

4.4.2 スピン 1/2

スピンに関する系で最も重要なのは、 $s = 1/2$

陽子、中性子、電子、すべてのクォーク、
すべてのレプトンがスピン1/2をもつ

スピン1/2の粒子は、 $m_s=1/2$ (スピン・アップ) $m_s=-1/2$ (スピン・ダウン) をもつ

これら2つの状態のスピンル表記

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

スピン1/2の粒子の最も一般的な状態

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{は複素数})$$

一般的な状態を考えると、

$|\alpha|^2$ は S_z の測定値が $+\frac{\hbar}{2}$ になる確率

$|\beta|^2$ は S_z の測定値が $-\frac{\hbar}{2}$ になる確率

これらのみが許される結果なので、

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

この条件を除いて、 α と β に対して、測定の前においていかなる制約もない

次に、上の状態にある粒子の S_x あるいは S_y を測定する
対称性から、可能な測定値は、 $\pm \frac{\hbar}{2}$

\mathbf{S} のそれぞれの成分に、 (2×2) 行列を対応させる

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

\hat{S}_x の固有値は、 $\pm \frac{\hbar}{2}$ で、それに対応する規格化された固有ベクトルは

$$\chi_{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

任意のスピンル $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ は、これらの固有ベクトルの線形結合で書ける

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta), b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)$$

\hat{S}_x の測定値が $+\frac{\hbar}{2}$ になる確率 $|a|^2$

\hat{S}_x の測定値が $-\frac{\hbar}{2}$ になる確率 $|b|^2$

また、 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ を満たす

ある特定の例を見てきたが、一般化した手順は以下である

1. 問題となっている観測量 A を表す行列 \hat{A} をつくる
2. A の取り得る値は、 \hat{A} の固有値である
3. \hat{A} の固有ベクトルの線形結合で、系の状態を書く
 i 番目の固有ベクトルの係数の絶対値の2乗が、 A の測定値が i 番目の固有値となる確率である

例題4.5 状態 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ にいる粒子の $(S_x)^2$ を測定すると仮定しよう。どのような測定値になるか、また、その確率はどれだけになるか。

$(S_x)^2$ で表される行列は S_x で表される行列の2乗

$$\hat{S}_x^2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

なので、すべてのスピノルが固有値 $\frac{\hbar^2}{4}$ をもち、 \hat{S}_x^2 の固有ベクトルになっている。

ゆえに、 $\frac{\hbar^2}{4}$ が測定値で、確率は1

同じことが \hat{S}_y^2 と \hat{S}_z^2 にもいえるので、すべてのスピノルは固有値 $\frac{3\hbar^2}{4}$ をもち、 $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$ の固有状態になっている。

一般に、スピン s に対して、 $S^2 = s(s+1)\hbar^2$ である。

\mathbf{S} の係数 $\frac{\hbar}{2}$ は数学的に美しくないため、慣例的に以下のパウリ・スピン行列を導入する。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \sigma$ である。

ある意味スピノルは、スカラーとベクトルの中間に位置している。座標軸を回転させると、スピノル成分は次のように変換される。

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = U(\boldsymbol{\theta}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad U(\boldsymbol{\theta}) = e^{-i(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma})/2}$$

この行列は行列式が1でユニタリ行列である。実際のところ、このような回転行列は $SU(2)$ 群を構成する。そのため、スピン1/2の粒子は、回転のもとでは $SU(2)$ の2次元表現に従い変換する。同様に、例えばベクトルで記述されるスピン1の粒子は $SU(2)$ の3次元表現に属す。

4.3 フレーバー対称性

中性子には非常に変わった性質がある。(1932年の中性子発見直後にハイゼンベルクが観測)

電荷をもたない以外、中性子は陽子とほぼ変わらない。

とくに質量について

$$m_p = 938.28 \text{ MeV}/c^2, m_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2$$

ハイゼンベルクは、陽子と中性子を核子という一つの粒子の2つの「状態」とみなすことを提案

質量のわずかな差は、陽子は荷電であるせいにした。

この電荷を取り除くことができれば、陽子と中性子は区別つかなくなる。

ハイゼンベルクのアイデア実現のため、核子の2成分の列ベクトルを $N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ と書き、 $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

スピン S の直接的な類似としてアイソスピン I を導入

I は「アイソスピン空間」という抽象空間中のベクトル
その成分を I_1, I_2, I_3 とする

角運動量に関する道具立てをすべて借りることができる。

核子は、アイソスピン $\frac{1}{2}$ をもち、
第3成分 I_3 は固有値 $\frac{1}{2}$ (陽子) と $-\frac{1}{2}$ (中性子) をもつ。

$$p = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \quad (\text{アイソスピン・アップ})$$

$$n = \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (\text{アイソスピン・ダウン})$$

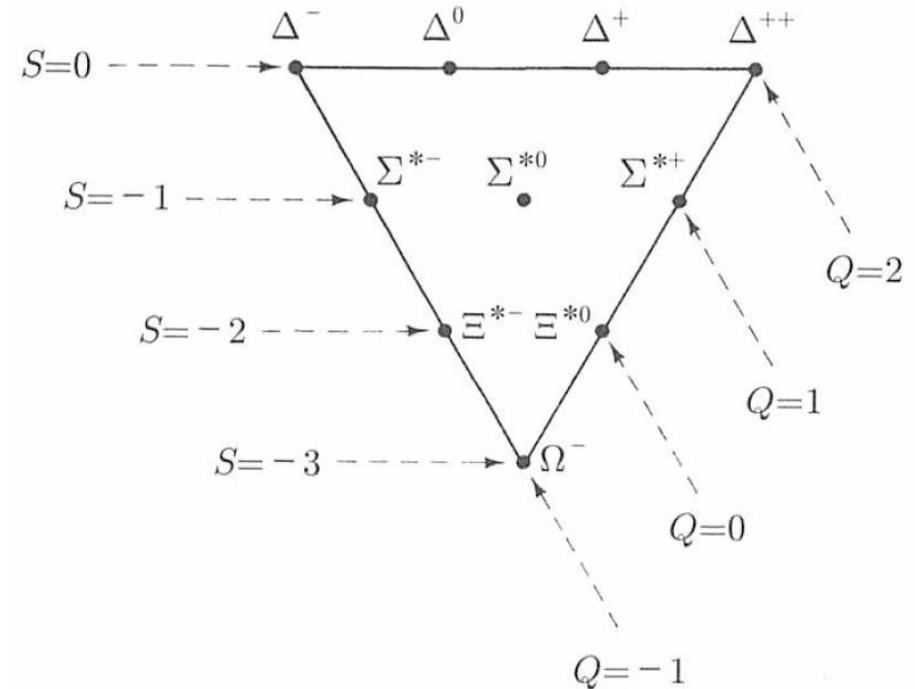
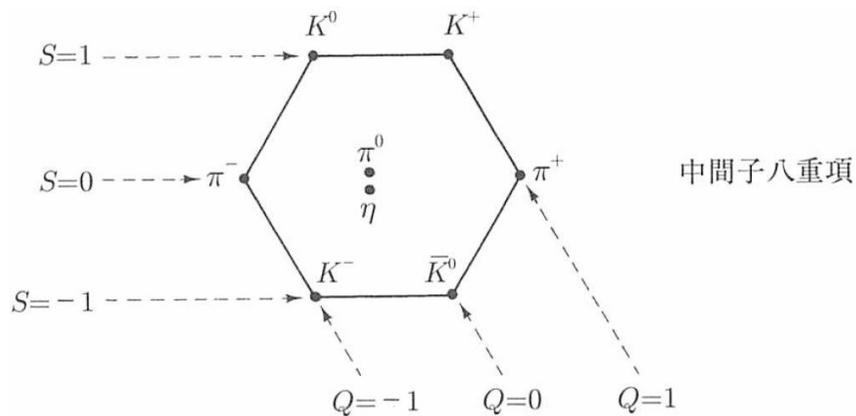
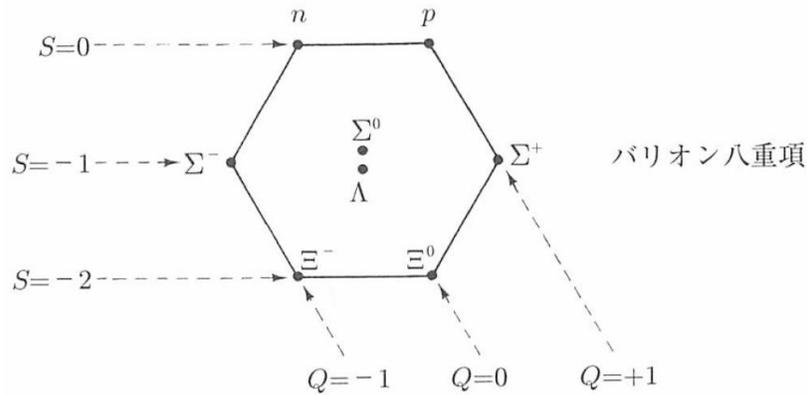
強い力はアイソスピン空間中での回転のもとで不変である。これを内部対称性とよぶ。

また、ネーターの定理から、アイソスピンは強い相互作用において保存する。

群論を使うと、ハイゼンベルクは内部対称群 $SU(2)$ のもとで強い相互作用は不変で、核子は2次元表現（アイソスピン $\frac{1}{2}$ ）に属している。

八道説を比べると、核子の特徴が横の行として表現されている。

それらは同じような質量をもち、電荷が違う。



これらの多重項それぞれに特定のアイソスピン I を割り振り、多重項のメンバーそれぞれに特定の I_3 を割り振る。

パイ中間子なら $I = 1$ で、

$$\pi^+ = |1\ 1\rangle, \pi^0 = |1\ 0\rangle, \pi^- = |1\ -1\rangle$$

Λ なら $I = 0$ で、

$$\Lambda^0 = |0\ 0\rangle$$

Δ なら $I = \frac{3}{2}$ で、

$$\Delta^{++} = \left| \frac{3}{2}\ \frac{3}{2} \right\rangle, \quad \Delta^+ = \left| \frac{3}{2}\ \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \Delta^0 = \left| \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad \Delta^- = \left| \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2} \right\rangle$$

多重項のアイソスピンを決めるには、その多重項に含まれる粒子数を数えればよい。

多重項中の粒子の数は、 $2I + 1$ である。

アイソスピンの第3成分の I_3 は粒子の電荷 Q と関係がある。多重項の中で最も電荷の大きい粒子に $I_3 = I$ を割り振り、電荷が減る順に割り振る。

Q と I_3 の明示的な関係は、ゲルマン-西島の法則から、

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(A + S)$$

この式はもともとは経験則で得られた。

現在では、クォーク模型から得られる結果。

u と d は(陽子と中性子のように)二重項を形成。

$$u = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\rangle, d = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array} \right\rangle$$

すべての他のフレーバーはアイソスピン0をもつ。

アイソスピンは分類にだけに役立つわけではなく、重要な示唆も得られる。

例えば、2つの核子を考える。合成されたアイソスピンの値は1か0となる。
具体的には

$$|1\ 1\rangle = pp$$

$$|1\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(pn + np)$$

対称的なアイソスピン三重項

$$|1\ -1\rangle = nn$$

$$|0\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(pn - np)$$

反対称的なアイソスピナー重項

実験的には、中性子と陽子は、重水素(d)という1つの束縛状態を形成する。

2つの陽子、あるいは2つの中性子の束縛状態は存在しない。
そのため、重水素はアイソスピナー重項であると考えられる。

もしアイソスピン三重項なら、3つの状態が存在するべき。

なぜなら、それらの状態はアイソスピン空間における回転の違いしかないから。

このことから、強い引力が $I = 0$ にはあり、 $I = 1$ にはない。

これは2つの核子間の相互作用を記述するポテンシャルが $I^{(1)} \cdot I^{(2)}$ という形を含んでいて、その値が三重項では $\frac{1}{4}$ 、一重項では $-\frac{3}{4}$ という違いがあることによる。

アイソスピン不変性から核子-核子散乱に対する示唆も得られる。

$$(a) p + p \rightarrow d + \pi^+$$

$$(b) p + n \rightarrow d + \pi^0$$

$$(c) n + n \rightarrow d + \pi^-$$

という過程を考える。

$$\text{散乱振幅の比は、 } \mathcal{M}_a : \mathcal{M}_b : \mathcal{M}_c = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$$

断面積 σ は散乱振幅の絶対値の2乗に比例するので、

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = 2 : 1 : 2$$

(a)(b)は測定されていて、予言された比に一致する。

((c)の過程を実験で実現するのは難しい)

最後の例として、パイ中間子と核子の散乱 $\pi N \rightarrow \pi N$ を考える。以下の6つの弾性散乱過程

$$(a) \quad \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$$

$$(b) \quad \pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p$$

$$(c) \quad \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$$

$$(d) \quad \pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n$$

$$(e) \quad \pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n$$

$$(f) \quad \pi^- + n \rightarrow \pi^- + n$$

と4つの電荷交換過程

$$(g) \quad \pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$$

$$(h) \quad \pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n$$

$$(i) \quad \pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p$$

$$(j) \quad \pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$$

が存在する。

中間子は $I = 1$ 、核子は $I = \frac{1}{2}$ なので、アイソスピンの合計は $\frac{3}{2}$ か $\frac{1}{2}$ である。

よって、区別すべき振幅は $I = \frac{3}{2}$ のときの \mathcal{M}_3
と $I = \frac{1}{2}$ のときの \mathcal{M}_1

クレブシュ-ゴルダン係数の表から、

$$\pi^+ + p: |1\ 1\rangle \left| \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2}\ \frac{3}{2} \right\rangle$$

$$\pi^0 + p: |1\ 0\rangle \left| \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}\ \frac{1}{2} \right\rangle - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left| \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^- + p: |1\ -1\rangle \left| \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \right\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left| \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^+ + n: |1\ 1\rangle \left| \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left| \frac{3}{2}\ \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^0 + n: |1\ 0\rangle \left| \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left| \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\pi^- + n: |1\ -1\rangle \left| \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2} \right\rangle$$

(a)と(f)は純粋な $I = \frac{3}{2}$ の過程なので、 $\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_f = \mathcal{M}_3$

他の過程は複数のアイソスピン状態の混ぜ合わせであり、例えば、

$$\mathcal{M}_c = \frac{1}{3}\mathcal{M}_3 + \frac{2}{3}\mathcal{M}_1, \quad \mathcal{M}_j = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\mathcal{M}_3 - \frac{\sqrt{2}}{3}\mathcal{M}_1$$

よって、これらの断面積の比は、

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9|\mathcal{M}_3|^2 : |\mathcal{M}_3 + 2\mathcal{M}_1|^2 : 2|\mathcal{M}_3 - \mathcal{M}_1|^2$$

重心系エネルギー1232 MeVでは、パイ中間子-核子散乱における有名な事象過多が発生する(フェルミらが初めて発見)。それは、パイ中間子と核子が合体して短寿命の共鳴状態、すなわち $\Delta (I = \frac{3}{2})$ が生成されている。

よって、このエネルギーでは $\mathcal{M}_3 \gg \mathcal{M}_1$ と予想できる。

すなわち、 $\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 : 1 : 2$ が期待される。

実験的には全断面積を測定するのが簡単なので、(c)と(j)を合わせて、

$$\frac{\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ + p)}{\sigma_{\text{tot}}(\pi^- + p)} = 3$$

実験データとよく一致

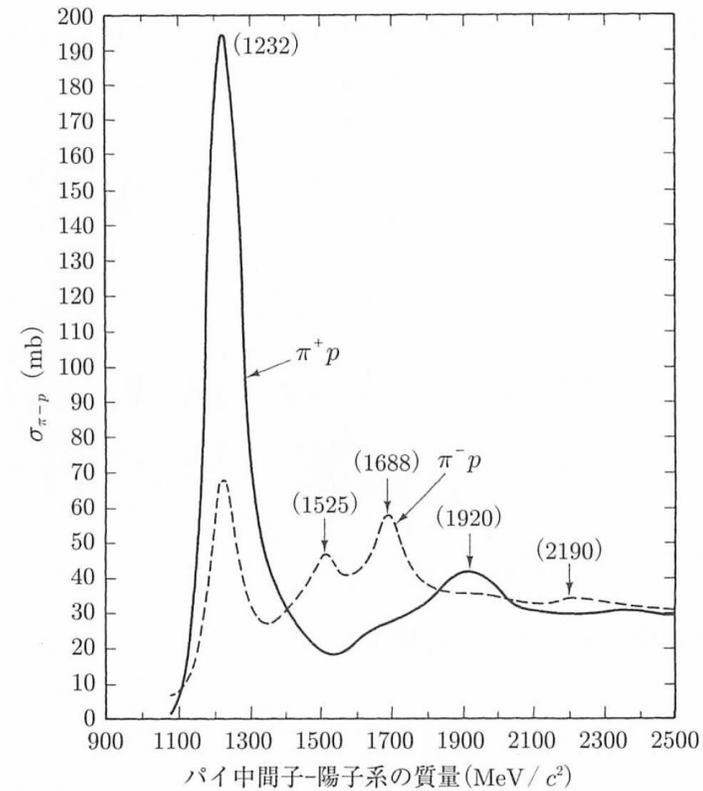


図 4.6 π^+p 散乱 (実線) と π^-p 散乱 (点線) の全断面積 (出典: Gasiorowicz, S.: Elementary Particle Physics (John Wiley & Sons, 1966) 294. John Wiley & Sons, Inc. の許可を得て掲載)

1950年代後半には、1932年に陽子と中性子が対をなすように見えたのと同じように、今度は核子、 Λ 、 Σ 、 Ξ が一緒になってバリオンのグループを形成しているのが明らかになった。

これはアイソスピン $SU(2)$ を要素として含むような、より大きな対称群の同じ表現にそれらのバリオンが含まれていることを意味し、その大きな対称群は $SU(3)$ である。

八重項は $SU(3)$ の8次元表現を構成し、十重項は10次元表現を構成する。

ハイゼンベルクの場合よりも今回難しくしているのは、 $SU(2)$ では核子が存在したが、 $SU(3)$ では3次元表現に当てはまる粒子が存在しないことである。この役割はクォークに任せられ、 u, d, s が一緒になって $SU(3)$ の3次元表現を形成する。

$SU(2)$ のもとでは、アイソスピン二重項の (u, d) とアイソスピン一重項の (s) とに分かれる。

チャームクォークが発見されたときには、この対称群が拡張され、 $SU(4)$ となった。

同じように、ボトム、トップクォークが現れて、対称群が $SU(5)$ 、 $SU(6)$ へと拡張された。

ここで、 $SU(2)$ は良い対称性であるが、拡張するにつれ、多重項での質量差が大きくなり、対称性が崩れてしまう。

その原因すべてをクォークの質量のせいに行している。

様々な議論によると、 u クォークと d クォークの本来の質量は電子の10倍ほどしかない。しかし、ハドロンの中に閉じ込められていると実効的な質量はもっと重い。

実効質量を見たとき、 u と d の差は無視でき、同じ質量のようにふるまうため、アイソスピンは良い対称性がある。

s クォークの実効質量もそれほど変わらないため、八道説はそこそこの対称性をもっている。

しかし、それより重いクォークは質量が違いすぎて、対称性は激しく破れている。

表 4.4 クォーク質量 (MeV/c^2)

クォークの種類	裸の質量	実効質量
u	2	336
d	5	340
s	95	486
c	1 300	1 550
b	4 200	4 730
t	174 000	177 000

注意：これらの数字は多少の予想を含み、また模型に依存する [12].

この説明では2つの疑問が生じる。

1. なぜ、ハドロン中での閉じ込めによって実効質量が増えるのか。
その答えはたぶんQCDにあるが、完全に理解されていない。
2. なぜ裸のクォークはそれらに固有の質量をもつのか。
この質問に対して標準模型は何の答えも持たない。
標準模型を超える理論の役割である。