Leo

伊東利将

June 2020

1 Landau-Vavilov の定理

厚い吸収体と異なって中心極限定理を保つには衝突数 N があまりにも小さい薄い吸収体やガスでは分布の計算は非常に難しくなる。一回の衝突に於ける大きなエネルギー遷移の可能性のためである。電子では最初のエネルギーのうちの半分程度が移動しうる。制動放射による大きなエネルギー損失もある。但し、これらはレアな現象なので、グラフにすると高エネルギーの方に長い尾を引くことになる。このために、平均エネルギー損失とエネルギー損失の最頻値にはずれが生じ、この二つの値が分布をパラメトライズする。この計算方法はLandau、Symon、Valivov によって導出されたが、適用可能範囲は幾分異なっている。但し、

$$\kappa = \frac{\overline{\Delta}}{W_{\max}} \tag{1}$$

という因子は共通にある。ここで、$\overline{\Delta}$ は平均エネルギー損失、$W_{\max}$ は一回の衝突で失われる最大エネルギーである。$\overline{\Delta}$ は Bethe-Bloch の定理から導かれるが、最初の増加項を取り出し、対数項を無視することで

$$\overline{\Delta} \simeq \xi = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 x \tag{2}$$

と与えられる。薄い吸収体の領域は一般に $\kappa < 10$ で与えられるが、$\kappa > 1$ で既にガウシアンでフィット出来る形になりつつある。(図 2.19 参照)

1.1 Landau の定理

$\kappa < 0.01$ とする。これは非常に薄い吸収体に相当する。以下の仮定を置く。
1.$W_{max} \to \infty (\kappa \to 0)$ である。
2. 個々のエネルギー移動は大きいので、電子は自由であると見なせる。
3. 粒子の速度減少は無視できるので、粒子の速度は一定と見なせる。
このとき、分布は

$$f(x, \Delta) = \frac{\phi(\lambda)}{\xi} \tag{3}$$

で表される。ここで、

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty due^{-u\ln u - u\lambda}\sin\pi u \tag{4}$$

$$\lambda = \frac{1}{\xi}\{\Delta - \xi(\ln\xi - \ln\epsilon + 1 - C)\} \tag{5}$$

$$\ln\epsilon = \ln\frac{(1-\beta^2)I^2}{2mc^2\beta^2} + \beta^2 \tag{6}$$

であり、C は Euler 定数。ϵ は仮定 2 による最小のエネルギー移動量を表現している。関数 $\phi(\lambda)$ は λ にのみ依存する普遍関数で数値的に評価される。この ϕ の評価から

$$\Delta_{\mathrm{mp}} = \xi\left(\ln\frac{\xi}{\epsilon} + 0.198 - \delta\right) \tag{7}$$

とエネルギー損失は評価されうる。

1.2 Symon の定理と Vavilov の定理

Landau の定理とガウシアンフィットの間の領域はこの定理でカバーされている。Symon の発見はグラフの形で示されるが、それは今日のコンピューターの中では使いにくい形になってしまっている。Vavilov の定理は Landau の仮定の後ろ二つを引き継いだまま Landau の定理に沿って展開され、のちの計算で一般化された。教科書の図 2.19 がその結果の一部の図を与えている。$\kappa = 1$ で既にガウシアンになりつつあるのが分かる。Vavilov はガウシアン極限で

$$\sigma^2 = \frac{\xi^2}{\kappa}\frac{1-\beta^2}{2} \tag{8}$$

の相違を上げているが、これは Bohr の公式に矛盾しない。これらの実験との一致は図 2.20 にある。

2 Landau と Vavilov の分布の正しさ

これは様々と修正をされていった。例えば Blunck と Leisegang は Landau の定理を原子の電子も含む形に修正した。この結果は当選複雑になったのだが、計算しやすい形は Matthews らにより導出された。Vavilov の方は Shulek によって同じような修正が加えられた。