8.6 Compton Scattering つづき

ある特定の偏光をもった状態での断面積を計算してみる。
真空中の自由光子が横波であるようなローレンツゲージで式(8.74)の結果を計算して求める。

外線光子の偏光ベクトル $\varepsilon = (0, \boldsymbol{\varepsilon})$, $\varepsilon' = (0, \boldsymbol{\varepsilon}')$ について

$$\varepsilon k = -\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{k} = 0 \quad , \quad \varepsilon' k' = -\boldsymbol{\varepsilon}'\cdot\boldsymbol{k}' = 0 \qquad (8.75a)$$

となる。

簡単にするためにLab系で考えると、$p = (m, 0, 0, 0)$ となるので、

$$p\varepsilon = p\varepsilon' = 0 \qquad (8.75b)$$

となる。

また、反交換関係 $[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]_+ = 2g^{\alpha\beta}$, Dirac eq. $(\not{p} - m)u(p) = 0$ より

$$\not{p}\not{\varepsilon}u = -m\not{\varepsilon}u \quad , \quad \not{p}\not{\varepsilon}'u = -m\not{\varepsilon}'u$$

$$\left(\begin{aligned} \because\ \not{p}\not{\varepsilon}u &= \underline{\underline{\gamma^\mu}} p_\mu \underline{\underline{\gamma^\nu}} \varepsilon_\nu u \qquad \text{) } [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu} \\ &= -\gamma^\nu\gamma^\mu \varepsilon_\nu p_\mu u + 2\underbrace{g^{\mu\nu}\varepsilon_\nu p_\mu}_{=\varepsilon p\ =0\ (8.75b)} u \\ &= -\not{\varepsilon}\not{p}u \\ &= -m\not{\varepsilon}u \qquad \text{) } (\not{p}-m)u = 0 \end{aligned}\right)$$

以上のことから、(8.59) の $\mathcal{M}_a$, $\mathcal{M}_b$ は

$$\mathcal{M}_a = -ie^2 \frac{\bar{u}'\not{\varepsilon}'(\not{f}_1 + m)\not{\varepsilon}u}{2(pk)} \qquad \text{) } f_1 \equiv p + k \quad (8.57)$$

$$= -ie^2 \frac{\bar{u}'\not{\varepsilon}'(\not{p} + \not{k} + m)\not{\varepsilon}u}{2(pk)} \qquad \text{) } \not{p}\not{\varepsilon}u = -m\not{\varepsilon}u$$

$$= -ie^2 \frac{\bar{u}'\not{\varepsilon}'\not{k}\not{\varepsilon}u}{2(pk)}$$

$$\mathcal{M}_b = ie^2 \frac{\bar{u}'\not{\varepsilon}(\not{f}_2 + m)\not{\varepsilon}'u}{2(pk')} \qquad \text{) } f_2 = p - k' \quad (8.57)$$

$$= ie^2 \frac{\bar{u}'\not{\varepsilon}(\not{p} - \not{k}' + m)\not{\varepsilon}'u}{2(pk')} \qquad \text{) } \not{p}\not{\varepsilon}'u = -m\not{\varepsilon}'u$$

$$= -ie^2 \frac{\bar{u}'\not{\varepsilon}\not{k}'\not{\varepsilon}'u}{2(pk')}$$

(8.76)

(8.76) はゲージ不変な表現でない。例えば、$\varepsilon \to \varepsilon + \lambda k$ (λ: 定数) のゲージ変換下で $\mathcal{M}_a \to \mathcal{M}_a$ ($\because \not{k}\not{k} = k^2 = 0$) だが $\mathcal{M}_b \nrightarrow \mathcal{M}_b$。(これは今考えている系で $p\varepsilon$, $p\varepsilon'$ の項がおちたから。)

電子のスピンについて和をとって平均をとると、

$$\frac{1}{2}\sum_{spin}|M|^2 = \frac{1}{2}\sum_{spin}\left\{|M_a|^2+|M_b|^2+M_aM_b^*+M_bM_a^*\right\}$$

$$= \frac{e^4}{32m^2}\left\{\frac{Y_{aa}}{(pk)^2}+\frac{Y_{bb}}{(pk')^2}+\frac{Y_{ab}+Y_{ba}}{(pk)(pk')}\right\} \quad (8.77)$$

ただし

$$Y_{aa} = \mathrm{Tr}\{\not{\varepsilon}'\not{k}\not{\varepsilon}(\not{p}+m)\not{\varepsilon}\not{k}\not{\varepsilon}'(\not{p}'+m)\} \quad (8.78a)$$

$$Y_{bb} = \mathrm{Tr}\{\not{\varepsilon}\not{k}'\not{\varepsilon}'(\not{p}+m)\not{\varepsilon}'\not{k}'\not{\varepsilon}(\not{p}'+m)\} \quad (8.78b)$$

$$Y_{ab} = \mathrm{Tr}\{\not{\varepsilon}'\not{k}\not{\varepsilon}(\not{p}+m)\not{\varepsilon}'\not{k}'\not{\varepsilon}(\not{p}'+m)\} \quad (8.78c)$$

$$Y_{ba} = \mathrm{Tr}\{\not{\varepsilon}\not{k}'\not{\varepsilon}'(\not{p}+m)\not{\varepsilon}\not{k}\not{\varepsilon}'(\not{p}'+m)\} \quad (8.78d)$$

$$\left(\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{spin}|M_a|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{spin}M_aM_a^*\\ &= \frac{1}{2}\sum_{spin}\left(-ie^2\frac{\bar{u}'\not{\varepsilon}'\not{k}\not{\varepsilon}u}{2(pk)}\right)\left(ie^2\frac{\bar{u}\not{\varepsilon}\not{k}\not{\varepsilon}'u'}{2(pk)}\right)\\ &= \frac{e^4}{8(pk)^2}\mathrm{Tr}\left\{\not{\varepsilon}'\not{k}\not{\varepsilon}\frac{(\not{p}+m)}{2m}\not{\varepsilon}\not{k}\not{\varepsilon}'\frac{(\not{p}'+m)}{2m}\right\}\end{aligned}\right)$$

(8.66)と(8.76)あたりでの計算と同じようにできる。

$k \leftrightarrow -k'$, $\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon'$ のおきかえに対し $M_a \leftrightarrow M_b$ であり、

$$Y_{aa} \leftrightarrow Y_{bb},\quad Y_{ab} \leftrightarrow Y_{ba} \quad (8.79)$$

また、$Y_{ab} = Y_{ba} = Y_{ab}^*$ となる。

式(8.78)にはトレースの中に8つのγ-行列の積があるので、これをへらしていく。

$$\not{A}\not{B} = -\not{B}\not{A} + 2AB \quad (8.80a)$$

を用いる。

$$\left(\begin{aligned}\not{A}\not{B} &= \gamma^\mu A_\mu\gamma^\nu B_\nu = \gamma^\mu\gamma^\nu A_\mu B_\nu \quad と\quad [\gamma^\alpha,\gamma^\beta]_+ = 2g^{\mu\nu}\\ &= [-\gamma^\nu\gamma^\mu + 2g^{\mu\nu}]A_\mu B_\nu\\ &= -\not{B}\not{A} + 2AB\end{aligned}\right)$$

$A=B$ のとき $\not{A}\not{A} = A^2$ (8.80b)

であり、特に、 $\not{p}\not{p} = m^2,\ \not{k}\not{k} = 0,\ \not{\varepsilon}\not{\varepsilon} = \not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}' = -1$ (8.80c)

$(p=(m,0,0,0),\ k=(\omega,\boldsymbol{k}),\ \varepsilon=(0,\boldsymbol{\varepsilon}),\ \varepsilon'=(0,\boldsymbol{\varepsilon}'))$

$AB=0$ のときは $\not{A}\not{B} = -\not{B}\not{A}$ (8.80d)

となり、式(8.75) $\varepsilon k = \varepsilon' k' = p\varepsilon = p\varepsilon' = 0$ のときに役立つ。

以上の関係から Y_{aa} を計算してみると、$\not{k}\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}\not{k} = \not{k}(-1)\not{k} = -\not{k}\not{k} = 0$ より

$$Y_{aa} = \mathrm{Tr}\{\not{\varepsilon}'\underline{\not{k}\not{\varepsilon}}(\not{p}+m)\underline{\not{\varepsilon}\not{k}}\not{\varepsilon}'(\not{p}'+m)\}$$

$$= \mathrm{Tr}\{\not{\varepsilon}'\not{k}\not{\varepsilon}\not{p}\not{\varepsilon}\not{k}\not{\varepsilon}'(\not{p}'+\underline{m})\}$$

$\hookrightarrow$ Trの中のγ行列が奇数個なので0

$$= \mathrm{Tr}\{\not{\varepsilon}'\not{k}\not{\varepsilon}\underline{\underline{\not{p}\not{\varepsilon}}}\not{k}\not{\varepsilon}'\not{p}'\}$$

$$\not{p}\not{\varepsilon} = -\not{\varepsilon}\not{p} \quad (\because\ p\varepsilon = 0)$$

$$= \mathrm{Tr}\{\not{\varepsilon}'\not{k}\underbrace{(-\not{\varepsilon}\not{\varepsilon})}_{=1\ (8.80c)}\not{p}\not{k}\not{\varepsilon}'\not{p}'\}$$

$$= \mathrm{Tr}\{\not{\varepsilon}'\not{k}\underbrace{\not{p}\not{k}}_{=-\not{k}\not{p}+2pk\ ((8.80a))}\not{\varepsilon}'\not{p}'\}$$

$$= \mathrm{Tr}\{\not{\varepsilon}'\underbrace{(-\not{k}\not{k})}_{=0\ (8.80c)}\not{p}\not{\varepsilon}'\not{p}'\} + 2(pk)\,\mathrm{Tr}\{\underbrace{\not{\varepsilon}'\not{k}}_{=-\not{k}\not{\varepsilon}'+2\varepsilon'k\ (8.80a)}\not{\varepsilon}'\not{p}'\}$$

$$= 2(pk)\,\mathrm{Tr}\{(-\not{k}\underbrace{\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}'}_{=-1\ (8.80c)}\not{p}')\} + 2(pk)\,2(\varepsilon'k)\,\mathrm{Tr}\{\not{\varepsilon}'\not{p}'\}$$

$$= 2(pk)\,\mathrm{Tr}\{\not{k}\not{p}'\} + 4(pk)(\varepsilon'k)\,\mathrm{Tr}\{\not{\varepsilon}'\not{p}'\}$$

$\hookrightarrow$ Tr(AB) = Tr(BA)

$$= 2(pk)\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\underbrace{\not{k}\not{p}'+\not{p}'\not{k}}_{(8.80a)}\} + 4(pk)(\varepsilon'k)\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{\underbrace{\not{\varepsilon}'\not{p}'+\not{p}'\not{\varepsilon}'}_{(8.80a)}\}$$

$$= (pk)\,\mathrm{Tr}\{2kp'\} + 2(pk)(\varepsilon'k)\,\mathrm{Tr}\{2\varepsilon'p'\}$$

$$= (pk)\,2(kp')\underbrace{\mathrm{Tr}\,1}_{=4} + 2(pk)(\varepsilon'k)2(\varepsilon'p')\underbrace{\mathrm{Tr}\,1}_{=4}$$

$$= 8(pk)\left[2(\varepsilon'k)(\varepsilon'p') + (kp')\right]$$

4元運動量保存より $p'-k = p-k'$ なので

$$\varepsilon'p' = \varepsilon'(p-k'+k) = \varepsilon'k \quad (\because\ \varepsilon'k' = p\varepsilon' = 0\ (8.75))$$

$$kp' = k(p-k'+k) = kp - (p'-p+k')k' = kp - p'k' + pk'$$

今、$(p'+k')^2 = (p+k)^2$ より $\underbrace{p'^2}_{=m^2} + 2p'k' = \underbrace{p^2}_{=m^2} + 2pk$ から $p'k' = pk$ であるから、

$$kp' = pk'$$

以上より

$$Y_{aa} = 8(pk)\left[2(\varepsilon'k)^2 + (pk')\right] \qquad (8.81a)$$

となる

Y_{bb}はY_{aa}で $k \leftrightarrow -k'$, $\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon'$ のおきかえをしてえられるので

$$Y_{bb} = -8(pk')[2(\varepsilon k')^2 - (pk)] \qquad (8.81b)$$

となる。

干渉項Y_{ab}についても $p' = p + k - k'$ や (8.75), (8.80) の関係を用いて計算すると、

$$Y_{ab} = 8(pk)(pk')[2(\varepsilon\varepsilon')^2 - 1] - 8(k\varepsilon')^2(pk') + 8(k'\varepsilon)^2(pk) \qquad (8.81c)$$

となる。このY_{ab}は実で対称的 (つまり $Y_{ab} = Y_{ba}$).

よって、偏光した光子のコンプトン散乱の微分散乱断面積は、

式(8.81), (8.77), (8.63) より

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Lab.pol}} = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \frac{1}{2}\sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 \qquad \leftarrow (8.63)$$

$$\downarrow (8.77)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \frac{e^4}{32m^2}\left\{\frac{Y_{aa}}{(pk)^2} + \frac{Y_{bb}}{(pk')^2} + \frac{Y_{ab}+Y_{ba}}{(pk)(pk')}\right\} \qquad \downarrow (8.81)$$

$$= \frac{\alpha^2}{32m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left\{\frac{8(pk)[2(\varepsilon' k)^2 + (pk')]}{(pk)^2} + \frac{-8(pk')[2(\varepsilon k')^2 - (pk)]}{(pk')^2}\right.$$

$$\left. + \frac{8(pk)(pk')[2(\varepsilon\varepsilon')^2 - 1] - 8(k\varepsilon')^2(pk') + 8(k'\varepsilon)^2(pk)}{(pk)(pk')} \times 2\right\}$$

$$= \frac{\alpha^2}{4m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left\{\frac{2(\varepsilon' k)^2}{(pk)} + \frac{(pk')}{(pk)} - \frac{2(\varepsilon k')^2}{(pk')} + \frac{(pk)}{(pk')} + [2(\varepsilon\varepsilon')^2 - 1] \times 2\right.$$

$$\left. - \frac{2(k\varepsilon')^2}{(pk)} + \frac{2(k'\varepsilon)^2}{(pk')}\right\}$$

$$= \frac{\alpha^2}{4m}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left\{\frac{(pk')}{(pk)} + \frac{pk}{pk'} + 4(\varepsilon\varepsilon')^2 - 2\right\}$$

今 $pk = m\omega$, $pk' = m\omega'$ ($\because p = (m, 0, 0, 0)$) であるから、結局、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Lab.pol}} = \frac{\alpha^2}{4m}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left\{\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} + 4(\varepsilon\varepsilon')^2 - 2\right\} \qquad (8.82)$$

となり、これは Klien - Nishina の式として知られる。

ここから無偏光の断面積を得るには、始状態と終状態の光子の偏光について和をとって平均をとればよい。$\varepsilon\varepsilon' = -\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'$ であるから、式(1.71) より、

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{pol}} (\varepsilon\varepsilon')^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta) \qquad (8.83)$$

これを式(8.82)に応用することで、無偏光の断面積(8.74)を得る。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left\{ \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta \right\} \qquad (8.74)$$