

# 8.1 The Cross-Section

2粒子 (レプトンか光子) の散乱過程を考える。

始状態: 2粒子

終状態:  $N$ 個の粒子

$$P_i = (E_i, \mathbf{p}_i), \quad i=1,2 \quad \rightarrow \quad P'_f = (E'_f, \mathbf{p}'_f), \quad f=1, \dots, N$$

式 (7.45) (p.118)

$$\langle f | S | i \rangle = \delta_{fi} + \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \prod_{\text{ext.}} \left( \frac{m}{VE} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{\text{ext.}} \left( \frac{1}{2V\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \mathcal{M}$$

↓ 今の枠では

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum P'_f - \sum P_i) \prod_i \left( \frac{1}{2VE_i} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_f \left( \frac{1}{2VE'_f} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_l (2m_l)^{\frac{1}{2}} \mathcal{M} \quad (8.1)$$

( $l$ : 外線レプトンか光子)

式 (8.1) では  $T \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty$  の極限を対応させておき、

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum P'_f - \sum P_i) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \delta_{TV}(\sum P'_f - \sum P_i) \quad (8.2)$$

$$\equiv \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V d^3x \exp\left[ i \int_{\mathcal{I}} x (\sum P'_f - \sum P_i) \right] \quad (t, \mathcal{I})$$

と書きかえられる。

断面積を求めるときは、有限の  $T, V$  から考える。

このときの遷移確率 (単位時間あたり) は

$$W = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \quad (8.3)$$

$T, V$  は十分大きいとすると、

$$\delta_{TV}(\sum P'_f - \sum P_i) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum P'_f - \sum P_i) \quad (8.4)$$

とすると、

$$\left[ \delta_{TV}(\sum P'_f - \sum P_i) \right]^2 = \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_V d^3x_1 \int_{-T/2}^{T/2} dt_2 \int_V d^3x_2$$

$$\exp\left[ i x_1 (\sum P'_f - \sum P_i) \right] \exp\left[ i x_2 (\sum P'_f - \sum P_i) \right]$$

$$= TV (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum P'_f - \sum P_i) \quad (8.5)$$

これらの誤差は  $T \rightarrow \infty$   $V \rightarrow \infty$  でゼロ

これより、式 (8.3) の遷移確率は、

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{|S_{fi}|^2}{T} \\
 &= \frac{1}{T} \left[ (2\pi)^4 \delta_{\Sigma}(\Sigma P_f' - \Sigma P_i) \right]^2 \left( \prod_i \frac{1}{2VE_i} \right) \left( \prod_f \frac{1}{2VE_f'} \right) \left( \prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2 \\
 &= V (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma P_f' - \Sigma P_i) \left( \prod_i \frac{1}{2VE_i} \right) \left( \prod_f \frac{1}{2VE_f'} \right) \left( \prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (8.6)
 \end{aligned}$$

となる

運動量  $\mathbf{p}_f$  ( $P_f'$ ,  $P_f' + dP_f'$ ),  $f=1, \dots, N$  の間にある終状態への遷移速度を与えるには、 $W$  に状態数  $\Omega$  をかける。いま、状態数は

$$\prod_f \frac{V dP_f'}{(2\pi)^3} \quad (8.7)$$

である

また、遷移速度は微分散乱断面積に入射フลักス  $\Omega$  をかけ  $T$  をかけるとある

体積  $V$  が散乱中心を含んでいるとすると入射フลักスは  $\frac{v_{rel}}{V}$

$v_{rel}$  は衝突する粒子の相対速度。

以上のことから、微分散乱断面積は、

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= W \frac{V}{v_{rel}} \prod_f \frac{V d^3 P_f'}{(2\pi)^3} \\
 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma P_f' - \Sigma P_i) \frac{V^2}{v_{rel}} \left( \prod_{i=1,2} \frac{1}{2VE_i} \right) \left( \prod_f \frac{1}{2VE_f'} \frac{V d^3 P_f'}{(2\pi)^3} \right) \left( \prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2 \\
 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma P_f' - \Sigma P_i) \frac{1}{4E_1 E_2 v_{rel}} \left( \prod_l (2m_l) \right) \left( \prod_f \frac{d^3 P_f'}{(2\pi)^3 2E_f'} \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (8.8)
 \end{aligned}$$

これは、粒子が一直線上で衝突するような D-レンツ系で保つ

この系では相対速度  $v_{rel}$  は

$$E_1 E_2 v_{rel} = [(P_1 P_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2} \quad (8.9)$$

と表せる。  $m_1, m_2$  は衝突粒子の静止質量。

$$\left( \begin{aligned}
 (v_{rel})^2 &= (E_1 E_2 - P_1 \cdot P_2)^2 - (E_1^2 - P_1^2)(E_2^2 - P_2^2) \\
 &= -2E_1 E_2 P_1 \cdot P_2 + E_1^2 P_2^2 + E_2^2 P_1^2 \\
 &= E_1^2 E_2^2 \left( \frac{P_1}{E_1} - \frac{P_2}{E_2} \right)^2
 \end{aligned} \right)$$

この系での 2つの例として、COM系と Lab系がある

COM系では  $P_1 = -P_2$  であるから

$$v_{rel} = \frac{|P_1|}{E_1} + \frac{|P_2|}{E_2} = |P_1| \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \quad (\text{COM}) \quad (8.10a)$$

Lab系では 標的粒子は静止 ( $P_2 = 0$ ) としているので

$$v_{rel} = \frac{|P_1|}{E_1} \quad (\text{Lab}) \quad (8.10b)$$

断面面積の式 (8.8) から、上記の条件で形を保持することは、式 (8.9) と、 $\frac{d^3P}{2E}$  が 4次元 Lorentz 不変であることを示す。

4元 Lorentz 不変  $P = (E, \mathbf{p})$  に対して  $\delta(p^2 - m^2) \theta(p^0)$  であることからわかる。

$$\left( \frac{d^3P}{2E} = \int d^4P \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) \right) \quad (8.11)$$

エネルギーと運動量の保存より、終状態の運動量  $P_1', \dots, P_n'$  は独立変数ではない。ある状態を考えると、その場合で独立変数のみで微分分散断面面積を表し、その残りの変数で積分していく。

よく起る現象がある。終状態が 2 粒子となる状態を考える。

このとき  $d\sigma$  は式 (8.8) より

$$d\sigma = f(P_1, P_2) \delta^{(4)}(P_1' + P_2' - P_1 - P_2) d^3P_1' d^3P_2' \quad (8.12a)$$

$$f(P_1, P_2) \equiv \frac{1}{64 \pi^2 v_{rel} E_1 E_2 E_1' E_2'} \left( \frac{\pi}{2} (2m_e) \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (8.12b)$$

とすると

(8.12a) を  $P_2'$  で積分すると

$$\begin{aligned} d\sigma &= \int d^3P_2' f(P_1, P_2) \delta(E_1' + E_2' - E_1 - E_2) \delta^{(3)}(P_1' + P_2' - P_1 - P_2) d^3P_1' \\ &= f(P_1, P_2) \delta(E_1' + E_2' - E_1 - E_2) |P_1'|^2 d|P_1'| d\Omega_1' \quad (8.13) \\ &\quad (E_2' = E_1 + E_2 - E_1', \quad P_2' = P_1 + P_2 - P_1') \end{aligned}$$

とすると

ここで、7次元関数  $\delta(g(x, y))$  は

$$\begin{aligned} \int f(x, y) \delta[g(x, y)] dx &= \int f(x, y) \delta[g(x, y)] \left( \frac{\partial x}{\partial g} \right)_y dg \\ &= \left[ \frac{f(x, y)}{\left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_y} \right]_{g=0} \quad (8.14) \end{aligned}$$

か"成り立つ) = と \$\Sigma\$ 用いると、式 (8.13) 2" \$|P\_1| = \mu\$ 2 積分する

$$d\sigma = \int d|P_1| \underbrace{|P_1|^2 f(P_1, P_2)}_{P_1 \text{ による}} \delta(E_1' + E_2' - E_1 - E_2) \underbrace{d\Omega_1'}_{P_1 \text{ による}}$$

$$= f(P_1, P_2) |P_1|^2 d\Omega_1' \left[ \frac{\partial(E_1' + E_2')}{\partial|P_1|} \right]^{-1} \quad (8.15)$$

( \$T=0\$, \$E\_1' + E\_2' - E\_1 - E\_2 = 0\$ )

このとき、\$P\_2' = P\_1 + P\_2 - P\_1'\$ 2"あるから、結局、\$P\_2' = P\_1 + P\_2 - P\_1'\$ 2"たゞ

COM系での微分断面積を計算してやる (\$P\_1' = -P\_2'\$)

$$(E_f')^2 = (m_f')^2 + |P_f'|^2 \quad f=1,2 \quad (8.16)$$

$$\text{よ} \quad \frac{\partial E_f'}{\partial |P_f'|} = \frac{|P_f'|}{E_f'}$$

2"あるから、これと \$P\_1' = -P\_2'\$ 2"よ

$$\frac{\partial(E_1' + E_2')}{\partial |P_1'|} = |P_1'| \frac{E_1' + E_2'}{E_1' E_2'} = |P_1'| \frac{E_1 + E_2}{E_1' E_2'} \quad (8.17)$$

( \$E\_1' + E\_2' - E\_1 - E\_2 = 0\$ )

とたゞ  
式 (8.15), (8.16), (8.10a), (8.17) 2"よ.

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 \underbrace{v_{rel}}_{\downarrow} E_1 E_2 E_1' E_2'} \left( \frac{\pi}{2} (2m_e) \right) |\mathcal{M}|^2 |P_1|^2 d\Omega_1' \left[ |P_1'| \frac{E_1 + E_2}{E_1' E_2'} \right]^{-1}$$

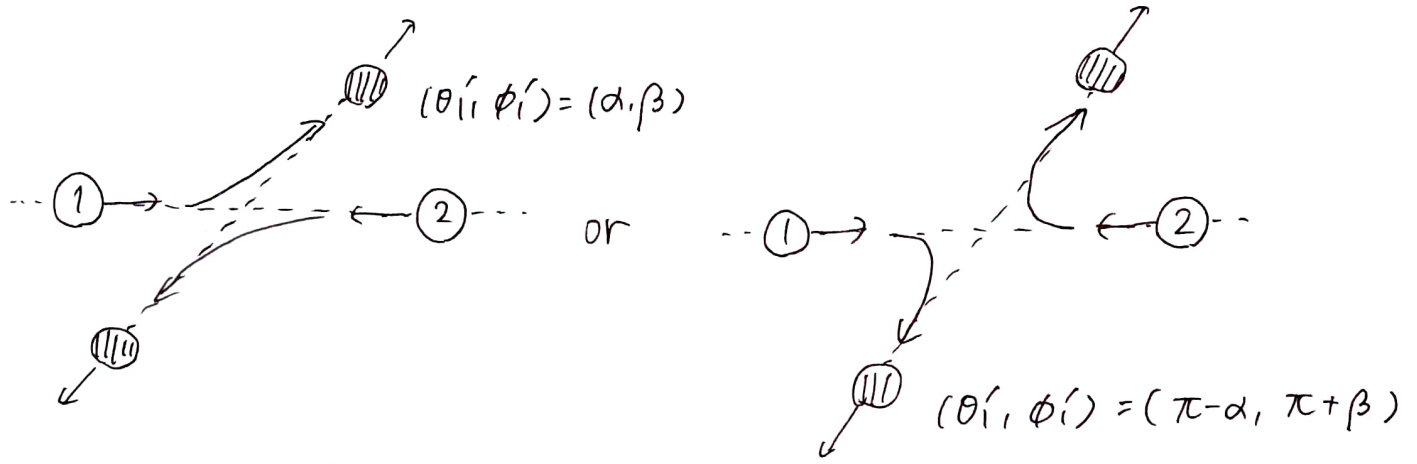
$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega_1' \right)_{com} = \frac{1}{64\pi^2 \left( |P_1'| \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \right) E_1' E_2'} |P_1|^2 \frac{E_1' E_2'}{|P_1'| (E_1 + E_2)} \left( \frac{\pi}{2} (2m_e) \right) |\mathcal{M}|^2$$

$$= \frac{1}{64\pi^2 (E_1 + E_2)^2} \frac{|P_1|}{|P_1'|} \left( \frac{\pi}{2} 2m_e \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (8.18)$$

とたゞ

断面積の式は 同一粒子の有無に関係なく使えるが、totalの断面積を計算するときには 終状態に同一粒子がなければ" 全2"の角度で積分できるが、物理的に区別できない終状態の場合、積分範囲はかわる

例えば、COM系で終状態に2つの同一粒子が生成される場合を考える。



どちらの場合も式(8.18)の  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\text{COM}}$  から totalの断面積を求められるが、積分範囲は前半球  $0 \leq \theta' \leq \frac{1}{2}\pi$  とするが、

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{COM}}^{\text{tot}} &= \int_0^1 d(\cos\theta') \int_0^{2\pi} d\phi' \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\text{COM}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{4\pi} d\Omega' \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\text{COM}} \end{aligned} \quad (8.19)$$

となる。