QFT

伊東利将

2020/7/6

1　レプトン同士の衝突

ここでは、電子と陽電子について考える。この衝突により、荷電レプトン l^+ と l^- のペアが出来る場合を考察する。

$$e^+(\boldsymbol{p}_1, r_1) + e^-(\boldsymbol{p}_2, r_2) \to l^+(\boldsymbol{p'}_1, s_1) + l^-(\boldsymbol{p'}_2, s_2)$$

という過程はセクション 7.4 で扱ったが、その Feynman 振幅は

$$\mathscr{M}^{(2)}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = -ie^2\overline{u}_\mu(\boldsymbol{p}_2')\gamma^\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_1')D_{F\alpha\beta}(p_1+p_2)\overline{v}_e(\boldsymbol{p}_1)\gamma^\beta u_e(\boldsymbol{p}_2) \tag{1}$$

と書けることを以前導いた。これを僅かに修正したノーテーションで

$$\mathscr{M}(r_1, r_2, s_1, s_2) = ie^2\{\overline{u}_{s_2}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\alpha v_{s_1}(\boldsymbol{p}_1')\}_{(l)}\frac{1}{(p_1+p_2)^2}\{\overline{v}_{r_1}(\boldsymbol{p}_1)\gamma^\alpha u_{r_2}(\boldsymbol{p}_2\}_{(e)} \tag{2}$$

と書くことにする。l と e はそれぞれレプトンと電子を表すラベルである。

$$X = \frac{1}{4}\sum_{r_1,r_2,s_1,s_2} \mid \mathscr{M}(r_1, r_2, s_1, s_2) \mid^2 \tag{3}$$

と置く。$\gamma^{\alpha\dagger} = \gamma^0\gamma^\alpha\gamma^0$ であることを用いると

$$\mathscr{M}^*(r_1, r_2, s_1, s_2) = -ie^2\{\overline{v}_{s_1}(\boldsymbol{p}_1')\gamma_\beta u_{s_2}(\boldsymbol{p}_2')\}_{(l)}\frac{1}{(p_1+p_2)^2}\{\overline{u}_{r_2}(\boldsymbol{p}_2)\gamma^\beta v_{r_1}(\boldsymbol{p}_1\}_{(e)} \tag{4}$$

となるから、

$$X = \frac{e^4}{4(p_1+p_2)^4}A_{(l)\alpha\beta}B_{(e)}^{\alpha\beta} \tag{5}$$

となる。ここで、

$$A_{(l)\alpha\beta} = \sum_{s_1,s_2}\{\overline{u}_{s_2}(\boldsymbol{p}_2')\gamma_\alpha v_{s_1}(\boldsymbol{p}_2')\overline{v}_{s_1}(\boldsymbol{p}_1')\gamma_\beta u_{s2}(\boldsymbol{p}_2')\}_{(l)} \tag{6}$$

であり、これは

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}'_2 - m_l}{2m_l}\gamma^\alpha\frac{\not{p}'_1 - m_l}{2m_l}\gamma^\beta\right) \tag{7}$$

となる。この計算は 8.2 節で行っている。同様に

$$B_{(e)}^{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}_1 - m_e}{2m_e}\gamma^\alpha\frac{\not{p}_2 - m_e}{2m_e}\gamma^\beta\right) \tag{8}$$

$A_{(l)\alpha\beta}$ は計算すると

$$A_{(l)\alpha\beta} = \frac{1}{4m_l^2}\left(\mathrm{Tr}(\not{p}_2'\gamma_\alpha \not{p}_1'\gamma_\beta) - m_l^2 \mathrm{Tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta)\right) \tag{9}$$

となることが容易に分かる。更に γ 行列の性質から変形して

$$A_{(l)\alpha\beta} = \frac{1}{m_e^2}\{p'_{1\alpha}p'_{2\beta} + p'_{2\alpha}p'_{1\beta} - (m_e^2 + p'_1p'_2)g^{\alpha\beta}\} \tag{10}$$

となる。ここで用いた性質は

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta) = 4g^{\alpha\beta} \tag{11}$$

と

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta) = 4(g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}) \tag{12}$$

である。同様にして

$$B_{(e)}^{\alpha\beta} = \frac{1}{m_e^2}\{p_1^\alpha p_2^\beta + p_2^\alpha p_1^\beta - (m_e^2 + p_1p_2)g^{\alpha\beta}\} \tag{13}$$

となる。これを代入して

$$X = \frac{e^4}{2m_e^2 2m_l^2(p_1+p_2)^4}\{(p_1p'_1)(p_2p'_2) + (p_1p'_2)(p_2p'_1) + m_e^2(p'_1p'_2) + m_l^2(p_1p_2) + 2m_e^2m_l^2\} \tag{14}$$

が得られる。ここで、

$$p_1p'_1 = p_2p'_2 = E^2 - pp'\cos\theta \tag{15}$$

$$p_1p_2 = E^2 + p^2 \tag{16}$$

$$p_1p'_2 = p_2p'_1 = E^2 + pp'\cos\theta \tag{17}$$

$$p'_1p'_2 = E^2 + p'^2 \tag{18}$$

$$(p_1+p_2)^2 = 4E^2 \tag{19}$$

であるとき、$E \geq m_\mu$ のときは $p = E$ とする近似が使えて、さらに m_e は無視できる。この近似を用いると

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{\alpha^2}{16E^4}\left(\frac{p'}{E}\right)(E^2 + m_l^2 + p'^2\cos^2\theta) \tag{20}$$

となり、

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^4}\left(\frac{p'}{E}\right)\left(E^2 + m_l^2 + \frac{1}{3}p'^2\right) \tag{21}$$

と全断面積は計算される。$E \gg m_l$ のとき

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{\alpha^2}{16E^2}(1 + \cos^2\theta) \tag{22}$$

となり、

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2} \tag{23}$$

と全断面積は計算される。電子陽電子から μ 粒子 τ 粒子を生成する幅広いエネルギー領域で調べられている。図 8.2 と図 8.3 ではその実験結果が示されている。このシステムでは仮想光子のエネルギーは $2E$ であるが、それは $\frac{\hbar}{2E}$ のオーダーの時間スケールであることを仄めかしており、対応する距離スケールが $\frac{\hbar c}{2E}$ であることを意味している。$E \simeq 15$ GeV では $7\times\ 10^{-3}$ fm のオーダーの距離に対応する。このときこれは非常に小さな値なので、電子、μ 粒子、τ 粒子は点であると考えられる。