8.2 スピン和

始状態、終状態に対して、特定のスピン状態を考えてきたが、
実験的には、始状態は偏極してなく、終状態についてもスピン状態は特定できない。
このように偏極していない場合の散乱断面積は、
始状態については、平均をとる $\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\right)$
終状態については、和をとればよい $\left(\sum_{s=1}^{2}\right)$

コンプトン散乱の場合.

ファインマン振幅は. $$\mathcal{M} = \bar{u}_s(p')\,\Gamma\, u_r(p) \qquad (8.20)$$

$$\left(\begin{aligned} \mathcal{M}_a &= -e^2\,\bar{u}(p')\,\not{\varepsilon}(k')\, iS_F(q=p+k)\,\not{\varepsilon}(k)\,u(p) && (7.38a) \\ \mathcal{M}_b &= -e^2\,\bar{u}(p')\,\not{\varepsilon}(k)\, iS_F(q=p-k')\,\not{\varepsilon}(k')\,u(p) && (7.38b) \end{aligned}\right)$$

Γ は 4×4 行列.

偏極していない散乱断面積は. 次の量に比例する。

$$X \equiv \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}}_{\text{始状態に対する平均}}\ \underbrace{\sum_{s=1}^{2}}_{\text{終状態に対する和}} |\mathcal{M}|^2 \qquad (8.21)$$

$$\tilde{\Gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 \qquad (8.22)$$

と定義すると、

$$X = \frac{1}{2}\sum_r \sum_s \left(\bar{u}_s(p')\Gamma u_r(p)\right)\left(\bar{u}_s(p')\Gamma u_r(p)\right)^*$$

$$= \frac{1}{2}\sum_r \sum_s \left(\bar{u}_s(p')\Gamma u_r(p)\right)\left(\bar{u}_r(p)\tilde{\Gamma} u_s(p')\right) \qquad (8.23)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_s u_{s\delta}(p')\bar{u}_{s\alpha}(p')\right)\Gamma_{\alpha\beta}\left(\sum_r u_{r\beta}(p)\bar{u}_{r\gamma}(p)\right)\tilde{\Gamma}_{\gamma\delta}$$

と書ける。

正のエネルギー射影演算子

$$\Lambda^{+}_{\alpha\beta}(p) = \left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} = \sum_{r=1}^{2} u_{r\alpha}(p)\overline{u}_{r\beta}(p) \qquad (8.24a)$$

を使うと、

$$X = \frac{1}{2}\Lambda^{+}_{\delta\alpha}(p')\Gamma_{\alpha\beta}\Lambda^{+}_{\beta\gamma}(p)\widehat{\Gamma}_{\gamma\delta}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\Lambda^{+}(p')\Gamma\Lambda^{+}(p)\widehat{\Gamma}\right] \qquad (8.25)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}'+m}{2m}\Gamma\frac{\not{p}+m}{2m}\widehat{\Gamma}\right]$$

となる。

ファインマン振幅の形式として、他に、

$$\mathcal{M} = \bar{v}_s(p')\Gamma v_r(p) \quad (8.26a) \qquad (e^+ + \gamma \to e^+ + \gamma)$$

$$\mathcal{M} = \bar{u}_s(p')\Gamma v_r(p) \quad (8.26b) \qquad (2\gamma \to e^+ + e^-)$$

$$\mathcal{M} = \bar{v}_s(p')\Gamma u_r(p) \quad (8.26c) \qquad (e^+ + e^- \to 2\gamma)$$

これらについても同様に計算できる。

負のエネルギー射影演算子

$$\Lambda^-_{\alpha\beta}(p) = -\left(\frac{\not{p}-m}{2m}\right)_{\alpha\beta} = -\sum_r v_{r\alpha}(p)\bar{v}_{r\beta}(p) \quad (8.24b)$$

例えば、(8,26b)の場合、

$$X = \frac{1}{2}\sum_r \sum_s \left(\bar{u}_s(p')\Gamma v_r(p)\right)\left(\bar{v}_r(p)\tilde{\Gamma} u_s(p')\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\Lambda^+_{\delta\alpha}(p')\Gamma_{\alpha\beta}\Lambda^-_{\beta\gamma}(p)\tilde{\Gamma}_{\gamma\delta}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\Lambda^+(p')\Gamma\Lambda^-(p)\tilde{\Gamma}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}'+m}{2m}\Gamma\frac{\not{p}-m}{2m}\tilde{\Gamma}\right] \qquad (8,27)$$

(8,26a)の場合、 $X = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\Lambda^-(p')\Gamma\Lambda^-(p)\tilde{\Gamma}\right]$

(8,26c)の場合、 $X = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\Lambda^-(p')\Gamma\Lambda^+(p)\tilde{\Gamma}\right]$

特定のスピン状態に対する散乱振幅は、
ヘリシティ射影演算子を使って計算することもできる。

入射電子が正のヘリシティをもち、散乱電子が負のヘリシティをもつ過程を考える。
散乱断面積は、次の量に比例する。

$$X = \left|\bar{u}_2(p')\Gamma u_1(p)\right|^2$$

$$= \left(\bar{u}_2(p')\Gamma u_1(p)\right)\left(\bar{u}_1(p)\hat{\Gamma} u_2(p')\right) \qquad (8.28)$$

ヘリシティ射影演算子を導入する。

$$\Pi^{\pm}(p) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sigma_p\right)$$

$$\Pi^{+}(p)u_r(p) = \delta_{1r}u_r(p), \quad \Pi^{-}(p)u_r(p) = \delta_{2r}u_r(p)$$

これを使うと、

$$X = \left(\bar{u}_2(p')\Gamma\Pi^+(p)u_1(p)\right)\left(\bar{u}_1(p)\hat{\Gamma}\Pi^-(p')u_2(p')\right)$$

$$= \sum_r \sum_s \left(\bar{u}_s(p')\Gamma\Pi^+(p)u_r(p)\right)\left(\bar{u}_r(p)\hat{\Gamma}\Pi^-(p')u_s(p')\right) \quad \leftarrow (r,s)=(1,2) \text{ 以外ゼロ}$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\Lambda^+(p')\Gamma\Pi^+(p)\Lambda^+(p)\hat{\Gamma}\Pi^-(p')\right] \qquad (8.29)$$

(最後の式は、(8.23)と(8.25)において、$\Gamma \to \Gamma\Pi^+(p)$, $\hat{\Gamma} \to \hat{\Gamma}\Pi^-(p)$ におきかえたもの)

$E \gg m$ のとき、ヘリシティ演算子は、簡単になり、

$$\Pi^{\pm}(p) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) \qquad (E \gg m)$$

($E \gg m$ では、$E \simeq |p|$ であるから、

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \sigma\cdot\hat{p}\,\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} \simeq \sigma\cdot\hat{p} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} = \sigma_p \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix})$$

別冊問5.15より。

8.3 光子の偏極和

外線光子を含む過程に対して、ファインマン振幅は、

$$\mathcal{M} = \varepsilon_{r_1}^{\alpha}(k_1)\,\varepsilon_{r_2}^{\beta}(k_2)\cdots\mathcal{M}_{\alpha\beta\cdots}(k_1, k_2, \cdots) \tag{8.30}$$

(実偏極ベクトルとする)

ローレンツゲージを用いると、自由場のとき、$(\Box A = 0)$

$$A^{\mu}(x) = \text{const.}\ \varepsilon_r^{\mu}(k)\, e^{\pm ikx}$$

ゲージ変換

$$A^{\mu}(x) \longrightarrow A^{\mu}(x) + \partial^{\mu} f(x)$$

with $f(x) = \tilde{f}(k) e^{\pm ikx}$

$(\partial_{\mu} A^{\mu} = 0 \Rightarrow \Box f(x) = 0)$

$$\varepsilon_r^\mu(k)e^{\pm ikx} \longrightarrow \left[\varepsilon_r^\mu(k) \pm ik^\mu \tilde{f}(k)\right]e^{\pm ikx} \tag{8.31}$$

この変換に対して、散乱振幅が不変であるため、

$$\left(\varepsilon_{r_1}^\alpha(k_1) \pm ik^\alpha \tilde{f}(k_1)\right)\left(\varepsilon_{r_2}^\beta(k_2) \pm ik^\beta \hat{f}(k_2)\right)\cdots M_{\alpha\beta\cdots}(k_1, k_2, \cdots) = M$$

任意の $\tilde{f}(k_1), \tilde{f}(k_2), \cdots$ に対しての恒等式とみて、

$$k_1^\alpha M_{\alpha\beta\cdots}(k_1, k_2, \cdots) = k_2^\beta M_{\alpha\beta\cdots}(k_1, k_2, \cdots) = \cdots = 0 \tag{8.32}$$

(8.32)が計算においてどう関係するかを見る。

簡単な例として、1つの外線光子を考える。

$$M_r(k) = \varepsilon_r^{\alpha} M_{\alpha}(k)$$

このとき、(8.32)から、 $k^{\alpha} M_{\alpha}(k) = 0$ (8.33)

散乱断面積は、次の量に比例する。

$$X = \sum_{r=1}^{2} |M_r(k)|^2 = M_{\alpha}(k) M_{\beta}^{*}(k) \sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r^{\alpha}(k)\, \varepsilon_r^{\beta}(k) \qquad (8.34)$$

(5.39)と(5.40)から、(実光子 $k^2=0$)

$$\sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r^{\alpha}(k)\, \varepsilon_r^{\beta}(k) = -g^{\alpha\beta} - \frac{1}{(kn)^2}\left[k^{\alpha}k^{\beta} - (kn)(k^{\alpha}n^{\beta} + k^{\beta}n^{\alpha})\right] \qquad (8.35)$$

(8.35) と (8.33) から，(8.34) は，

$$\sum_{r=1}^{2}|\mu_r(k)|^2 = -\mu^{\alpha}(k)\mu^*_{\alpha}(k)$$

これは簡単に複数の光子に拡張できる。

2光子なら，$X = \sum_{r_1=1}^{2}\sum_{r_2=1}^{2}|\mu_{r_1 r_2}(k_1,k_2)|^2$

$$= \mu_{\alpha\beta}(k_1,k_2)\mu^*_{\gamma\delta}(k_1,k_2)\underbrace{\sum_{r_1=1}^{2}\varepsilon^{\alpha}_{r_1}(k_1)\varepsilon^{\gamma}_{r_1}(k_1)}_{-g^{\alpha\gamma}}\underbrace{\sum_{r_2=1}^{2}\varepsilon^{\beta}_{r_2}(k_2)\varepsilon^{\delta}_{r_2}(k_2)}_{-g^{\beta\delta}}$$

$$= (-1)^2\mu^{\alpha\beta}(k_1,k_2)\mu^*_{\alpha\beta}(k_1,k_2)$$