付　録

A　ディラックのデルタ関数

ディラックのデルタ関数の入門

ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ は，原点で面積 1 の無限に高く無限に狭い釘状のものである（図 A.1）．とくに，

$$\delta = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \tag{A.1}$$

である．専門的にいうと，$x = 0$ で有限でないので，関数ではない．数学用語では，超関数や分布関数として知られている．これは，高さ n，幅 $1/n$ の四角形，あるいは，高さ n，底辺 $2/n$ の三角形，その他，好きなかたちの極限だと考えればよい（図 A.2）．

もし $f(x)$ が「普通の」関数なら，（つまり，別のデルタ関数ではなく，安全のために，たとえば，$f(x)$ が連続だとすると），積 $f(x)\delta(x)$ は，$x = 0$ を除き，ゼロである．

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x) \tag{A.2}$$

（これはデルタ関数に関して最も重要なことで，なぜ正しいかを理解するべきだ．重要なのは，積は $x = 0$ 以外ではつねにゼロなので，$f(x)$ を原点での値に置き換えたものでよいだろうということだ.）とくに，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\, dx = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = f(0) \tag{A.3}$$

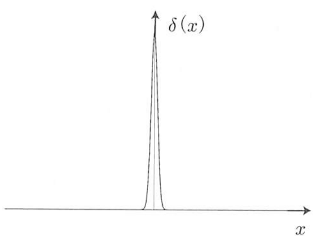


図 A.1　ディラックのデルタ関数（ただし，スパイクは無限に高く，無限に狭いと想像しなければならない）

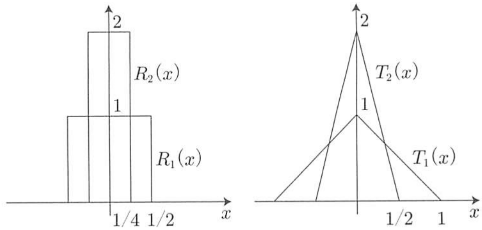


図 A.2　極限が $\delta(x)$ になる二つの関数の動き方

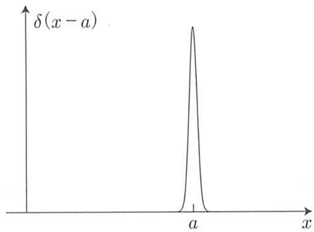


図 A.3　$\delta(x-a)$ の「グラフ」

である．この積分において，デルタ関数は $f(x)$ の $x=0$ における値を拾い上げる（これ以降，積分範囲は必ずしも $-\infty$ から ∞ まで取る必要はなく，デルタ関数を横切る $-\epsilon$ から ϵ で十分である）．

もちろん，$x=0$ でのスパイクは，他の違う点 $x=a$ に移すことができる

$$\delta(x-a)=\begin{Bmatrix} 0, & x\neq a \\ \infty, & x=a \end{Bmatrix}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,dx=1 \tag{A.4}$$

(図 A.3 を参照)．式 (A.2) は次のように一般化される．

$$f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a) \tag{A.5}$$

そして，式 (A.3) は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx=f(a) \tag{A.6}$$

になる．

k がゼロではない（実）数である場合，$\delta(kx)$ をどう解釈すべきだろうか．「普通」の関数 $f(x)$ との掛け算と積分を考えよう．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)\,dx$$

$y\equiv kx$ のように変数を変更して，$x=y/k$，$dx=1/k\,dy$ となるようにする．k が正の場

合，積分は依然として $-\infty$ から $+\infty$ まで実行されるが，k が負の場合は $x=\infty$ は $y=-\infty$ を意味するので，極限は反転する．「適切な」処置としてマイナス符号を付けることになる．したがって，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)\,dx = \pm\int_{-\infty}^{\infty} f(y/k)\delta(y)\frac{dy}{k}$$
$$= \pm\frac{1}{k}f(0) = \frac{1}{|k|}f(0) \qquad \text{(A.7)}$$

（下の符号は，k が負のとき適用され，示されている通り，k の絶対値を取ると整合性がとれている）．この文脈では，$\delta(kx)$ は $(1/|k|)\delta(x)$ と同じ働きをする．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\frac{1}{|k|}\delta(x)\right]dx \qquad \text{(A.8)}$$

これは任意の $f(x)$ に対して成り立つので，デルタ関数式は次の式に等しい[*1]．

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}f(x) \qquad \text{(A.9)}$$

われわれが分析したのは，$g(x)$ が x の関数であるときの一般的な形式 $\delta(g(x))$ の特別な場合である．一般に，$\delta(g(x))$ は，$g(x)$ がゼロになる点 x_1，x_2，$x_3, \cdots$ にスパイクがある．

$$g(x_i) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3, \cdots, n) \qquad \text{(A.10)}$$

i 番目のゼロ点の近傍では，$g(x)$ をテイラー展開することができる．

$$g(x) = g(x_i) + (x-x_i)g'(x_i) + \frac{1}{2}(x-x_i)^2 g''(x_i) + \cdots \simeq (x-x_i)g'(x_i) \qquad \text{(A.11)}$$

式 (A.9) を考慮すると，x_i におけるスパイクは，

$$\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i) \qquad (x \simeq x_i) \qquad \text{(A.12)}$$

となる．因子 $|g'(x_i)|^{-1}$ は，x_i におけるデルタ関数の「強さ」を示している．これを他のゼロ点のスパイクと合わせると，

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x-x_i) \qquad \text{(A.13)}$$

[*1] 最後のステップで読者は熟考するかもしれない．通常，二つの積分が等しくても，元の関数が等しいとはいえない．しかし，ここで重要なのは，任意の $f(x)$ に対して積分が等しいということだ．たとえば，$x=17$ の近傍でデルタ関数の式 $\delta(kx)$ と $(1/|k|)\delta(x)$ が異なると，その積分は $x=17$ で鋭いピークをもつ $f(x)$ のものとは等しくないだろう．だが，積分が等しくなければいけないので，デルタ関数式自体が等しいことになる．なぜなら，離れた点で異なっていたとしても，積分には何も寄与しないからだ．だから，式 (A.9) の両辺が $x=0$ 以外ではあきらかにゼロであることに注意すればよい．

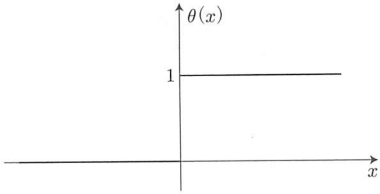


図 A.4 ヘヴィサイドの θ（「ステップ」）関数

という結論になる．したがって，$\delta(g(x))$ というかたちで書かれたものは，単純なデルタ関数の和で書くことができる[*2]．

例題 A.1 $\delta(x^2+x-2)$ を簡略化せよ．

答え：$g(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ である．$x=1$ と $x=-2$ でゼロになる．微分すると $g'(x)=2x+1$ なので $g'(x_1)=3$, $g'(x_2)=-3$ である．

よって

$$\delta(x^2+x-2)=\frac{1}{3}\delta(x-1)+\frac{1}{3}\delta(x+2)$$

ディラックのデルタ関数は，ヘヴィサイドのステップ関数の導関数と考えることができる（図 A.4）[*3]．

$$\theta(x)\equiv\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases} \tag{A.14}$$

あきらかに，$d\theta/dx$ は原点を除いてどこでもゼロであり，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\theta}{dx}dx=\theta(\infty)-\theta(-\infty)=1-0=1 \tag{A.15}$$

なので，$d\theta/dx$ は $\delta(x)$ の定義の条件（式 (A.1)）を満たす．

デルタ関数を 3（またはそれ以上の）次元に一般化するのは簡単なことだ．

$$\delta^3(\boldsymbol{r})=\delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{A.16}$$

この 3 次元デルタ関数は，発散する原点を除いてどこでも 0 である．$\delta^3(\boldsymbol{r})$ に対する三重積分は 1 である．

$$\int\delta^3(\boldsymbol{r})\,d^3r=\int\delta(x)\delta(y)\delta(z)\,dx\,dy\,dz=1 \tag{A.17}$$

[*2] 式 (A.13) は，導出に使用したテイラー展開を途中で止めたにもかかわらず，正確である（式 (A.11)）．$(x-x_i)$ のべきを含むので，x_i で「余分な」項がゼロであるからだ．

[*3] 不連続点の値はあまり重要ではないが，もし心配なら，$\theta(0)\equiv 1/2$ とすればよい．

と

$$\int f(\boldsymbol{r})\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,d^3r = f(\boldsymbol{r}_0) \tag{A.18}$$

のようになる．たとえば，点 $\boldsymbol{r}_0$ における点電荷 q の電荷密度（単位体積あたりの電荷）は，次のように書ける．

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \tag{A.19}$$

問　題

A.1 **(a)** $\displaystyle\int_0^3 (2x^2+7x+3)\delta(x-1)dx$ を求めよ．

(b) $\displaystyle\int_0^3 \ln(1+x)\delta(\pi-x)dx$ を求めよ．

A.2 式 (A.13) を用いて $\delta(\sqrt{x^2+1}-x-1)$ を計算せよ．

A.3 式 (A.13) を用いて $\delta(\sin x)$ を計算せよ．その関数を書け．

A.4 $f(y)=\displaystyle\int_0^2 \delta(y-x(2-x))dx$ を求めて，$y=-2$ から $y=+2$ までをプロットせよ．

A.5 $\displaystyle\int_{-1}^5 x^4\left[\frac{d^2}{dx^2}\delta(x-3)\right]dx$ を求めよ．［ヒント：部分積分を用いる．］

A.6 以下の積分を計算せよ．［有効数字 5 桁まで］

$$\int_{-1}^5 \theta(2x-4)e^{-3x}dx$$

A.7 $\displaystyle\int \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r})\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{b})d^3r$ を計算せよ．ここで，$\boldsymbol{a}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,2,1)$ で積分は $(2,2,2)$ を中心に半径 1.5 の球面だとする．

B　崩壊率と断面積

崩壊率と散乱断面積の公式のまとめ

B.1　崩　壊

粒子 1 が粒子 2, 3, 4, $\cdots, n$ に崩壊する場合を考えよう．

$$1 \to 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$

崩壊率は次の式で与えられる．

$$d\Gamma = |\mathscr{M}|^2 \frac{S}{2\hbar m_1} \left\{ \left[\frac{c\, d^3\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right] \left[\frac{c\, d^3\boldsymbol{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right] \cdots \left[\frac{c\, d^3\boldsymbol{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right] \right\} \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \cdots - p_n) \tag{B.1}$$

ここで $p_i = (E_i/c, \boldsymbol{p}_i)$ は i 番目の粒子の 4 元運動量である（質量 m_i なので，$E_i = c\sqrt{\boldsymbol{p}_i{}_i^2 + m_i^2 c^2}$）．崩壊している粒子は静止しているとする．$p_1 = (m_1 c, 0)$．$S$ は，終状態における j 個の同一粒子のための統計的因子でそれぞれ $1/j!$ である．

B.1.1　二体崩壊

終状態に二つの粒子がある場合，積分はあらわに実行できる．全崩壊率は，

$$\Gamma = \frac{S|\boldsymbol{p}|}{8\pi\hbar m_1^2 c} |\mathscr{M}|^2 \tag{B.2}$$

であり，ここで，$|\boldsymbol{p}|$ は，外に出て行くそれぞれの運動量の大きさである．

$$|\boldsymbol{p}| = \frac{c}{2m_1} \sqrt{m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2} \tag{B.3}$$

とくに，外に出て行く粒子に質量がない場合，$|\boldsymbol{p}| = m_1 c/2$ なので，

$$\Gamma = \frac{S}{16\pi\hbar m_1} |\mathscr{M}|^2 \tag{B.4}$$

になる．

B.2　断面積

粒子 1 と粒子 2 が衝突し，粒子 3, 4, $\cdots, n$ が生成されるとする．

$$1 + 2 \to 3 + 4 + \cdots + n$$

断面積は次の式で与えられる．

$$d\sigma = |\mathscr{M}|^2 \frac{\hbar^2 S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}}$$

$$\times\left\{\left[\frac{c\,d^3\boldsymbol{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3}\right]\left[\frac{c\,d^3\boldsymbol{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}\right]\cdots\left[\frac{c\,d^3\boldsymbol{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n}\right]\right\}$$
$$\times(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-\cdots-p_n) \tag{B.5}$$

ここで，（以前のように）$p_i = (E_i/c, \boldsymbol{p}_i)$ は粒子 i の 4 元運動量（質量 m_i），$E_i = c\sqrt{\boldsymbol{p}_i{}_i^2 + m_i^2 c^2}$ である．S は統計的因子（終状態の j 個の同一粒子各々について $1/j!$）である．

B.2.1　二体散乱

終状態が粒子 2 個の場合，積分はあらわに実行できる．

(a) 重心系では

$$\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-(m_1m_2c^2)^2} = (E_1+E_2)|\boldsymbol{p}_1|/c \tag{B.6}$$

と

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathscr{M}|^2}{(E_1+E_2)^2}\frac{|\boldsymbol{p}_f|}{|\boldsymbol{p}_i|} \tag{B.7}$$

である．ここで，$|\boldsymbol{p}_i|$ は入射粒子の運動量の大きさであり，$|\boldsymbol{p}_f|$ は出て行く粒子それぞれの運動量の大きさである．とくに，弾性散乱（$A+B\to A+B$）の場合は，$|\boldsymbol{p}_i| = |\boldsymbol{p}_f|$ であるので，$E \equiv (E_1+E_2)/2$ となる．

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{16\pi}\right)^2 \frac{S|\mathscr{M}|^2}{E^2} \tag{B.8}$$

(b) 実験室系（粒子 2 が静止している）では

$$\sqrt{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)^2-(m_1m_2c^2)^2} = m_2c|\boldsymbol{p}_1| \tag{B.9}$$

である．弾性散乱の場合 ($A+B\to A+B$),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{\boldsymbol{p}_3^2 S|\mathscr{M}|^2}{m_2|\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{p}_3|(E_1+m_2c^2)-|\boldsymbol{p}_1|E_3\cos\theta} \tag{B.10}$$

とくに，入射粒子に質量がない（$m_1 = 0$）場合，これは

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar E_3}{8\pi m_2 c E_1}\right) S|\mathscr{M}|^2 \tag{B.11}$$

のように簡単になる．もし反跳が無視できる（$m_2c^2 \gg E_1$）ならば，式 (B.10) は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi m_2 c}\right)|\mathscr{M}|^2 \tag{B.12}$$

のようになる．出て行く粒子に質量がない場合（$m_3 = m_4 = 0$），式 (B.5) は，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)\frac{S|\mathscr{M}|^2|\boldsymbol{p}_3|}{m_2|\boldsymbol{p}_1|(E_1 + m_2c^2 - |\boldsymbol{p}_1|c\cos\theta)} \tag{B.13}$$

のようになる．

C　パウリ行列とディラック行列

パウリ行列とディラック行列

C.1　パウリ行列

パウリ行列は，エルミート，かつユニタリー，かつトレースがゼロの 2×2 行列 3 個からなる

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{C.1}$$

（多くの場合，数字による指標を使用する．$\sigma_1 = \sigma_x$，$\sigma_2 = \sigma_y$，$\sigma_3 = \sigma_z$；$\boldsymbol{\sigma}$ は 4 元ベクトルの一部ではない．だから，上付きと下付き指標の区別もしない．$\sigma_1 = \sigma^1$，$\sigma_2 = \sigma^2$，$\sigma_3 = \sigma^3$）．

(a) 積のルール

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{C.2}$$

（2×2 の単位行列は第 1 項で示され，第 2 項では k について和を取る）．したがって，

$$\sigma_x{}^2 = \sigma_y{}^2 = \sigma_z{}^2 = 1 \tag{C.3}$$

$$\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z, \qquad \sigma_y\sigma_z = i\sigma_x, \qquad \sigma_z\sigma_x = i\sigma_y \tag{C.4}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad \text{（交換）} \tag{C.5}$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad \text{（反交換）} \tag{C.6}$$

となり，任意の二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して，

$$(\boldsymbol{a} \cdot \sigma)(\boldsymbol{b} \cdot \sigma) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + i\sigma \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{C.7}$$

である．

(b) 指　数

$$e^{i\theta \cdot \sigma} = \cos\theta + i\hat{\theta} \cdot \sigma \sin\theta \tag{C.8}$$

C.2　ディラック行列

ディラック行列は，トレースがゼロかつユニタリーな 4×4 行列 4 個からなる

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{C.9}$$

（ここで，1 は 2×2 単位行列，0 は 2×2 行列の 0 であり，σ^i はパウリ行列である．添字を下げると，「空間」成分の添字が反転し，$\gamma_0 = \gamma^0$，$\gamma_i = -\gamma^i$ となる）．補助的な行列も同

様に導入する．

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{C.10}$$

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \tag{C.11}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \tag{C.12}$$

任意の 4 元ベクトル a^μ に対して，次のように 4×4 行列 $\not{a}$ を定義する．

$$\not{a} \equiv a_\mu\gamma^\mu \tag{C.13}$$

(a) 積のルール

計量

$$g^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{C.14}$$

について（ここで，$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$ である），次を得る．

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \qquad \not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2a\cdot b \tag{C.15}$$

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4 \tag{C.16}$$

$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = -2\gamma^\nu, \qquad \gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu = -2\not{a} \tag{C.17}$$

$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu = 4g^{\nu\lambda}, \qquad \gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu = 4a\cdot b \tag{C.18}$$

$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu, \qquad \gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a} \tag{C.19}$$

(b) トレース定理

奇数個のガンマ行列の積のトレースはゼロである．

$$\mathrm{Tr}(1) = 4 \tag{C.20}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \qquad \mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4a\cdot b \tag{C.21}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}) \\ &\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4[(a\cdot b)(c\cdot d) - (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)] \end{aligned} \tag{C.22}$$

γ^5 は γ 行列の偶数個の積なので，$\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu) = 0$，$\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda) = 0$ である．γ^5 に偶数個の γ が掛けられたとき，

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5) = 0 \tag{C.23}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0, \qquad \mathrm{Tr}(\gamma^5\not{a}\not{b}) = 0 \tag{C.24}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} a_\mu b_\nu c_\lambda d_\sigma \tag{C.25}$$

となる．ここで，$\mu\nu\lambda\sigma$ が 0123 の偶数置換の場合は $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = -1$ で，奇数置換の場合は $+1$，そして，二つの添字が同じ場合は 0 である．また，

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\epsilon_{\mu\nu\kappa\tau} = -2(\delta^\lambda_\kappa\delta^\sigma_\tau - \delta^\lambda_\tau\delta^\sigma_\kappa) \tag{C.26}$$

である．

(c) 反交換関係

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \qquad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \tag{C.27}$$

D　ファインマン則（ツリーレベル）

QED，QCD と弱相互作用のファインマン則

D.1　外　線

$$\text{スピン}\ 0：(\text{なし})$$

$$\text{スピン}\ \frac{1}{2}：\begin{cases}\text{入射粒子}：u\\ \text{入射反粒子}：\bar{v}\\ \text{放出粒子}：\bar{u}\\ \text{放出反粒子}：v\end{cases}$$

$$\text{スピン}\ 1：\begin{cases}\text{入射}：\epsilon_\mu\\ \text{放出}：\epsilon_\mu^*\end{cases}$$

D.2　伝播関数

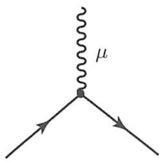
$$\text{スピン}\ 0：\frac{i}{q^2-(mc)^2}$$

$$\text{スピン}\ \frac{1}{2}：\frac{i(\not{q}+mc)}{q^2-(mc)^2}$$

$$\text{スピン}\ 1：\begin{cases}\text{無質量}：\dfrac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\\[2ex] \text{有質量}：\dfrac{i[g_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu/(mc)^2]}{q^2-(mc)^2}\end{cases}$$

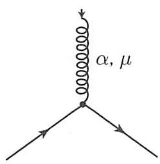
D.3　バーテックス因数

QED:

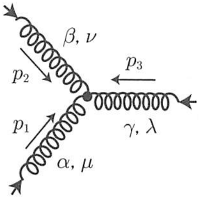


$$ig_e\gamma^\mu \quad (g_e=\sqrt{4\pi\alpha})$$

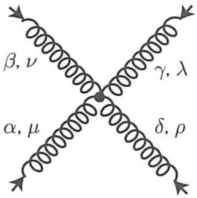
QCD:



$$\frac{-ig_s}{2}\lambda^\alpha\gamma^\mu$$

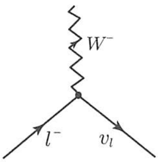


$$-g_s f^{\alpha\beta\gamma}[g_{\mu\nu}(q_1 - q_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(q_2 - q_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(q_3 - q_1)_\nu]$$



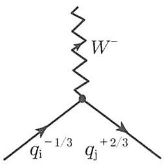
$$-g_s^2[f^{\alpha\beta\eta}f^{\gamma\delta\eta}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) + f^{\alpha\delta\eta}f^{\beta\gamma\eta}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) + f^{\alpha\gamma\eta}f^{\delta\beta\eta}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})]$$

GWS:



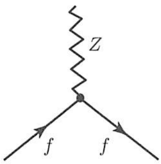
$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma^5)$$

（ここで，l は任意のレプトン，ν_l はそれに対応するニュートリノである.）



$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma^5)V_{ij}$$

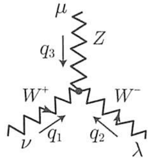
（ここで，$i = u, c, t$ で，$j = d, s, b$ であり，V は CKM 行列である.）



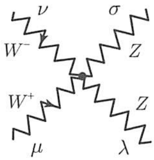
$$\frac{-ig_z}{2}\gamma^\mu(c_V^f - c_A^f\gamma^5)$$

（ここで，f はクォークかレプトンである. c_V と c_A は以下の表で与えられる.）

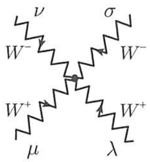
f	c_V	c_A
$\nu_e,\ \nu_\mu,\ \nu_\tau$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$e^-,\ \mu^-,\ \tau^-$	$-\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_w$	$-\frac{1}{2}$
$u,\ c,\ t$	$\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\sin^2\theta_w$	$\frac{1}{2}$
$d,\ s,\ b$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_w$	$-\frac{1}{2}$



$$ig_w \cos\theta_w [g_{\nu\lambda}(q_1 - q_2)_\mu + g_{\lambda\mu}(q_2 - q_3)_\nu + g_{\mu\nu}(q_3 - q_1)_\lambda]$$



$$ig_w^2 \cos^2\theta_w (2g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})$$

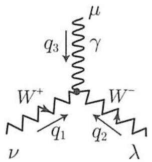


$$ig_w^2 (2g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})$$

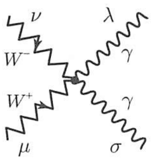
弱い相互作用の結合定数は電磁相互作用の結合定数と関係づけられる．

$$g_w = \frac{g_e}{\sin\theta_w}, \qquad g_z = \frac{g_e}{\sin\theta_w \cos\theta_w}$$

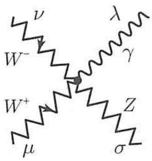
光子と W，Z との「混合」結合もある．



$$ig_e [g_{\nu\lambda}(q_1 - q_2)_\mu + g_{\lambda\mu}(q_2 - q_3)_\nu + g_{\mu\nu}(q_3 - q_1)_\lambda]$$



$$-ig_e^2 (2g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})$$



$$-ig_e g_w \cos\theta_w (2g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})$$