。1951年にフェルミらによって初めて発見されたもので、パイ中間子と核子が合体して短寿命の「共鳴」状態、すなわち  $\Delta$  が生成されている。 $\Delta$  が  $I = 3/2$  であることを知っているのも、このエネルギー領域では  $\mathcal{M}_3 \gg \mathcal{M}_1$  と予想できる、すなわち、

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 : 1 : 2 \tag{4.50}$$

が期待される。実験的には全断面積を測定するのが簡単なので、(c) と (j) を合計して

$$\frac{\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ + p)}{\sigma_{\text{tot}}(\pi^- + p)} = 3 \tag{4.51}$$

となる。図 4.6 からわかるように、この予言は実データをよく再現している。

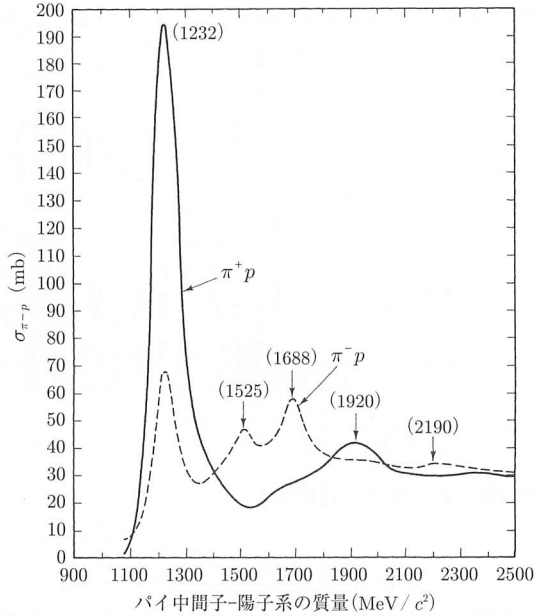


図 4.6  $\pi^+p$  散乱 (実線) と  $\pi^-p$  散乱 (点線) の全断面積 (出典: Gasiorowicz, S.: Elementary Particle Physics (John Wiley & Sons, 1966) 294. John Wiley & Sons, Inc. の許可を得て掲載)

1950年代の後半、歴史はくり返した。1932年に陽子と中性子が対をなすかのように見えたのと同じように、今度は、核子、 $\Lambda$ 、 $\Sigma$ 、 $\Xi$ が一緒になってバリオンのグループを自然に形成しているのがあきらかになった。それらすべてがスピン 1/2 をもち、質量も同じくらいだ。質量に関しては、核子が  $940 \text{ MeV}/c^2$  で  $\Xi$  が  $1320 \text{ MeV}/c^2$  なので、ハイゼンベルクが陽子と中性子に対して提案したように、それらが一つの粒子の異なる状態だと議論するのは少し無理があるかもしれない。しかしながら、これら 8 個のバリオンを多重項とみなす誘惑にかられる。おそらくこれが意味するのは、アイソスピン  $SU(2)$  を要素として含んでいるような、より大きな対称群の同じ表現にそれらのバリオンが含まれているということである。すると、重大な疑問が生じる。より大きな群は何だろう (「8 個のバリオン問題」とよばれたそれは、いつもこう解釈されたというわけではない。当時、たいていの物理学者は群論について驚くほど無知であった。ゲルマンは定式化するうえで必要だったもののほとんどを何もないところからつくり上げたが、後になってそれらは数学者によく知られていたということを知った)。八道説が 8 個のバリオン問題に対するゲルマンの答えであった。対称群は  $SU(3)$  だ。

八重項は  $SU(3)$  の 8 次元表現を構成し、十重項は 10 次元表現を構成する、などである。ハイゼンベルクの場合よりも今回の方が問題を難しくしているのは、 $SU(2)$  では核子（後になっては  $K$  や  $\Xi$  など）が存在したが、 $SU(3)$  では（3 次元）表現に当てはまる粒子が自然界に存在しないことであった。この役割はクォークに任された。  $u$ 、 $d$ 、そして  $s$  クォークが一緒になって  $SU(3)$  の 3 次元表現を形成し、それらが、 $SU(2)$  のもとではアイソスピン二重項の  $(u, d)$  とアイソスピン一重項の  $(s)$  とに分かれる。

もちろん、チャームクォークが出現したときには、強い相互作用におけるフレーバーの対称群はもう一度拡張された。今度は  $SU(4)$  だ（いくつかの  $SU(4)$  多重項は図 1.12 に示されている）。しかし、ボトムクォークが現れて  $SU(5)$  に行くまでには少し時間がかかった。そして最終的にはトップクォークが  $SU(6)$  に導いた。しかし、この素敵な階層性には一つの重要な注意がある。 $SU(2)$  は「良い」対称性である。アイソスピン多重項のメンバーは、質量が最大でも 2 あるいは 3% しか違わない。これは電磁補正によって期待される程度である\*19。しかし、八道説である  $SU(3)$  は「ひどく破れた」対称性である。バリオン八重項の中での質量の開きは 40% もある。チャームを入れると対称性の破れはさらに悪くなる。同じ  $SU(4)$  の多重項なのに  $\Lambda_c^+(udc)$  は  $\Lambda(uds)$  よりも 2 倍以上重い。ボトムを入れるとさらに悪くなるし、トップについては決定的にひどい。束縛状態をつくることすらしないのだ。

なぜアイソスピン対称性はそのように良い対称性で、八道説はまあまあで、フレーバーの  $SU(6)$  はそれほどまでにうまくいかないのだろうか。標準模型では、それらすべてをクォークの質量のせいにしてている。クォーク質量は実験的に直接測定できないという事実から、今日では、クォーク質量に関する理論は抜けの多いものとなっている。さまざまな議論によると、 $u$  クォークと  $d$  クォークは本来は非常に軽く電子質量の約 10 倍ほどしかない [9]。しかし、ハドロンの中に閉じ込められているとそれらの実効的な質量はもっと重い。実際、正確な値は文脈に依存する。中間子の中よりもバリオンの中の方が少し重い傾向がある（これについては 5 章でさらに議論する）。スプーンの実効的な慣性質量はお茶をかき混ぜているときよりも蜂蜜をかき混ぜているときの方が重く、また、どちらの場合もスプーンの真の質量よりも大きくなっているのと、ある意味似た状況である。一般的にいうと、ハドロン中のクォークの実効質量は

\*19 実際、アイソスピンは強い相互作用に関する正確な対称性で、対称性の破れすべてが電磁力の混入によるものだと考えられていた。真実は、中性子-陽子間の質量の開きは、純粋な電磁気力によるものだとすると反対向きであり問題だ。今日では、 $SU(2)$  は強い相互作用における近似的な対称性だと信じられている。

表 4.4 クォーク質量 (MeV/c<sup>2</sup>)

クォークの種類	裸の質量	実効質量
<i>u</i>	2	336
<i>d</i>	5	340
<i>s</i>	95	486
<i>c</i>	1 300	1 550
<i>b</i>	4 200	4 730
<i>t</i>	174 000	177 000

注意：これらの数字は多少の予想を含み、また模型に依存する [12].

約 350 MeV/c<sup>2</sup> で、裸の質量よりも重い [10] (表 4.4). これに比べると、アップとダウンクォーク質量の違いは実質的には無視できる. つまり、それらは同じ質量をもっているかのように振る舞う. しかし、*s* クォークはあきらかに重く、*c*、*b*、*t* は大きく分離している. クォーク質量を除いては、強い相互作用はすべてのフレーバーを平等に取り扱う. ゆえに、実効的な *u* と *d* の質量がほぼ等しいことから (つまり、より根本的なレベルでは、それらの裸の質量が非常に小さいから) アイソスピンは良い対称性なのだ. スtrenジクォークの有効質量が *u* と *d* からそれほど離れていないので八道説はそこそこ良い対称性なのだ. しかし、それより重いクォークは質量がかけ離れているためにフレーバーの対称性は激しく破れている. もちろん、この「説明」ではさらに二つの疑問が生じる. (i) なぜ、ハドロン中へのクォークの閉じ込めが、実効質量を約 350 MeV/c<sup>2</sup> 増やすのだろうか. その答えはたぶん QCD にあるが、詳細が完全に理解されているわけではない [11]. (ii) なぜ裸のクォークはそれらに固有の質量をもつのか. 何らかのパターンがあるのだろうか. この質問に対して標準模型は何の答えももたない. 6 個のクォークの裸の質量と 6 個のレプトンの質量はいまのところ、たんなるインプットパラメーターにすぎない. それらがどうやって生じたのかを語るのには、標準模型を超える理論の役割だ.

## 4.4 離散対称性

### 4.4.1 パリティ

1956 年以前は、物理法則は左右両利きであることが当たり前だと、つまり、いかなる物理過程の鏡像もまた完全に起こり得る物理過程である [13] と思われていた. 念のためにいうと、車は右側を走り (少なくともアメリカでは)、われわれの心臓は左側にある. しかし、これらはあきらかに歴史的あるいは進化上の偶然の産物である. 逆に

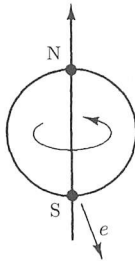


図 4.7 コバルト 60 のベータ崩壊では、たいていの電子が原子核のスピンは反対方向に放出される

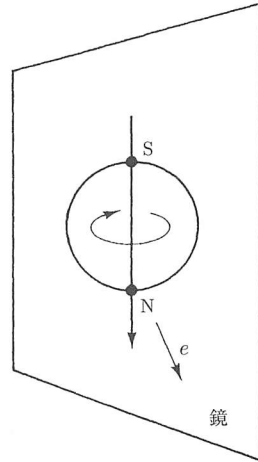


図 4.8 図 4.7 の鏡像。たいていの電子は原子核のスピンの同方向に放出される

なったかもしれない。実際、たいていの物理学者は、自然法則の鏡像対称性（あるいは「パリティ不変性」）は自明だと考えていた。しかし、1956年にリーとヤンは [14]、（この章の最後に見る理由により）この仮定を検証した実験があったかどうかを疑うに至った。文献をあたり、驚くべきことに、強い相互作用と電磁相互作用にはパリティ不変のたくさんの証拠があったが、弱い相互作用についてはそのような確認がなされていないことを突き止めた。彼らは問題に決着をつけるための試験を提案し、その年の後半ウーによってその実験が行われた [15]。この有名な実験では、放射性物質のコバルト 60 が、そのスピンのたとえば  $z$  軸向きにそろるように、注意深く配置された（図 4.7）。コバルト 60 はベータ崩壊をして ( ${}^{60}\text{Co} \rightarrow {}^{60}\text{Ni} + e + \bar{\nu}_e$ )、ウーはそのとき放出された電子の方向を記録した。彼女が見つけたことは、たいていは南寄りに、つまり原子核のスピンの向きとは反対方向に飛び出していることだった。

観測したことは、それですべてであった。しかし、その単純な観測事実には驚くべき解釈があった。同じ過程の鏡像を検証することを考えよう（図 4.8）。原子核の鏡像は反対向きに回転し、そのスピンは下を向く。だが、（鏡の中の）電子はやはり下向きに飛び出す。ということは、鏡像では、電子は原子核のスピンの同じ方向に放出されやすいことになる。つまり、ここには、鏡に映すと発生しない物理過程が自然の中にあるということだ。あきらかに、パリティは弱い相互作用では不変ではない。もし不変であったなら、ウーの実験において電子は「北」と「南」それぞれに同じ数だけ飛



図 4.9 ヘリシティ. (a) スピンと速度が平行な場合 (ヘリシティ  $+1$ ). (b) それらが反平行な場合 (ヘリシティ  $-1$ )

び出してははずだ。しかし、そうはなっていない。

パリティが破壊されたことは物理に深遠な影響を与えた。ある者は打ちのめされ、別の者には爽快であった [16]。パリティの破れは小さな効果ではなく、9章で見るように、実際のところ「最大限」破れている。また、コバルトのベータ崩壊に限らず、探し始めてみると、パリティの破れは実際には弱い相互作用の証となっている。これは、ニュートリノの振る舞いに最も劇的に現れる。角運動量の理論によれば、量子化軸は普通は  $z$  軸に取る。もちろん、その  $z$  軸の方向は完全に任意であるが、もし実験室中を速度  $v$  で飛んでいる粒子を扱うのであれば、自然な選択は、運動の方向を  $z$  軸に取ることだ。この軸に対する  $m_s/s$  の値は、その粒子のヘリシティとよばれる。よって、スピン  $1/2$  粒子のヘリシティは  $+1$  ( $m_s = 1/2$ ) か  $-1$  ( $m_s = -1/2$ ) となる。前者を「右巻き」、後者を「左巻き」とよぶ\*20。しかし、それはローレンツ不変ではないので、その違いは非常に本質的なわけではない。いま、右巻き電子が右を向いて進んでいると仮定しよう (図 4.9(a))、そして、別の誰かが  $v$  を超える速さで右に移動している慣性系からその電子を見ているとしよう。その人から見ると、電子は左に進んでいる (図 4.9(b))。しかし、スピンの方向は同じなので、この観測者はその電子を左巻きだという。いい換えると、参照している系を変えることによって、右巻き電子を左巻きに変換することができる。右巻きと左巻きの区別がローレンツ不変でないというのは、この観点からだ。

しかし、とりあえずニュートリノの質量はゼロだとして、つまり、光速で移動しているのでそれよりも速く動く観測者はいないとしたときに、同じ考え方をニュートリノに当てはめると何が起こるだろうか。より速く動いている参照系に乗ることで、(質量のない) ニュートリノの「動く向きを逆転させる」ことは不可能ゆえに、ニュート

\*20 9章で「巻き」とヘリシティの詳細な違いを紹介するが、いまのところ、これらの用語を区別なく使う。

図 4.10 静止している  $\pi^-$  の崩壊

リノ（あるいは、質量のない粒子）\*<sup>21</sup>のヘリシティはローレンツ不変、つまり、観測者の参照系という人為的な効果ではなく、粒子に固有の本質的な性質なのである。あるニュートリノのヘリシティを決めることは、重要な実験事項となる。50年代半ばになるまで、ちょうど光子のように、ニュートリノの半分が左巻きで、残り半分が右巻きだろうと誰もが仮定していた。だが、実際に発見されたことは以下であった。

ニュートリノは左巻きで、  
反ニュートリノは右巻きである。

もちろん、ニュートリノのヘリシティを直接測るのは難しい。そもそも、ニュートリノを検出することがまず難しい。しかし、パイ中間子の崩壊  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$  を使う比較的簡単な間接的な方法がある。もしパイ中間子が静止していれば、ミュー粒子と反ニュートリノは互いが反対向きに飛び出す（図 4.10）。さらに、パイ中間子のスピンはゼロなので、ミュー粒子と反ニュートリノのスピンは反対向きでなければならない\*<sup>22</sup>。よって、反ニュートリノが右巻きなら、ミュー粒子も右巻きでなければならない（パイ中間子の静止系で）。そして、これがまさに実験的に見出されたのである [17]。ということで、ミュー粒子のヘリシティの測定によって反ニュートリノのヘリシティを決めることができる。同様に、 $\pi^+$  崩壊では、反ミュー粒子はいつも左巻きなので、ニュートリノが左巻きであることを示唆している。対照的に、中性のパイ中間子の崩壊  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$  を考えてみよう。くり返すが、どのような崩壊においても、二つの光子は同じヘリシティをもたなければならない。しかし、今度はパリティを保存する電磁気力による過程なので、平均すると、右巻き光子対と左巻き光子対の数が同じになる。ニュートリノには電磁気力は働かず、弱い相互作用しか働かないので、すべてが

\*<sup>21</sup> 質量のない粒子に対しては、 $|m_s|$  の最大値だけが取り得る値となる。たとえば、光子は  $m_s = +1$  か  $m_s = -1$  を取ることができるが  $m_s = 0$  は取れない。なので、質量のない光子のヘリシティはいつも  $\pm 1$  である。光子の場合は、これらが左円偏光と右円偏光を表現している。 $m_s = 0$  が存在しないことは、古典光学における縦偏光の不在に対応している。

\*<sup>22</sup> 軌道角運動量は（あったとしても）速度に対して垂直になり、この議論には影響を与えない。

左巻きなのだ。ニュートリノの鏡像は存在しないのである\*23。それが、知られている限り最も著しい鏡像対称性の破れだ\*24。

弱い相互作用では破れていたものの、パリティの不変性は、強い相互作用と電磁相互作用においては正しい対称性のままである。よって、何らかの定式化や専門用語の開発には有用である。まず、ささいな技術上の問題点を指摘しておく。任意に「鏡」の面を選ぶことを強いる反射の代わりに、われわれがこれから議論していくのは、あらゆる点を原点に対して直径方向に反対の位置に動かす空間反転についてである(図4.11)。どちらの変換も右手を左手に変える。実際、空間反転は反射の後の回転(図では  $y$  軸について  $180^\circ$ ) にすぎない。ゆえに、(回転対称性も合わせてもっている)対象に対しては、どちらを使っても違いがない。 $P$  を空間反転としよう。これを「パリティ演算子」とよぶ。もし、問題にしている系が右手系なら、パリティ演算子により、上下が逆さまの裏向きの左手系になる(図4.11(b))。ベクトル  $\mathbf{a}$  に作用すると、 $P$  は反対向きのベクトルを生成し、 $P(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}$  となる。二つのベクトルの外積  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  についてはどうなるだろうか。もし  $P$  が  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の符号を変えるなら、 $\mathbf{c}$  自身は符号を変えない。つまり  $P(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$  である。非常に奇妙だ。あきらかにベクトルには、パリティ変換で符号を変える「普通の」と、上記のように符号を変えない別のタイプの2種類が存在する。外積は符号を変えない古典的な例である。それらを区別するときには、前者を「極性」ベクトル、そして後者を「擬」(あるいは「軸性」)ベクトルとよぶ。極性ベクトルと擬ベクトルとの外積は極性ベクトルとなることに注意せよ。

\*23 これはいいすぎだ。右巻きニュートリノは身の周りに存在してもよいが、われわれの知り得るどのようなメカニズムをもってしても通常の物質と相互作用をしない。実際、いまやニュートリノがわずかだがゼロではない質量をもっていることを知っているので、右巻きニュートリノは存在しなければならない。しかし、これによって、 $\pi^-$  が崩壊するときに現れる  $\mu^-$  が重心系では右向きで鏡像対称性をそれ自身で壊しているという事実が変わることはない。ところで、さかのぼること1929年、ディラック方程式が発表されたすぐ後で、ワイルがスピン1/2の質量のない粒子を記述する美しくすっきりとした理論を発表した。その理論には、粒子は決まった「巻き」をもつという特徴があった。当時、質量のない粒子としてはスピン1の光子しか知られていなかったので、ワイルの理論への興味は限定的だった。1931年にパウリがニュートリノを導入したとき、ほこりを払ってワイルの理論を引っ張り出してきて使ったと思うかもしれない。パウリはそうしなかった。パウリは、鏡像対称性を破るという観点からワイルの理論を拒絶して手放した。この間違いを後悔できるほど彼は長生きして、1957年に、ワイルの理論は華々しく立証された。

\*24 当時の多くの物理学者が思ったことを読者も思うかもしれない。もしすべての粒子を同時に反粒子に変換したら、ある種の鏡像対称性は回復するだろう、と。(右巻きの反ニュートリノをもつ)  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$  の鏡像は、(左巻きのニュートリノをもつ)  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$  であり、それはまったく問題がない。この認識は1964年まではわずかな心地よさをもたらしたが、1964年にそれも破れていることが示された。これについては以下の節でさらに見ていく。



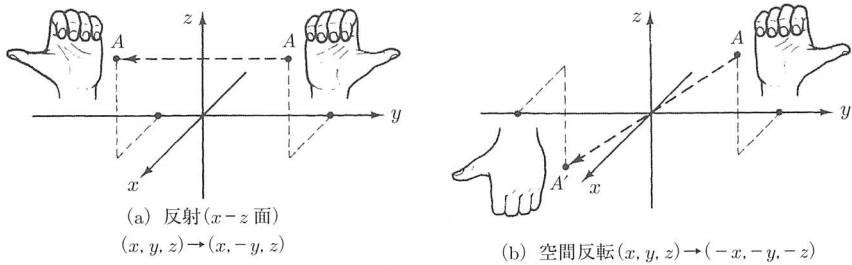


図 4.11 反射と空間反転

表 4.5 スカラーとベクトルのパリティ演算における変換性

スカラー	$P(s) = s$
擬スカラー	$P(p) = -p$
ベクトル (あるいは極性ベクトル)	$P(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$
擬ベクトル (あるいは軸性ベクトル)	$P(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$

たぶんこの用語を使っていないが、以前にも読者は擬ベクトルに出合っている。角運動量がそれで、磁場もまた擬ベクトルである。パリティ不変の理論においては、決して、ベクトルを擬ベクトルに足してはならない。たとえば、ローレンツ力  $\mathbf{F} = q[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})/c]$  を考えてみよう。  $\mathbf{v}$  はベクトルで、  $\mathbf{B}$  は擬ベクトルなので、  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  はベクトルであり、  $\mathbf{E}$  に足すのはルールに則っている。だが、  $\mathbf{B}$  自身は決して  $\mathbf{E}$  に足されない。これから見ていくように、それこそまさに、パリティの破れを引き起こす弱い相互作用の理論におけるベクトルと擬ベクトルとの足し算である。

最後に、二つの極性ベクトルの内積は  $P$  のもとで符号を変えないが、極性ベクトルと擬ベクトルの積 (あるいは三つのベクトルの積  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ) は符号を変える。なので、スカラーにも 2 種類ある。符号を変えない「普通の」ものと、符号を変える「擬スカラー」がある。これらすべてが表 4.5 にまとめられている<sup>\*25</sup>。

もしパリティ演算子を 2 回作用させると、もちろん、最初いたところに戻って来る

$$P^2 = I \tag{4.52}$$

(つまり、パリティ群は、二つの要素  $I$  と  $P$  からなっている)。これが意味するのは、  $P$  の固有値は  $\pm 1$  ということである (問題 4.34)。たとえば、スカラーと擬ベクトル

<sup>\*25</sup> この用語は、特殊相対論にも単純に拡張される。  $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$  は、空間成分が  $P(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$  という擬ベクトルで構成されていたら  $a^\mu$  は擬ベクトルとよばれる。  $p$  が、空間反転のもとで  $P(p) = -p$  のように自分自身のマイナスになる場合は、擬スカラーである。

表 4.6 いくつかの中間子九重項の量子数

軌道角運動量	スピン	$J^{PC}$	観測されている九重項			平均質量 (MeV/c <sup>2</sup> )
			$I = 1$	$I = 1/2$	$I = 0$	
$l = 0$	$s = 0$	$0^{-+}$	$\pi$	$K$	$\eta, \eta'$	400
	$s = 1$	$1^{--}$	$\rho$	$K^*$	$\phi, \omega$	900
$l = 1$	$s = 0$	$1^{+-}$	$b_1$	$K_{1B}$	$h_1, h_1$	1200
	$s = 1$	$0^{++}$	$a_0$	$K_0^*$	$f_0, f_0$	1100
	$s = 1$	$1^{++}$	$a_1$	$K_{1A}$	$f_1, f_1$	1300
	$s = 1$	$2^{++}$	$a_2$	$K_2^*$	$f_2', f_2$	1400

は固有値 +1 をもち、一方、ベクトルと擬スカラーは固有値 -1 をもつ。ハドロンは  $P$  の固有状態であり、ちょうどスピンや電荷やアイソスピンやストレンジネスなどで分類されたように、 $P$  の固有値に従って分類することも可能である。場の量子論によると、フェルミオン（半整数のスピン）のパリティは、対応する反粒子の反対でなければならない。一方、ボソン（整数のスピン）のパリティはその反粒子と同じである。クォーク自身のパリティを正と定義するので、反クォークのパリティは負になる\*26。基底状態にある複合系のパリティは、それを構成しているもののパリティの掛け算である（「加算的」である電荷やストレンジネスなどと対照的に、パリティは「積算的」量子数であるという）\*27。ゆえに、バリオン八重項と十重項は  $(+1)^3$  でパリティ正を、一方、擬スカラーとベクトル中間子九重項は  $(-1)(+1)$  でパリティ負をもつ（「擬」という接頭語から粒子のパリティがわかる）。(二つの粒子の) 励起状態では、余分な係数  $(-1)^l$  がある。ここで  $l$  は軌道角運動量である [18]。よって、一般的には、中間子は  $(-1)^{l+1}$  のパリティをもつ (表 4.6)。一方で、光子はベクトル粒子で (それは、ベクトルポテンシャル  $A_\mu$  で表現される)、スピンは 1、内部パリティは -1 である。

強い相互作用と電磁気相互作用における鏡像対称性が意味するのは、そのような過程のすべてでパリティが保存しているということである。元々は、誰もがそれが弱い相互作用にも当てはまると確信していた。しかし、1950 年代初頭に「タウ・シータ・バズル」として知られている厄介な矛盾が出現した。当時  $\tau$  と  $\theta$  とよばれた 2 種類の

\*26 この選択は完全に任意である。反対にしてもまったく問題ない。実際、原理的には、クォークのフレーバーのいくつかに対して正、残りのクォークに対して負を割り振ることもできた。これに従うとハドロンのパリティは別のセットになったが、パリティの保存はそれでも成立した。ここで採用しているルールはあきらかに最も単純で、かつ、よく使われている割り振り方である。

\*27 この違いは見た目より小さい。ある意味、表記法の違いによる結果だ。几帳面に無矛盾性を追求すると、パリティ演算子は指数関数を使って  $P = e^{i\pi K}$  と書く。ここで、演算子  $K$  は、たとえば、スピンのような役割を果たす (式 (4.28))。  $K$  の固有値は、 $P$  の +1 と -1 に対応して 0 と 1 である。そして、パリティの掛け算は  $K$  の足し算に対応する。

ストレンジ中間子は、同じ質量、同じスピン（ゼロ）、同じ電荷などを持ち、あらゆる観点で同一のように思われた。しかし、片方が二つのパイ中間子に、もう一方が三つのパイ中間子に崩壊する、すなわち、反対のパリティ状態に崩壊するという点だけは違っていた。

$$\begin{aligned}\theta^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0 & (P = (-1)^2 = +1) \\ \tau^+ &\rightarrow (\pi^+ + \pi^0 + \pi^0), (\pi^+ + \pi^+ + \pi^-) & (P = (-1)^3 = -1)\end{aligned}\quad (4.53)$$

同一の粒子が違ったパリティをもっているかのようで奇妙に見えた。別の案が1956年にリーとヤンによって提唱された。それによると、 $\tau$ と $\theta$ は本当は同じ粒子で（現在では $K^+$ として知られている）、一方の崩壊ではたんにパリティが保存されていないというのだ。この発想が元となり、弱い相互作用におけるパリティ不変性の証明を探したが、その証拠がないことに気づき、実験的な検証を提案することとなった。

#### 4.4.2 荷電共役

古典電気力学は、あらゆる電荷の符号の変化に対して不変である。すなわち、ポテンシャルと場は符号を変えるが、それを補償する電荷係数がローレンツの法則中にあり、力は結局同じになる。素粒子物理学では、この「電荷の符号を変える」という概念を一般化する操作を導入する。それは荷電共役 $C$ とよばれ、粒子を反粒子に変換する。

$$C|p\rangle = |\bar{p}\rangle \quad (4.54)$$

「荷電共役」という言葉は多少誤解を生じさせる。というのは、 $C$ は、中性子のような中性の粒子に適用でき（反中性子を生成する）、電荷、バリオン数、レプトン数、ストレンジネス、チャーム、ビューティ、トゥールズなどあらゆる「内部」量子数の符号を変える一方で、質量、エネルギー、運動量、スピンを変化させない。

$P$ と同様に、 $C$ を二度演算すると元の状態に戻り、

$$C^2 = I \quad (4.55)$$

それゆえ $C$ の固有値は $\pm 1$ である。しかし、 $P$ と違って、自然界に存在する粒子のほとんどはあきらかに $C$ の固有状態ではない。というのは、 $|p\rangle$ がもし $C$ の固有状態ならば、

$$C|p\rangle = \pm|p\rangle = |\bar{p}\rangle \quad (4.56)$$

となり、 $|p\rangle$  と  $|\bar{p}\rangle$  は、違いがあったとしても符号の違いだけになり、同じ物理状態を表現していることになってしまう。ゆえに、粒子と反粒子の区別のない粒子のみが  $C$  の固有状態になり得る。このため、光子や八道説の図の真ん中に位置する  $\pi^0$ ,  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\rho^0$ ,  $\phi$ ,  $\omega$ ,  $\psi$  などが  $C$  の固有状態となる。光子は  $C$  の操作で符号を変える電磁場に伴随する量子なので、光子の「荷電共役数」が  $-1$  であることは理にかなっている。スピン  $1/2$  の粒子と反粒子で構成され、角運動量  $l$  とスピンの合計が  $s$  である系は  $C$  の固有値が  $(-1)^{l+s}$  となることを示せる [19]。クォーク模型によると、中間子はまさにこのようなかたちを取っている。擬スカラーは  $l=0$  で  $s=0$  なので  $C=+1$  で、ベクトルは  $l=0$  で  $s=1$  なので  $C=-1$  である (表 4.6 のように、まるで  $C$  は多重項すべてに対して意味のある量子数であるかのようにたびたび列記されるが、実際のところ、八道説の図の真ん中に対してだけ正しい意味をもつ)。

荷電共役は積算的な量子数で、パリティ同様、強い相互作用と電磁気相互作用では保存する。ゆえに、たとえば、 $\pi^0$  は二つの光子に崩壊するが

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad (4.57)$$

( $n$  個の光子に対しては  $C = (-1)^n$  なので、この場合は崩壊の前後で  $C = +1$  である)、三つの光子には崩壊できない。同様に、 $\omega$  は  $\pi^0 + \gamma$  に崩壊するが、 $\pi^0 + 2\gamma$  には決して崩壊しない。強い相互作用では、荷電共役不変性より、たとえば、

$$p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \quad (4.58)$$

という反応で荷電パイ中間子のエネルギー分布は (平均すると) 同じでなければならない [20]。一方、荷電共役は弱い相互作用では対称ではないので、ニュートリノに適用すると (左巻きであることを思い出そう)  $C$  変換で左巻きの反ニュートリノになるはずであるが、そうはならない。よって、ニュートリノを含む過程では、いかなるときも  $C$  変換した過程は物理的にあり得ない。そして、純粹にハドロンだけが寄与する弱い相互作用においても  $P$  同様  $C$  の破れを示す。

$C$  の固有状態の粒子はあまり多くないので、素粒子物理学における直接の応用は限られている。強い相互作用だけに話を絞り、適当なアイソスピン変換と組み合わせると  $C$  変換の威力は多少拡張され得る。アイソスピン空間における軸 2 に対して  $180^\circ$  の回転は、 $I_3$  を  $-I_3$  に変換する\*28。たとえば、 $\pi^+$  は  $\pi^-$  になる。ここでもし荷電共役操作を行うと  $\pi^+$  に戻る。ゆえに、荷電パイ中間子は  $C$  だけの固有状態ではない

\*28 軸 1 を使う人もいる。あきらかに 1-2 平面上のどちらの軸を取ってもよい。

が、この二つの操作の組み合わせに対しては固有状態となっている。あまり意味はないが、その変換の掛け合わせは「 $G$  パリティ」とよばれている。

$$G = CR_2, \quad R_2 = e^{i\pi I_2} \quad (4.59)$$

ストレンジネス（あるいは、チャーム、ビューティ、トゥルース）をもたないすべての中間子は  $G_i$  の固有状態で\*29、アイソスピン  $I$  の多重項に対してその固有値は

$$G = (-1)^I C \quad (4.60)$$

で与えられる（問題 4.36）。ただし、ここで  $C$  は中性のメンバーの荷電共役数である。一つのパイ中間子では  $G = -1$  であり、 $n$  個のパイ中間子からなる系は

$$G = (-1)^n \quad (4.61)$$

となる。これは非常に便利な結果である。というのは、ある崩壊において何個のパイ中間子が放出され得るかわかる。たとえば、 $\rho$  は  $I = 1$  と  $C = -1$  をもつので  $G = +1$  であることから二つのパイ中間子に崩壊できるが三つには崩壊できない。一方、 $\phi$ ,  $\omega$ , そして  $\psi$ （すべてが  $I = 0$ ）は、三つに崩壊できるが二つには崩壊できない。

### 4.4.3 CP

これまで見てきたように、弱い相互作用はパリティ変換  $P$  のもとで不変ではない。最もあきらかな証拠はパイ中間子崩壊

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (4.62)$$

で放出される反ミュー粒子がいつも左巻きであるという事実である。そしてまた  $C$  に対しても弱い相互作用は不変ではない。というのは、この反応の荷電共役は

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (4.63)$$

であり、左巻きミュー粒子を伴うはずであるが、実際にはミュー粒子はいつも右巻きである。しかし、二つの操作を組み合わせると、対称な世界に戻る。 $CP$  は左巻き反

\*29 たとえば、 $K^+$  は  $C$  の固有状態ではなく、 $R_2$  で  $K^0$  になり、その後  $C$  で  $\bar{K}^0$  になる。 $R_2$  の代わりに適当な  $SU(3)$  変換を使うことで、アイデアを  $K$  中間子系に拡張することはできるが、 $SU(3)$  は強い相互作用において非常によい対称性というわけではないので、そうすることにわずかにためらいがある。

ミュー粒子を右巻きミュー粒子に変える。これはまさしくわれわれが自然の中で観測していることだ。パリティの破れに衝撃を受けた多くの人々はこの事実にも慰められた。われわれが直感的に長いこと話していたのは、たぶん、その組み合わせられた操作だったのだ。おそらく、右巻き電子の「鏡像」が意味するのは左巻きの陽電子だったに違いない\*30。いまわれわれがCPとよんでいるものを最初からパリティと定義しておけば、パリティの破れによるトラウマを避けられたかもしれない（少なくとも先延ばしできた）。用語をいまから変えるのは遅すぎるが、左と右が対称であるべきだという生まれもった感覚を慰めることの手助けには少なくともなる。

#### 4.4.3.1 中性 K 中間子

ゲルマンとパイスによる古い論文で初めて指摘されたように、CP不変性はK中間子系に対して奇妙な意味合いをもつ。図4.12の「箱型」ダイアグラムで現在のわれわれが表現する二次の弱い相互作用を通して、ストレンジネス+1をもつ $K^0$ がストレンジネス-1をもつ反粒子 $\bar{K}^0$ に変わり得ること

$$K^0 \rightleftharpoons \bar{K}^0 \tag{4.64}$$

に彼らは気づいた\*31。その結果、われわれが実験室で通常観測している粒子は $K^0$ や $\bar{K}^0$ ではなく、むしろ、それら二つの線形結合である。とくに、次のようにCPの固有状態を形成することができる。Kは擬スカラーなので

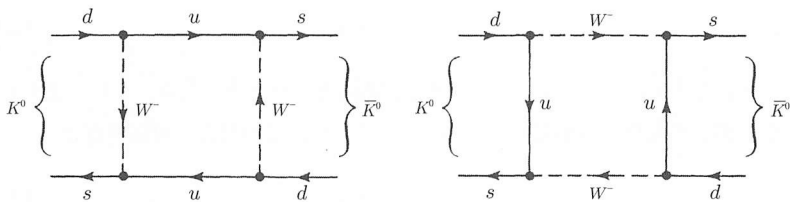


図4.12  $K^0 \rightleftharpoons \bar{K}^0$ に寄与するファインマン図（一つあるいは両方のuクォークを、cあるいはtクォークで置き換えたものを含め、他のダイアグラムもある）

\*30 ちなみに、古典電気力学では電荷を完全に擬スカラーとみなせる。Eは擬ベクトルに、Bはベクトルになるが、結果は同じになる。プラスの電荷の鏡像を正にするか負にするかはまったくもって趣味の問題である。しかし、電荷は変わらないというのが最もすっきりしているように思えるし、普通の慣例である。

\*31 このような内部変換の可能性があるのは、ほぼ中性K中間子系に限られた。「安定な」ハドロンで他に可能性があるのは、 $D^0/\bar{D}^0$ 、 $B^0/\bar{B}^0$ 、 $B_S^0/\bar{B}_S^0$ である（問題4.38）。

$$P|K^0\rangle = -|K^0\rangle, \quad P|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \quad (4.65)$$

となる。一方、式(4.54)から

$$C|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad C|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle \quad (4.66)$$

である。したがって、

$$CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \quad CP|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle \quad (4.67)$$

となり、それゆえ(規格化された)  $CP$  の固有状態は

$$|K_1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad (4.68)$$

である。ここで、

$$CP|K_1\rangle = |K_1\rangle, \quad CP|K_2\rangle = -|K_2\rangle \quad (4.69)$$

である。

弱い相互作用で  $CP$  が保存していると仮定すると、 $K_1$  は  $CP = +1$  の状態にのみ崩壊できるし、一方、 $K_2$  は  $CP = -1$  の状態に行かなければならない。典型的には、中性  $K$  中間子は二つ、あるいは三つのパイ中間子に崩壊する。しかし、二つのパイ中間子からなる状態はパリティ  $+1$  を、そして三つのパイ中間子からなる系は  $P = -1$  であること、その両方が  $C = +1$  であることをすでに見てきた。つまり、 $K_1$  は二つのパイ中間子に、 $K_2$  は三つのパイ中間子に崩壊する(決して二つには崩壊しない)\*32。

$$K_1 \rightarrow 2\pi, \quad K_2 \rightarrow 3\pi \quad (4.70)$$

さて、 $2\pi$  への崩壊の方が解放されるエネルギーがずっと大きいので、崩壊の速度もずっと速い。よって、 $K^0$  のビームからスタートすると

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1\rangle + |K_2\rangle) \quad (4.71)$$

$K_1$  成分が先に崩壊して消えてしまい、最終的には純粋な  $K_2$  のビームになる。ビームの生成地点近傍ではたくさんの  $2\pi$  崩壊事象があるが、生成地点からはるか遠くに離れると、 $3\pi$  崩壊事象だけが期待される。

\*32 実際のところ、角運動量の組み合わせによっては  $\pi^+\pi^-\pi^0$  系で  $CP = +1$  の状態をつくるのが可能である。しかし、これにより  $K_1$  は(まれに)  $3\pi$  に崩壊できるが、 $K_2$  は  $2\pi$  に崩壊できないという致命的な事実を変えることはない。

さて、われわれはあまりに多くのことを理解しなければならない。クローニンはそれを楽しい回想録にまとめた [22].

ここにいる紳士二人、ゲルマンとパイスが、短寿命の  $K$  中間子に加えて長寿命の  $K$  中間子が存在することを予言しました。その予言は、美しく、エレガントで、簡潔なものでした。世の中には純粋にその美しさのためだけに読むべき論文があります。彼らの論文は、1955年に *Physical Review* で発表されました。なんと素晴らしいことでしょうか。とりわけ、その内容を理解したと思ったときには、背骨が上下に震えるでしょう。当時、最も著名な理論家の多くがこの予言は本当にでたらめだと思いました。

しかし、それはでたらめではなかったのだ。1956年、レーダーマンと彼の共同研究者がブルックヘブンで  $K_2$  を発見した [23]。実験的に、それらの寿命は

$$\tau_1 = 0.895 \times 10^{-10} \text{ 秒}, \quad \tau_2 = 5.11 \times 10^{-8} \text{ 秒} \quad (4.72)$$

なので、 $K_1$  はたいいてい数 cm 飛んだ後に消えてしまうが、 $K_2$  は何 m も飛ぶ。 $K_1$  と  $K_2$  はどちらかが一方の反粒子というわけではないことに注意しよう。それぞれが、それぞれの反粒子をもっている ( $K_1$  は  $C = -1$  で、 $K_2$  は  $C = +1$  だ)。それらは、質量についてもわずかに異なる。実験によると [24]

$$m_2 - m_1 = 3.48 \times 10^{-6} \text{ eV}/c^2 \quad (4.73)$$

である。

中性  $K$  中間子系は、「粒子とは何なのか」という古い問題に微妙な修正を加えた。 $K$  中間子は、典型的には強い相互作用でストレンジネスの固有状態 ( $K^0$  と  $\bar{K}^0$ ) として生成されるが、 $CP$  の固有状態 ( $K_1$  と  $K_2$ ) として弱い相互作用で崩壊する。ではどちらが「真の」粒子なのであろうか。もし「粒子」は固有の寿命をもたなければならないという立場であれば、「真の」粒子は  $K_1$  と  $K_2$  である\*33。しかし、そこまで原理主義的になる必要はない。実際には、あるときはどちらか一方を使うのが便利で、またあるときは別の一方を使うのが便利である。その状況は多くの点で偏光に似ている。直線偏光は、左円偏光と右円偏光の重ね合わせと考えることができる。右円偏光を選択的に吸収する媒質に直線偏光のビームを入射させることを想像すると、ちょうど  $K^0$  ビームが  $K_2$  ビームに変わっていくように、そのビームは物質中を進めば進むほどより左円偏光になっていくだろう。しかし、その過程を直線偏光の状態として解析するのか、円偏光の状態として解析するか、どちらを選ぶかはほぼ趣味の問題である。

\*33 これは、偶然にもゲルマンとパイスがとった立場である。



## 4.4.3.2 CPの破れ

中性  $K$  中間子は、 $CP$  不変性の試験をするための完璧な実験室系を提供する。十分長いビームラインを使うことにより、純粋に長寿命成分だけのサンプルを意図してつくり出すことができる。もしここで  $2\pi$  崩壊を観測すれば、 $CP$  が破れていることを知ることになる。このような実験についてクロニンとフィッチが 1964 年に報告した [25]。57 フィートの長さのビームラインの終わりの地点で、彼らは総数 22700 の崩壊の中から 45 個の  $2\pi$  崩壊事象を見つけた。その割合はわずかだが (約  $1/500$ )、紛れもない  $CP$  の破れの証拠である。その事実が示すのは、長寿命の中性  $K$  中間子は結局のところ完璧な  $CP$  の固有状態ではなく、わずかに  $K_1$  成分が混じっているということだ。

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}(|K_2\rangle + \epsilon|K_1\rangle) \quad (4.74)$$

係数  $\epsilon$  は、完璧な  $CP$  不変から自然がどれだけずれているかを示す指標で\*34、実験的にはその大きさはおよそ  $2.24 \times 10^{-3}$  である。

その効果は小さいが、 $CP$  の破れは、パリティの破れが引き起こしたよりもはるかに深遠な問題を含んでいる。パリティ非保存は、すぐに弱い相互作用の理論に組み込まれた (実際のところ、ニュートリノに対する「新しい」理論であるワイルの方程式は、その翼を羽ばたかせようとは何年間も待っていた)。パリティの破れを取り扱うのはやさしかった。というのも、その効果が非常に大きかったからだ。すべてのニュートリノが左巻きで、50.01%ということがなかったからだ。そういう意味では、パリティは弱い相互作用において最大限破れている。対照的に、 $CP$  の破れはいかなる測定においても小さな効果だ。標準模型の範疇<sup>はんちゆう</sup>では、カビボ-小林-益川 (CKM) 行列中に経験則的な位相因子を含めることで  $CP$  の破れの効果を埋め込んでいる。その結果、(少なくとも) 3 世代のクォークが必要となる。実際、それを実現するために、まだチャームさえ発見される以前に小林と益川はクォークの 3 世代目を提案した [27]。

フィッチとクロニンの実験が、自然界の完全なる鏡像対称性に対する最後の望みを完全に破壊した。そして、これに続く  $K_L$  のセミレプトニック崩壊の研究で、より劇的な  $CP$  の破れの証拠があきらかになった。すべての  $K_L$  のうち 32% が、これまでに議論した  $3\pi$  に崩壊するが、41% は

\*34 これが、 $K_L$  が  $2\pi$  に崩壊する唯一の道筋ではない。標準模型では、 $K^0 \rightleftharpoons \bar{K}^0$  混合を含まず、代わりにいわゆる「ペンギン」ダイアグラムに関連づけられる小さな「直接的」 $CP$  の破れもある (問題 4.40)。  $K_L \rightarrow 2\pi$  における直接的  $CP$  の破れは 1999 年に確かめられた [26]。

$$(a) \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{あるいは} \quad (b) \pi^- + e^+ + \nu_e \quad (4.75)$$

のように崩壊する。CP 変換により (a) が (b) になることに注意すると、もし CP が保存しており、かつ  $K_L$  が純粋な固有状態なら、(a) と (b) は同じ確率で起こるだろう。しかし、実験家が示したのは、 $K_L$  が  $3.3 \times 10^{-3}$  だけ電子よりも陽電子により多く崩壊するということであった。これは、物質と反物質を絶対的に区別する最初の過程であり、不定性のない、表記法によらない正の電荷の定義を与える：「長寿命の中性  $K$  中間子の崩壊でより多く生成されるレプトンの電荷が正だ」。CP の破れが粒子と反粒子を不平等に取り扱うことを許すという事実は、物質優勢宇宙であることの理由なのかもしれない [29]。これについては、12 章でさらに調べてみる。

ほぼ 40 年間、実験室での CP の破れの観測は、 $K_L$  の崩壊でのみ行われてきた。1981 年に、カーターと三田は中性  $B$  中間子でも破れが起きているはずだということ指摘した [30]。この可能性を調べるために、膨大な数の  $B^0/\bar{B}^0$  対を生成するよう特別に設計された「B ファクトリー」が SLAC と KEK に建設された [31]。2001 年までに、それらの検出器（それぞれ「BaBar」と「Belle」）は、中性  $B$  の崩壊で CP が破れているという、論争の余地のない証拠を記録した [32]<sup>\*35</sup>。CP の破れが（式 (4.75) のように）比較的よくある崩壊中の小さな効果である  $K$  中間子系と違って、 $B$  の場合、極度にまれな崩壊中の大きな効果となる傾向がある。たとえば、 $B^0 \rightarrow K^+ + \pi^-$  の分岐比はわずか  $1.82 \times 10^{-5}$  であるが、この崩壊は CP の「鏡像」である  $\bar{B}^0 \rightarrow K^- + \pi^+$  よりも 13% 多く発生する。これまでのところ、 $K$  以外で CP の破れが検出された唯一の系である<sup>\*36</sup>。

#### 4.4.4 時間反転と CPT 定理

何らかの物理過程、たとえば二つのビリヤードボールの弾性散乱の映画をつくったとしよう。この映画を逆再生したら、それは起こり得る物理過程だろうか。それとも、それを視聴している人は自信をもって「いや、それは不可能だ。フィルムが逆向きに走っているに違いない」ということができるだろうか。古典的な弾性散乱の場合、「時間が逆向きな」過程は完全に可能である（きちんとっておくと、画像の中にたくさん

<sup>\*35</sup> 中性  $B$  の崩壊における「直接的」CP の破れは、どちらの研究所でも 2004 年に確認された [33]。

<sup>\*36</sup>  $B_s^0/\bar{B}_s^0$  混合の証拠 [34] や、さらに最近では  $D^0/\bar{D}^0$  混合の証拠 [35] があるが、どちらの場合もまだ CP の破れの証拠はない。b クォークは s クォークのように世代の境界を越えないと崩壊できないので、 $B$  中間子は  $K$  中間子のように比較的長寿命 ( $10^{-12}$  秒) である。対照的に c クォークは同じ世代内の s に行けるため、 $D$  中間子は短寿命 ( $10^{-15}$  秒) だ。D の方が生成するのは簡単だが、CP の破れを探すのにより適した場所が  $B$  系となっている理由の一つである。

のビリヤードボールを置くと、逆再生バージョンはまずあり得ない。ボールが勝手に集まって完璧な三角形になり、1個の手玉が離れていくのを見たら驚くに違わず、このフィルムは逆再生だと確信するだろう。しかし、それは、すべてのボールがまさに正しいスピードと角度で入ってくるという、必要な初期条件を設定することがとんでもなく難しいということではしかない。よって、初期条件によって「時間軸の向き」に対するヒントが与えられるかもしれないが、衝突自体を支配している法則は逆行であっても順行と同じように成立する。ごく最近まで、すべての素粒子間の相互作用にはこの時間反転不変性があると信じられてきた。しかし、パリティが破れていたことによって、時間反転が本当に保証されているのかという疑問が生じるのは自然だった [36]。

あきらかになってきたのは、時間反転の検証をするのは  $P$  や  $C$  の検証よりもはるかに困難であるということだ。まず、多くの粒子が  $P$  の固有状態であり、いくつかは  $C$  の固有状態であるが、 $T$  (映画を逆向きに再生する「時間反転」演算) の固有状態である粒子はない\*<sup>37</sup>。なので、 $P$  や  $C$  に対してやったように、たんに掛け算をすることで「 $T$  の保存」を確認することはできない。最も直接的な検証は、ある特定の反応 (たとえば、 $n + p \rightarrow d + \gamma$ ) に着目して、その逆 ( $d + \gamma \rightarrow n + p$ ) をやってみることだろう。適切な運動量、エネルギー、スピンであれば、反応の頻度はどちらも同じであるべきだ (これは「詳細平衡の定理」とよばれ、時間反転不変性から直接導かれる)。そのような試験が強い相互作用と電磁相互作用に対して可能で、さまざまな過程が調べられた。その結果はいつも否定的 ( $T$  の破れの証拠がない) であったが、それは驚くには値しない。 $P$  と  $C$  の経験に基づくと、もし時間反転の破れがあったとしたら弱い相互作用で見つかりと予期される。不運なことに、逆反応の実験を弱い相互作用に対して行うことは難しい。たとえば、典型的な弱い相互作用による崩壊  $\Lambda \rightarrow p^+ + \pi^-$  を考えてみよう。その逆過程は  $p^+ + \pi^- \rightarrow \Lambda$  だが、陽子とパイ中間子の強い相互作用が弱い相互作用を完全にかけ消してしまうので、そのような過程が見られることは決してない。強い相互作用と電磁気力の混入を防ぐには、ニュートリノの過程にいけばよいのかもしれない。しかし、ニュートリノに対して確かな測定を行うのはきわめて難しいし、ここでわれわれが見ようとしているのは非常に小さい効果なのだ。それゆえ、実際問題、 $T$  不変性の決定的な検証では、もし  $T$  が完璧な対称性であれば高い精度でゼロになるような量を注意深く測定することになる。古くからある例は、素粒

\*<sup>37</sup> 粒子は鏡に映ったものと同一になり得る。そして、もし電氣的に中性であれば、反粒子と同一になり得る。しかし、時間を逆行しているものと同一にはなり得ない (少なくとも、これまでにそういう例はない)。

子の静的な電気双極子モーメントだ<sup>\*38</sup>。たぶん、最も感度の高い実験的検証は中性子 [37] と電子 [38] の電気双極子モーメントの上限値で

$$d_n < (6 \times 10^{-26} \text{ cm})e, \quad d_e < (1.6 \times 10^{-27} \text{ cm})e \quad (4.76)$$

である。ここで、 $e$  は陽子の電荷である。 $T$  の破れを直接検証した実験はない。

しかしながら、この世界で時間反転が完璧ではあり得ないと信じるに足る説得力のある理由がある。それは、いわゆる  $CPT$  定理とよばれるもので、場の量子論で得られる最も深遠な結果の一つである [39]。ローレンツ不変性、量子力学、そして相互作用は場によるものだとする考えなど、最も一般的な仮定だけから、時間反転、荷電共役、そしてパリティの組み合わせ（掛け合わせる順番は問わない）は、いかなる相互作用においても正確に対称であるということがいえる。 $CPT$  という掛け算を保存することなしには、いかなる場の量子論も構築することができないのだ。もし、フィッチ-クローニンが実験で示したように  $CP$  が破れているのなら、それを吸収するための  $T$  の破れがあるに違いない。もちろん、あらゆる不可能性の主張と同様に、 $CPT$  定理はたんにわれわれの想像力不足を示しているものかもしれないので、実験により検証されなければならない。だからこそ、他の結果に依存しない  $T$  の破れの証拠を探すことが非常に重要なのだ。しかし、 $CPT$  定理には、実験的に確認すべき他の示唆もある。もし定理が正しければ、あらゆる粒子は、反粒子と完全に同じ質量と寿命をもたなければならない<sup>\*39</sup>。無数の粒子-反粒子対に対して測定が行われてきた。今日まで最も感度の高い試験は、 $K^0$  と  $\bar{K}^0$  の質量差で、 $K^0$  質量に対する割合として  $10^{-18}$  未満の精度までわかっている。ということで、 $CPT$  定理は理論的にはとてつもなく確固とした土台があり、実験的にも比較的安全である。実際、ある著名な理論家が表現したように、もし  $CPT$  の破れが見つかったら「すべてがてんやわんやの大騒ぎ」だ。

<sup>\*38</sup> 素粒子では、双極子モーメント  $d$  は、スピン  $s$  の軸に沿った向きを向くはずである。他を向くことはできない。しかし、 $d$  はベクトルであり、その一方で  $s$  は擬ベクトルである。よって、双極子モーメントがゼロでなければ、 $P$  の破れを意味する。同様に、 $s$  は時間反転で符号を変えるが、 $d$  は変えないので、 $d$  がゼロでないことも（さらに興味深いことに） $T$  の破れを意味する。さらに詳しいことを知りたければ、ラムジーを見よ [32]。

<sup>\*39</sup> これは、 $C$  不変性からも導かれる。しかし、後者が破れていることを知っているのも、質量と寿命の等価性は（偶然にも符号は反対であるが、磁気モーメントも）、はるかに弱い仮定である  $CPT$  対称性に基づいているということが重要になる。

参 考 書

- [1] たとえば, F. Halzen and A. D. Martin: Quarks and Leptons (John Wiley & Sons, 1984) Section 14.2 より完全 (だが少し古い) 議論としては, (a) E. L. Hill: Reviews of Modern Physics, **23**, 253 (1951).
- [2] このことに慣れていない場合は, 以下を参照するとよいだろう. D. Halliday, R. Resnick and J. Walker: Fundamentals of Physics, 6th edn (John Wiley & Sons, 2001) Section 11.3.
- [3] 群論の手頃な読みものとしては, M. Tinkham: Group Theory and Quantum Mechanics (Dover, 2003); (a) H. J. Lipkin: Lie Groups for Pedestrians (Dover, 2002).
- [4] たとえば, E. Merzbacher: Group Theory and Quantum Mechanics, 3rd edn (John Wiley & Sons, 1998) Chapter 17, Section 5.
- [5] 以下を参照. M. Tinkham: Group Theory and Quantum Mechanics (Dover, 2003); (a) H. J. Lipkin: Lie Groups for Pedestrians (Dover, 2002) 90, Chapter 16, Sections 3 and 4.
- [6] W. Heisenberg: Zeitschrift Fur Physik, **77**, 1 (1932). この古典的な論文の英訳は (a) D. M. Brink: Nuclear Forces (Pergamon, 1965).
- [7] V. B. Fliagin *et al.*: Soviet Physics, JETP, **35** (8), 592 (1959).
- [8] H. L. Anderson, E. Fermi, E. A. Long and D. E. Nagle: Physical Review, **85**, 936 (1952).
- [9] A. De Rujula, M. Georgi, and S. L. Glashow: Physical Review, D **12**, 147 (1975); (a) S. Weinberg: Transactions of the New York Academy Sciences, Series II, **38**, 185 (1977); (b) S. Gasiorowicz and J. L. Rosner: American Journal of Physics, **49**, 962 (1981); (c) J. Gasser and H. Leutwyler: Physics Report, **87**, 78 (1982).
- [10] B. R. Holstein: American Journal of Physics, **63**, 14 (1995).
- [11] 定性的にもっともらしいメカニズムは, 「MIT バッグモデル」として提案された. 半径  $R$  の球状殻内に閉じ込められた質量  $m$  の自由なクォークは, 有効質量  $m_{\text{eff}} = \sqrt{m^2 + (\hbar x/Rc)^2}$  を有することが見出される. ここで,  $x$  は約 2.5 という無次元数である. 陽子の半径 (たとえば,  $1.5 \times 10^{-13}$  cm) の場合, アップクォークとダウンクォークについて  $m_{\text{eff}} = 330 \text{ MeV}/c^2$  を得る. 以下を参照. F. E. Close: An Introduction to Quarks and Partons (Academic, 1979) Section 18.1.
- [12] 裸の質量の値は, Particle Physics Booklet (2006) より引用した. 軽いクォークの有効質量は, 中間子では幾分小さく, バリオンではより大きい. 最適な値は粒子に依存する. 表 5.3, 5.5, 5.6 を参照.
- [13] パリティ導入のわかりやすい紹介は, R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands: The Feynman Lectures on Physics, vol. III (Addison-Wesley, 1965) 17-22.
- [14] T. D. Lee and C. N. Yang: Physical Review, **104**, 254 (1956).
- [15] C. S. Wu *et al.*: Physical Review, **105**, 1413 (1957). わかりやすくするために, この実験に伴う厄介な技術的困難を無視している. コバルト核の向きをそろえるために, 試料を  $1^\circ \text{K}$  以下の温度で 10 分間保持しなければならなかった. それまでの実験で, パリティの破れの証拠が見つからなかったことは驚くべきことではない.
- [16] たとえば, バウリがワイスコフに送った手紙を参照. W. Pauli: Collected Scientific Papers, vol. I, (eds R. Kronig and V. F. Weisskopf) (Wiley-Interscience, 1964) xii; (a) P. Morrison: Scientific American, 45 (April 1957).
- [17] G. Backenstoss *et al.*: Physical Review Letters, **6**, 415 (1961); (a) M. Bardon *et al.*: Physical Review Letters, **7**, 23 (1961). それまでの実験はこの結果を予期した. (b) M.

- Goldhaber, L. Grodzins, and A. W. Snyder: *Physical Review*, **109**, 1015 (1958).
- [18] これは、波動関数の空間成分の角度部分、 $Y_l^m(\theta, \phi)$  である。たとえば、M. Tinkham: *Group Theory and Quantum Mechanics* (Dover, 2003); (a) H. J. Lipkin: *Lie Groups for Pedestrians* (Dover, 2002) 186 を参照 (または、問題 5.3)。
- [19] D. H. Perkins: *Introduction to High-Energy Physics*, 2nd edn (Addison-Wesley, 1982) 99.
- [20] C. Baltay *et al.*: *Physical Review Letters*, **15**, 591 (1965).
- [21] M. Gell-Mann and A. Pais: *Physical Review*, **97**, 1387 (1955). この論文は、パリティの破れがわかる前に書かれたものだが、 $CP$  を彼らの  $C$  に代えれば本質的な考え方は変わらない。もちろん、図 4.12 のようなクォーク・ダイアグラムは描かれていない。 $K^0$  と  $\bar{K}^0$  の両方が  $\pi^+ + \pi^-$  に崩壊できる。つまり、 $K^0 \Leftrightarrow \pi^+ + \pi^- \Leftrightarrow \bar{K}^0$  という事実に基づいて式 (4.64) を議論している。
- [22] J. W. Cronin and M. S. Greenwood: *Physics Today*, 38 (July 1982). クローニンは符号反転の表記法を使用し、式 (4.66) に  $-1$  を入れるが、物理は同じである。
- [23] K. Lande *et al.*: *Physical Review*, **103**, 1901 (1956).
- [24] そのような微小質量差の検出自体、魅力的な話である。たとえば、以下を参照。C. S. Wu *et al.*: *Physical Review*, **105**, 1413 (1957) Sect. 16.13.1.
- [25] J. H. Christenson *et al.*: *Physical Review Letters*, **13**, 138 (1964).
- [26] A. Alavi-Harati *et al.*: *Physical Review Letters*, **83**, 22 (1999); (a) V. Fanti *et al.*: *Physics Letters, B* **465**, 335 (1999). 初期の主張は (b) B. Schwarzschild: *Physics Today*, 17 (October 1988) を参照 (ただし、早すぎたようだ)。
- [27] M. Kobayashi and T. Maskawa: *Progress in Theoretical Physics*, **49**, 652 (1973).
- [28] S. Gjesdal *et al.*: *Physics Letters, B* **52**, 113 (1974); (a) S. Bennett *et al.*: *Physical Review Letters*, **19**, 993 (1967); (b) D. Dorfan *et al.*: *Physical Review Letters*, **19**, 987 (1967).
- [29] F. Wilczek: *Scientific American*, 82 (December 1980).
- [30] A. B. Carter and A. I. Sanda: *Physical Review, D* **23**, 1567 (1981).  $CP$  の破れの包括的な取り扱いについては以下。(a) I. I. Bigi and A. I. Sanda: *CP Violation* (Cambridge University Press, 2000).
- [31] H. R. Quinn and M. S. Witherell: *Scientific American*, 76 (October 1998).
- [32] A. Abashian *et al.*: *Physical Review Letters*, **86**, 2509 (2001); (a) B. Aubert *et al.*: *Physical Review Letters*, **86**, 2515 (2001).
- [33] B. Aubert *et al.*: *Physical Review Letters*, **93**, 131801 (2004); (a) Y. Chao *et al.*: *Physical Review, D* **71**, 031502 (2005).
- [34] O. Schneider: *Review of Particle Physics*, 836 (2006).
- [35] B. Aubert *et al.*: *Physical Review Letters*, **98**, 211802 (2007).
- [36] 時間反転の非公式だが優れた扱いは、O. E. Overseth: *Scientific American*, 88 (October 1969); (a) R. G. Sachs: *Science*, **176**, 587 (1972).
- [37] P. G. Harris *et al.*: *Physical Review Letters*, **82**, 904 (1999); (a) N. F. Ramsey: *Reports of Progress in Physics*, **45**, 95 (1982).
- [38] B. Regan *et al.*: *Physical Review Letters*, **88**, 071805 (2002).
- [39]  $CPT$  定理は、J・シュウィンガーと G・リューダースによって発見され、W. Pauli: *Niels Bohr and the Development of Physics* (ed W. Pauli) (McGraw-Hill, 1955) によって完成された。当初、誰も  $CPT$  定理に注意を払っていなかった。なぜなら、誰もが  $T$ ,  $C$ ,  $P$  はそれぞれすべてが完全な対称性だと思っていたからだ。パリティの破れ、そして、とくに  $CP$  の破れによって、この定理の重要性が強く認識された。

## 問題

- 4.1  $I, R_+, R_-, R_a, R_b, R_c$  すべてが正三角形について対称であることを証明せよ。[ヒント：これを行う方法の一つは、図 4.2 のように三つの頂点にラベルを付けることである。対称操作は、元々  $A, B, C$  のどれかにいたものを  $A$  にもっていく、もし  $A \rightarrow A$  の場合、 $B \rightarrow B$  と  $C \rightarrow C$  だし、そうでなければ、 $B \rightarrow C$  と  $C \rightarrow B$  となるので、そこから考える。]
- 4.2 以下の表における三角形群の「乗算表」の空欄を埋めよ。

	$I$	$R_+$	$R_-$	$R_a$	$R_b$	$R_c$
$I$						
$R_+$						
$R_-$						
$R_a$						
$R_b$						
$R_c$						

行  $i$ , 列  $j$  には、 $R_i R_j$  の積を入れる。これはアーベル群だろうか。どうすれば乗算表を見るだけでわかるだろうか。

- 4.3 (a) 三角形群の  $3 \times 3$  表現を以下のようにつくる。 $D(R)$  を演算子  $R$  の行列表現とする。 $D(R)$  が列行列  $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$  に作用すると、新しい列行列  $\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = D(R) \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$  になる。このとき  $A'$  は、元々  $A$  がいた位置に移った頂点である。したがって、たとえば、

$$D(R_+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。ここから、他の 5 個の行列を見つけること（行列の乗算が問題 4.2 で構築した表に合っているかどうかチェックした方がよいかもしれない）。

- (b) 三角形群は、他のどの群とも同じように、自明な 1 次元表現をもっている。非自明な 1 次元表現もあるが、その要素はすべて 1 で表されるわけではない。この非自明な 1 次元表現について考えよう。各群の要素はどのような数 ( $1 \times 1$  行列) で表されるか。この表現は信用できるだろうか。
- 4.4 正方形の対称性群を考えよう。それにはいくつの要素があるだろうか。乗算表を作成し、その群がアーベル群であるか否かを決定せよ。
- 4.5 (a) すべてのユニタリー  $n \times n$  行列の集合が群を構成することを示せ（たとえば、閉じていることを証明するためには、二つのユニタリー行列の積自身がユニタリーであることを示す必要がある）。
- (b) 行列式 1 をもつ  $n \times n$  のユニタリー行列の集合が群を構成することを示せ。
- (c)  $O(n)$  が群を構成することを示せ。
- (d)  $SO(n)$  が群を構成することを示せ。
- 4.6 2 次元のベクトル  $\mathbf{A}$  を考える。デカルト座標軸  $x, y$  における成分を  $(a_x, a_y)$  とする。 $x, y$  を角度  $\theta$  だけ反時計回りに回転した系  $x', y'$  におけるその成分  $(a'_x, a'_y)$  はどうなるだろうか。答

えを  $2 \times 2$  行列  $R(\theta)$  の形で表せ.

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

$R$  が直交行列であることを示せ. また, その行列式の値は何か. このような回転のセットはすべて群を構成するが, この群の名前は何か. 行列を掛けることによって,  $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$  となることを示せ. これはアーベル群か.

- 4.7 行列  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  を考える. この群は  $O(2)$  に含まれるか.  $SO(2)$  には含まれるか. また, これを問題 4.6 のベクトル  $A$  に作用させるとどうなるだろうか. これは平面内で可能となる回転を記述しているだろうか.
- 4.8 電子を文字通り, 半径  $r$ , 質量  $m$ , 角運動量  $\hbar/2$  で回転する古典的な硬い球と仮定しよう. 「赤道」上の点の速度  $v$  はどれくらいだろうか. また, 実験的に,  $r$  は  $10^{-16}$  cm 未満であることが知られている. この半径に対応する赤道上の速さはどれくらいか. また, このことから何を結論づけるか.
- 4.9 式 (4.12) を使用して角運動量を追加するときは, 加算前後の状態数を数えて結果を確認すると便利だ. たとえば, 例題 4.1 では, 最初に二つのクォークがあり, それぞれが  $m_s = +1/2$ , または  $m_s = -1/2$  をもつことができ, 全部で四つの可能性がある. スピンを加えた後, スピンが 1 となる組み合わせ (したがって  $m_s = 1, 0, -1$ ) とスピン 0 ( $m_s = 0$ ) の組み合わせで, 合計で四つの状態である.
- (a) 例題 4.2 に適用して確認せよ.
- (b) 角運動量 2, 1,  $1/2$  を足せ. 全角運動量の可能な値を列挙し, 状態を数えることによって答えを確認すること.
- 4.10 「昔の」ベータ崩壊反応  $n \rightarrow p + e$  が角運動量の保存を破ることを示せ (三つの粒子はすべてスピン  $1/2$  をもっている). もし, あなたがバウリだったなら, この反応が実際には  $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$  であることを提案して, ニュートリノにどのようなスピンを割り当ててだろうか.
- 4.11  $\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$  の崩壊について, 終状態における (重心系) 軌道角運動量量子数  $l$  の可能な値は何か.
- 4.12 水素原子内の電子で, 軌道角運動量量子数  $l = 1$  の状態を考える. 角運動量量子数  $j$  が  $3/2$  で, 全角運動量の  $z$  成分が  $(1/2)\hbar$  ならば,  $m_s = +1/2$  で電子を見つける確率はいくらだろうか.
- 4.13 スピン 2 の粒子が二つあり, それぞれ  $S_z = 0$  の状態であると仮定する. もし, 系の角運動量の合計を測れたとすると, 軌道角運動量が 0 の場合, どのような値を取ることができるか, また, それぞれの確率はどのようになるか. また, 確率の合計が 1 となることを確かめること.
- 4.14 スピン  $3/2$  の粒子とスピン 2 の粒子がある. これらの軌道角運動量が 0, 複合系全体のスピンの  $z$  成分が  $5/2$ , また,  $z$  成分が  $-1/2$  であることを既知とすると, スピン 2 の粒子の  $S_z$  の値はいくらか. また, それぞれの確率はいくらか, 確率の合計が 1 となることを確かめること.
- 4.15 式 (4.22) の  $\chi_{\pm}$  が式 (4.21) の  $\hat{S}_x$  の規格化された固有ベクトルであることを確認せよ. また, 対応する固有値を求めよ.
- 4.16 式 (4.20) 中のスピノルが規格化されているとき,  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  (式 (4.24)) を示せ.
- 4.17 (a) 式 (4.21) 中の  $\hat{S}_y$  の固有値と規格化された固有スピノルを求めよ.
- (b) 状態  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  にいる電子の  $S_y$  を測定すると, どのような値になるか. また, その確率を答えよ.
- 4.18 電子の状態を  $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$  であるとする.
- (a)  $S_x$  を測定した場合, どのような値になるか. また, それぞれの確率を求めよ.
- (b)  $S_y$  を測定した場合, どのような値になるか. また, それぞれの確率を求めよ.
- (c)  $S_z$  を測定した場合, どのような値になるか. また, それぞれの確率を求めよ.
- 4.19 (a)  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$  を示せ (ここでは「1」は実際には  $2 \times 2$  単位行列を意味し, 行列が特



定されていない場合は単位行列とする).

- (b)  $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z$ ,  $\sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y = i\sigma_x$ ,  $\sigma_z \sigma_x = -\sigma_x \sigma_z = i\sigma_y$  を示せ. また, これらの結果は,

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k$$

とすつきりとまとめられる ( $k$  については和を取る). ここで  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタであり,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

そして,  $\epsilon_{ijk}$  はレヴィ・チヴィタ記号で

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk = 123, 231, 312 \\ -1, & ijk = 132, 213, 321 \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

である.

4.20 問題 4.19 の結果を用いて以下のことを示せ.

- (a) 交換子  $[A, B] \equiv AB - BA$  を用いて,  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k$  を示せ.  
 (b) 反交換子  $\{A, B\} \equiv AB + BA$  を用いて,  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$  を示せ.  
 (c) 二つの任意のベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  について,  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  を示せ.

4.21 (a)  $e^{i\pi\sigma_z/2} = i\sigma_z$  を示せ.

- (b)  $y$  軸の周りに  $180^\circ$  の回転を表す行列  $U$  を見つけ, それが期待通り「上向きスピン」を「下向きスピン」に変換することを示せ.  
 (c) より一般的に,

$$U(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} - i(\hat{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin \frac{\theta}{2}$$

を示せ.  $U(\theta)$  は式 (4.28) で与えられ,  $\theta$  は  $\theta$  の大きさであり,  $\hat{\theta} \equiv \theta/\theta$  である. [ヒント: 問題 4.20 (c) を使用する.]

4.22 (a) 式 (4.28) の  $U$  がユニタリーであることを示せ.

- (b)  $\det U = 1$  であることを示せ. [ヒント: 直接示すこともできる (ただし, 脚注 \*10 を参照). あるいは, 問題 4.21 の結果を使用する.]

4.23 4.2.2 項のすべてを高次元のスピンに拡大することは, 比較的簡単である. スピン 1 の場合, 三つの状態 ( $m_s = +1, 0, -1$ ) があり, 列ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

でそれぞれ表すことができる. 唯一の問題は,  $3 \times 3$  行列  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$ ,  $\hat{S}_z$  を構築することである. 後者は簡単である.

- (a) スピン 1 の  $\hat{S}_z$  を構築せよ.  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$  を最も簡単に得るために昇降演算子  $S_\pm \equiv S_x \pm iS_y$  からスタートする. この状態は

$$S_\pm |sm\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} |s(m \pm 1)\rangle \quad (4.77)$$

である。

- (b) スピン 1 の行列  $\hat{S}_+$  と  $\hat{S}_-$  を構築せよ。
- (c) (b) の結果を用いてスピン 1 の  $\hat{S}_x$  と  $\hat{S}_y$  を求めよ。
- (d) 同様にスピン 3/2 の場合に  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$ ,  $\hat{S}_z$  を求めよ。
- 4.24 以下の粒子:  $\Omega^-, \Sigma^+, \Xi^0, \rho^+, \eta, \bar{K}^0$  についてのアイソスピンの割り当て  $|II_3\rangle$  を決定せよ (1 章の八道説ダイアグラムを参照)。
- 4.25 (a) ゲルマン-西島公式が  $u, d, s$  クォークでどのように機能するか確認せよ。
- (b) アイソスピンの割り当て  $|II_3\rangle$  は  $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$  反クォークでどのようになるか。割り当てがゲルマン-西島公式と合致することを確認せよ。[クォークを結合すると  $Q, I_3, A, S$  はすべて加算されるので,  $u, d, s, \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$  からつくられたすべてのハドロンに対してゲルマン-西島の式が成り立つ.]
- 4.26 (a) ゲルマン-西島公式 (式 (4.37)) は 50 年代初めに提案された。これはチャーム, ビューティ, トゥルースの発見よりもはるか昔である。クォークの状態表 (1.11 節) を用いて, クォークのアイソスピンの割り当ての式 (4.38) から, クォーク  $Q$  を表す一般公式を  $A, I_3, S, C, B, T$  を用いて表せ。
- (b)  $u$  と  $d$  が唯一ゼロではないアイソスピンをもっているクォークなので,  $U$  (アップネス) と  $D$  (ダウンネス) を用いて  $I_3$  を表せる。その場合どのような式になるだろうか。同様に, フレーバー数  $U, D, S, C, B, T$  を用いて  $A$  を表せ。
- (c) すべてをまとめて, フレーバー数で  $Q$  の公式を求めよ (つまり, (a) の式から  $A$  と  $I_3$  を取り除く)。最終的には, 3 世代クォーク模型におけるゲルマン-西島公式の最もきれいなものになる。
- 4.27 二つのアイソスピン  $-1/2$  の粒子は三重項状態のとき  $\mathbf{I}^{(1)} \cdot \mathbf{I}^{(2)} = 1/4$ , 一重項状態のときは  $-3/4$  であることを示せ。[ヒント:  $\mathbf{I}_{\text{tot}} = \mathbf{I}^{(1)} + \mathbf{I}^{(2)}$ ; 両辺を 2 乗してみる.]
- 4.28 (a) 式 (4.47) と (4.48) を参考にして,  $\mathcal{M}_a$  から  $\mathcal{M}_j$  までのすべての  $\pi N$  散乱振幅を,  $\mathcal{M}_1$  と  $\mathcal{M}_3$  を用いて計算せよ。
- (b) 式 (4.47) を一般化して, 10 個の散乱断面積全体を含むようにせよ。
- (c) 同様に式 (4.50) を一般化せよ。
- 4.29  $I = 3/2$  となるチャネルが支配的となる重心系エネルギーの場合, 以下の反応の散乱断面積の比を求めよ。(a)  $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Sigma^0$ ; (b)  $\pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^-$ ; (c)  $\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$ 。また,  $I = 1/2$  チャネルが支配的だった場合はどうだろうか。
- 4.30 以下の反応で可能となる合計アイソスピンはいくつか。(a)  $K^- + p \rightarrow \Sigma^0 + \pi^0$ ; (b)  $K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$ ; (c)  $\bar{K}^0 + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^0$ ; (d)  $\bar{K}^0 + p \rightarrow \Sigma^0 + \pi^+$ 。一つ, もしくは別のアイソスピンチャネルが支配的であると仮定して断面積の比を計算せよ。
- 4.31 図 4.6 のグラフから「共鳴」は (1232 だけでなく) 1525, 1688, 2190 と読み取れる。二つの曲線を比較して, それぞれの共鳴に対するアイソスピンを決定せよ。命名は,  $I = 1/2$  の任意の状態については  $N$  (質量) であり,  $I = 2/3$  の状態については  $\Delta$  である。したがって, 核子は  $N(939)$  であり, もとの  $\Delta$  は  $\Delta(1232)$  である。他の共鳴に名前を付け, Particle Physics Booklet を見て答えを確認すること。
- 4.32  $\Sigma^{*0}$  は  $\Sigma^+ + \pi^-, \Sigma^0 + \pi^0, \Sigma^- + \pi^+$  に崩壊する ( $\Lambda + \pi^0$  にも崩壊するがここでは見ない)。100 個の崩壊を観測したとすると, それぞれの崩壊はどれぐらい観測されるだろうか。
- 4.33 (a) アルファ粒子は二つの陽子と二つの中性子の束縛状態, すなわち  ${}^4\text{He}$  原子核だ。水素には質量数 4 となる同位体 ( ${}^4\text{H}$ ) はなく, リチウムにも  ${}^4\text{Li}$  はない。アルファ粒子のアイソスピンはいくつになるだろうか。
- (b)  $d + d \rightarrow \alpha + \pi^0$  の反応は観測されない。なぜか。
- (c)  ${}^4\text{Be}$  は存在するだろうか。また, 四つの中性子の束縛状態は存在するだろうか。
- 4.34 (a) 式 (4.52) を用いて  $P$  の固有値が  $\pm 1$  であることを証明せよ。

(b) スカラー関数  $f(x, y, z)$  は固有値  $+1$  の固有関数  $f_+(x, y, z)$  と固有値  $-1$  の固有関数  $f_-(x, y, z)$  の合計によってつくられる。関数  $f_+$  と関数  $f_-$  を  $f$  を使ってつくれ。[ヒント:  $Pf(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$ .]

- 4.35 (a) ニュートリノは  $P$  の固有状態か。もしそうなら固有パリティはどうなるか。  
 (b) いまや、 $\tau^+$  と  $\theta^+$  は実際には両方とも  $K^+$  であることがわかっている。式 (4.53) の崩壊のうち、どちらが実際にパリティ保存を破っているだろうか。  
 4.36 (a) 表 4.6 の情報を用いて  $\pi$ ,  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\phi$ ,  $f_2$  の  $G$  パリティを決定せよ。  
 (b)  $R_2|I0\rangle = (-1)^I|I0\rangle$  を示し、この結果を用いて式 (4.60) を確かめよ。  
 4.37  $\eta$  中間子のおもな崩壊モードは

$$\eta \rightarrow 2\gamma \text{ (39\%)}, \quad \eta \rightarrow 3\pi \text{ (55\%)}, \quad \eta \rightarrow \pi\pi\gamma \text{ (5\%)}$$

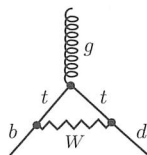
である。そして、これらは「安定な」粒子に分類される。なので、あきらかにこれらは純粋な強い相互作用ではない。一見、これは  $549 \text{ MeV}/c^2$  であるため、奇妙に思える。 $\eta$  は、 $2\pi$  または  $3\pi$  に崩壊できる十分な質量があるからだ。

- (a) なぜ強い相互作用と電磁気相互作用による  $2\pi$  モードが禁止されているのか説明せよ。  
 (b) なぜ  $3\pi$  モードが、強い相互作用では禁止されていて、電磁気相互作用では可能なのか説明せよ。

4.38 二つのハドロンが  $A \rightleftharpoons B$  の相互変換をするためには、同じ質量（実際には互いの反粒子でなければならないことを意味する）、同じ電荷、同じバリオン数が必要となる。標準模型では、通常の 3 世代で、 $A$  と  $B$  は中性の中間子でなければならないことを示せ。そして、それを構成する可能なクォークを特定せよ。このとき候補となる中間子は何か。また、なぜ中性子は、 $K^0$  と  $\bar{K}^0$  が混合して  $K_1$  と  $K_2$  をつくるように反中性子と混合しないのだろうか。なぜ中性のストレンジ・ベクトル中間子  $K^{0*}$  と  $\bar{K}^{0*}$  の混合が見えないのだろうか。

4.39 離れた銀河の人に、自分の心臓が左にあることをに伝えたいとする。どうしたら実物（螺旋ねじ、円偏光ビーム、またはニュートリノなど）を「手渡す」ことなく、これをあいまいさなくに伝えることができるだろうか。速く離れた銀河は反物質でつくられているかもしれない。返事を待つ余裕はないが、言葉を使うことは許されているとする。

4.40 荷電弱相互作用は、 $d, s, b$  が  $u, c, t$  に結合するが、(たとえば)  $d$  は  $s$  または  $b$  に直接行くことができない。しかし、このような結合は、いわゆる「ペンギン」ダイアグラムを介して間接的に起こることがある<sup>\*40</sup>。クォークは仮想  $W$  を放出し、その後再吸収し、グルーオンと相互作用する。



閉ループのないファインマン図をツリーダイアグラムとよぶ。 $\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$  を表すペンギンダイアグラムを作成し、同じ過程（後者はグルーオンがない）のツリーダイアグラムを作成せよ。どちらも、 $\bar{d}$  を傍観者とせよ。[直接的  $CP$  の破れは、これらの二つのダイアグラムの干渉からくる。]

<sup>\*40</sup> ここで、鳥のようなものを探さないこと。この名前はジョークである。この話は P. Woit: Not Even Wrong (Basic Books, 2006) の pp.54-55 によく書かれている。