4 ディラック場

フェルミ・ディラック統計に従うフェルミオンについて考える。

- 正準量子化 $\rightarrow$ ボソン
- 調和振動子 $\rightarrow$ フェルミオン

調和振動子における生成消滅演算子の交換関係を反交換関係に置き換えることでフェルミ・ディラック統計へと移行する。（$\rightarrow$4.1 節）
その後はこれをスピン $\frac{1}{2}$ の相対論的な粒子に使いディラック方程式を導く。（スピンの整数・半整数の違いと統計の結びつきが相対論的量子力学の重要な特徴となる。

4.1 フェルミオンでの記法

1.2.2 及び 1.2.3 節で導いたボソンの量子化の記法を修正してフェルミオンでの記法を得る。

$$[a_r,\ a_s^\dagger] = \delta_{rs}, \quad [a_r,\ a_s] = [a_r^\dagger,\ a_s^\dagger] = 0 \tag{4.1}$$

$$N_r = a_r^\dagger a_r. \tag{4.2}$$

また、交換子の規則から

$$[AB,\ C] = A[B,\ C] + [A,\ C]B \tag{4.3}$$

従って

$$[N_r,\ a_s] = -\delta_{rs} a_s, \quad [N_r,\ a_s^\dagger] = \delta_{rs} a_s^\dagger \tag{4.4}$$

勿論 $a_r, a_r^\dagger, N_r$ は消滅・生成演算子及び数演算子で特に N_r の固有値は $n_r = 0, 1, 2...$ である。真空状態 $|0>$ を以下に定義

$$a_r\ |0\rangle = 0,\ all\ r, \tag{4.5}$$

この時他の状態はこの真空状態の線形な重ね合わせによって表現される。((4.4) の別表現)

$$\left(a_{r_1}^\dagger\right)^{n_1} \left(a_{r_2}^\dagger\right)^{n_2} \cdots |0\rangle \tag{4.6}$$

さて、演算子 A,B の反交換子を

$$[A,\ B]_+ \equiv AB + BA \tag{4.7}$$

と定めると、この時 (4.3) からの類推によって

$$\begin{aligned}[AB,\ C] &= ABC - CAB \\ &= ABC + ACB - ACB - CAB \\ &= A[B,\ C]_+ - [A,\ C]_+ B \end{aligned} \tag{4.8}$$

さて、演算子 $a_r, a_r^\dagger, r=1,2,...,$ を反交換関係を満たすように定める。すなわち、

$$[a_r,\ a_s^\dagger]_+ = \delta_{rs}, \quad [a_r,\ a_s]_+ = [a_r\dagger],\ a_s^\dagger]_+ = 0; \tag{4.9}$$

特に

$$(a_r)^2 = (a_r\dagger)^2 = 0 \tag{4.9a}$$

この関係から同じように演算子 $a_r, a_r^\dagger, N_r$ がそれぞれ消滅・生成演算子及び数演算子として存在することがわかるが、(4.9) 式より

$$N_r^2 = a_r^\dagger a_r a_r^\dagger a_r = a_r^\dagger(1 - a_r^\dagger a_r)a_r = N_r \tag{4.10}$$

従って

$$N_r(N_r - 1) = 0; \tag{4.10a}$$

即ち、反交換な生成消滅演算子のもとでは、N_r の固有値は $n_r = 0,1$ のみであり、フェルミ・ディラック統計を扱っていることがわかる。
真空状態は (4.5) 式で定義され、また 1 粒子の状態について

$$|1_r\rangle = a_r^\dagger|0\rangle \tag{4.11}$$

2 粒子の状態については反交換関係 (4.9) を加味して（$r \neq s$)、

$$|1_r 1_s\rangle = a_r^\dagger a_s^\dagger|0\rangle = -a_s^\dagger a_r^\dagger|0\rangle = -|1_s 1_r\rangle \tag{4.12}$$

これはフェルミオンの要請としての粒子の交換に対しての反対称性を示している。また、r=s のとき、

$$|2_r\rangle = (a_r^\dagger)^2|0\rangle = 0 \tag{4.13}$$

よって 2 粒子が同じ（1 粒子の）状態に入ることができないことを確かめられる。
ボソンについての交換関係は非相対論的量子力学の正準交換関係から直接的に導けるが、フェルミオンについての反交換関係はそのような基盤を持たない。

4.2 ディラック方程式

次章での場の量子論への準備として古典的な場の理論でのディラック方程式を考える。ディラック方程式はスピン $\frac{1}{2}$ を扱い、場の量子論では反物質の存在が要請される。後に量子電磁気学をやることを踏まえこの章では電子と陽電子について定義をするが、他のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子に対しても使える（ミューオン、クォーク等)。
さて、静止質量 m の粒子についてのディラック方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = [c\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\hbar\nabla) + \beta mc^2]\psi(x)$$

である。書き換えてやると、

$$i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu} - mc\psi(x) = 0 \tag{4.14}$$

ただし、γ^μ は

$$\gamma^0 = \beta, \qquad \gamma^i = \beta\alpha_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

であらわせる 4×4 のディラック行列であり、反交換関係をみたす。

$$[\gamma^\mu,\ \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu} \tag{4.15}$$

ただし $g^{\mu\nu}$ は Minkowski 計量

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

である。またエルミート性 $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0,\ \ \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j\ (j = 1, 2, 3)$ を満たし、ディラックのハミルトニアンのエルミート性を保証することになる。これは以下の関係にまとめられる。

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \tag{4.16}$$

この時 $\psi(x)$ はスピノル波動関数であり、4 つある（$\psi_\alpha(x), \alpha = 1, ..., 4$）が略されることが多い。ただし表現としてより簡潔で、ガンマ行列が (4.15) 及び (4.16) 式を満たすことだけで構成することを考える。
エルミート随伴な場の関数を次で定義する。

$$\overline{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0 \tag{4.18}$$

これはエルミート随伴なディラック方程式を満たす。

$$i\hbar\frac{\partial\overline{\psi}(x)}{\partial x^\mu}\gamma^\mu + mc\overline{\psi}(x) = 0 \tag{4.19}$$

(4.14) 及び (4.19) 式が導かれるようなラグランジアン密度として (2.11) 式について ψ_α と $\overline{\psi}_\alpha$ を独立とした次のものを考える。

$$\mathscr{L} = c\overline{\psi}(x)\left[i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right]\psi(x) \tag{4.20}$$

これから、共役な場について

$$\pi_\alpha(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}_\alpha} = i\hbar\psi^\dagger_\alpha, \qquad \overline{\pi}_\alpha(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\overline{\psi}}_\alpha} \equiv 0 \tag{4.21}$$

ハミルトニアン及びディラック場は、(2.51)(4.20)(4.21) 式から

$$H = \int \mathrm{d}^3\mathrm{x}\overline{\psi}(x)\left[-\hbar c\gamma^j\frac{\partial}{\partial x^j} + mc^2\right]\psi(x) \tag{4.22}$$

$$\boldsymbol{P} = -i\hbar\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}\psi^\dagger(x)\nabla\psi(x) \tag{4.23}$$

と書ける。このハミルトニアンはもちろん (2.25) のハミルトニアン密度が適用されている。
ディラック場の角運動量については (2.54) に従う。(2.47) のような微小なローレンツ変換の下での場の返還は、ディラック場のもとで

$$\psi_\alpha(x) \to \psi'_\alpha(x') = \psi_\alpha(x) - \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\psi_\beta(x) \tag{4.24}$$

とあらわされる。(4.24) 式は付録 A の式 (A.60) による。ただし、$\mu, \nu = 0, ..., 3$ 及び $\alpha, \beta = 1, ..., 4$ であり、したがって $\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ は $(\alpha,\ \beta)$ についての 4×4 行列の成分である。

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^{\mu},\ \gamma^{\nu}] \tag{4.25a}$$

この時、(2.54) 式はディラック場での角運動量を次のように与える。

$$\mathrm{M} = \int \mathrm{d^3x}\psi^{\dagger}(x)[\boldsymbol{x} \wedge (-i\hbar\nabla)]\psi(x) + \int \mathrm{d^3x}\psi^{\dagger}(x)\left(\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)\psi(x) \tag{4.26}$$

2 項はそれぞれ軌道角運動量及びスピン角運動量を表している。この時、

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma 12) \tag{4.25b}$$

は 4×4 行列で、ディラック理論における 2×2 のパウリのスピン行列を一般化したものである。

$$\phi_r \rightarrow \phi'_r = e^{i\epsilon}\phi_r \cong (1 + i\epsilon)\phi_r$$
$$\phi^{\dagger}_r \rightarrow \phi^{\dagger'}_r = e^{-i\epsilon}\phi_r \cong (1 - i\epsilon)\phi^{\dagger}_r$$

の変換 (2.41) のもとでは保存量 Q

$$Q = -\frac{iq}{\hbar}\int \mathrm{d^3x}[\pi_r(x)\phi_r(x) - \pi^{\dagger}_r(x)\phi^{\dagger}_r(x)]$$

が存在した。今 (4.21) 式を代入してやれば、

$$Q = q\int \mathrm{d^3x}\psi^{\dagger}(x)\psi(x) \tag{4.27}$$

となる。また電荷・電流密度

$$s^{\alpha}(x) = (c\rho(x),\ \boldsymbol{j}(x)) = cq\overline{\psi}(x)\gamma^{\alpha}\psi(x) \tag{4.28}$$

は連続の方程式（即ち保存則）を満たす。

$$\frac{\partial s^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 0 \tag{4.29}$$

よく見るとこれは (4.14) 及び (4.19) から直接的に導出することができる。
次節でディラック場を量子化するために、これをディラック方程式の解の組に対して拡張し、反交換関係を拡張した係数のもとに課す。この節の結びとしてディラック方程式 (2.14) の完全正規直交系をとる解の組み合わせを特定する。
体積 V の周期境界条件を課した立方体空間を考える。この時完全性をなす平面波の状態は次のようにあらわされる。周期境界条件において許される運動量 $\boldsymbol{p}$ 及び正のエネルギー

$$cp_0 = E_{\boldsymbol{p}} = +(m^2c^4 + c^2\boldsymbol{p})^{1/2} \tag{4.30}$$

のもとで、ディラック方程式 (4.14) が持つ 4 つの独立な解は、

$$u_r(\boldsymbol{p})\frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{V}}, \qquad v_r(\boldsymbol{p})\frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{V}}, \qquad r = 1, 2 \tag{4.31}$$

と書かれる。この時 $u_r(\boldsymbol{p}), v_r(\boldsymbol{p})$ は定数のスピノルで以下の式を満たす

$$(\not{p} - mc)u_r(\boldsymbol{p}) = 0, \qquad (\not{p} + mc)v_r(\boldsymbol{p}) = 0, \qquad r = 1, 2 \tag{4.32}$$

ここでスラッシュのついた演算子 A(A slash と呼ばれる) は任意の 4 元ベクトルに対して次のように定義される。

$$\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu \tag{4.33}$$

時間に依存していることから、(4.31) の解 u_r, v_r はそれぞれ正及び負のエネルギーに対応し、u-solution 及び v-solution と呼ぶ。（この解釈を深堀りするとディラックの海の難しい部分にぶち当たってしまうので）第二量子化を通してディラックの海に言及することなく導く。
運動量 p に対しての正負のエネルギー固有値に対しそれぞれ 2 状態が縮退しているが、これはスピンの向きによるものである。ディラック方程式においてはスピンの $\boldsymbol{p}$ 平行成分のみが運動における保存量であり、このスピン固有値を (4.31) 式に従って選ぶ。

$$\sigma_{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \tag{4.34}$$

ただし $\boldsymbol{\sigma}$ は (4.25a) と (4.25b) 式で定義されており、この時 (4.31) 式に従って次のようにスピノルを選ぶ。

$$\sigma_{\boldsymbol{p}} u_r(\boldsymbol{p}) = (-1)^{r+1} u_r(\boldsymbol{p}), \qquad \sigma_{\boldsymbol{p}} v_r(\boldsymbol{p}) = (-1)^r v_r(\boldsymbol{p}), \qquad r = 1, 2 \tag{4.35}$$

この 2 量の反対称性は物質と反物質におけるスピンの性質を記述する上で便利になる。以下のように規格化する。

$$u_r^\dagger(\boldsymbol{p}) u_r(\boldsymbol{p}) = v_r^\dagger(\boldsymbol{p}) v_r(\boldsymbol{p}) = \frac{E_{\boldsymbol{p}}}{mc^2} \tag{4.36}$$

この時正規直交性を満たす。即ち

$$\left.\begin{aligned} u_r^\dagger(\boldsymbol{p}) u_s(\boldsymbol{p}) = v_r^\dagger(\boldsymbol{p}) v_s(\boldsymbol{p}) = \frac{E_{\boldsymbol{p}}}{mc^2}\delta_{rs} \\ u_r^\dagger(\boldsymbol{p}) v_s(-\boldsymbol{p}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

この時 (4.31) は自由粒子のディラック方程式の完全正規直交な解の組となり、体積 V にて E_p/mc^2 に規格化されている。（平面波解について詳しくは Appendix A を参照）

4.3 第二量子化

ディラック場を量子化するため、(4.31) の平面波を拡張する。

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi^+(x) + \psi^-(x) \\ &= \sum_{r\boldsymbol{p}} \left(\frac{mc^2}{VE_{\boldsymbol{p}}}\right)^{1/2} [c_r(\boldsymbol{p}) u_r(\boldsymbol{p}) e^{-ipx/\hbar} + d_r^\dagger(\boldsymbol{p}) v_r(\boldsymbol{p}) e^{ipx/\hbar}] \end{aligned} \tag{4.38a}$$

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(x) &= \overline{\psi}^+(x) + \overline{\psi}^-(x) \\ &= \sum_{r\boldsymbol{p}} \left(\frac{mc^2}{VE_{\boldsymbol{p}}}\right)^{1/2} [d_r(\boldsymbol{p}) \overline{v}_r(\boldsymbol{p}) e^{-ipx/\hbar} + c_r^\dagger(\boldsymbol{p}) \overline{u}_r(\boldsymbol{p}) e^{ipx/\hbar}] \end{aligned} \tag{4.38b}$$

ただし、$\overline{\psi}^{+}(x)+\overline{\psi}^{-}(x)$ である。またこれは許された運動量 $\boldsymbol{p}$ 及びスピン状態（r=1,2）の和をとる。$c_r^\dagger$ 及び $d_r^\dagger$ は第二量子化において演算子となることを考えて設定している。
(4.38) 式は (3.26) 式のような複素クラインゴルドン場の拡張に近い類推だが、ディラック方程式はパウリの排他律及びフェルミ・ディラック統計に従うスピン $\frac{1}{2}$ の粒子について記述している。4.1 節の扱いに従って、反交換関係を拡張した係数に対し課す。

$$[c_r(\boldsymbol{p}),\ c_s^\dagger(\boldsymbol{p'})]_+=[d_r(\boldsymbol{p}),\ d_s^\dagger(\boldsymbol{p'})]_+=\delta_{rs}\delta_{\boldsymbol{pp'}} \tag{4.39a}$$

そしてその他の反交換子は消える。($(\boldsymbol{p})$ を略す）

$$\left.\begin{aligned} {}_+=[c_r^\dagger,\ c_s^\dagger]_+=[d_r,\ d_s]_+=[d_r^\dagger,\ d_s^\dagger]_+=0 \\ [c_r,\ d_s]_+=[c_r,\ d_s^\dagger]_+=[c_r^\dagger,\ d_s]_+=[c_r^\dagger,\ d_s^\dagger]_+=0 \end{aligned}\right\} \tag{4.39b}$$

また

$$N_r(\boldsymbol{p})=c_r^\dagger(\boldsymbol{p})c_r(\boldsymbol{p}),\qquad \overline{N}_r(\boldsymbol{p})=d_r^\dagger(\boldsymbol{p})d_r(\boldsymbol{p}), \tag{4.40}$$

と定めれば、$c_r,c_r^\dagger,N_r$ 及び $d_r,d_r^\dagger,\overline{N}_r$ をフェルミオン 2 粒子の消滅、生成演算子及び数演算子として 4.1 からの類推で考えることができる。
真空状態 $|0\rangle$ は

$$c_r(\boldsymbol{p})|0\rangle=d_r(\boldsymbol{p})|0\rangle=0,\qquad all\ \boldsymbol{p},\qquad r=1,2 \tag{4.41}$$

で定義され、またこれは

$$\psi^+(x)|0\rangle=\overline{\psi}^+(x)|0\rangle=0,\qquad all\ x \tag{4.42}$$

と等価である。
粒子が存在する状態は、真空状態に生成演算子を作用させることで与えられ、これは 4.1 で与えられたフェルミオンとしての性質を (4.12) 及び (4.13) 式が保たれることから全て持っていると考えられる。
c-及び d-演算子にかかわる物理的性質を得るため、これらにかかわる保存量を表現することを考える。4.2 節においては (4.22),(4.23),(4.26),(4.27) 式のように、ディラック場のエネルギー、運動量、角運動量、及び電荷を考えた。しかしこれらは真空状態に対して値が 0 であることは要請されてない。真空での場の期待値が発散する可能性があるのである。クラインゴルドン場においても (3.15),(3.16) 式に同じことがみられるが、こちらでは保存量を演算子を正規順序積（消滅演算子を生成演算子の右側においた積）に並べ替えて再定義することによって真空状態における物理量を得ることができる（真空期待値は 0 となる）。
ただ、フェルミオンについては正規順序積の定義を修正しなければならない。ボソンの演算子を正規順序積にするには、(3.17)(3.18) 式のように交換子の値が 0 になるようにすればよかった。フェルミオンでは、反交換子の値が 0 になるようにすればよい。例えば $\psi_\alpha\equiv\psi_\alpha(x)$ と $\psi_\beta\equiv\psi_\beta(x)$ について

$$\begin{aligned} N(\psi_\alpha\psi\beta)&=N[(\psi_\alpha^++\psi_\alpha^-)(\psi_\beta^++\psi_\beta^-)] \\ &=\psi_\alpha^+\psi_\beta^+-\psi_\beta^-\psi_\alpha^++\psi_\alpha^-\psi_\beta^++\psi_\alpha^-\psi_\beta^- \end{aligned} \tag{4.43}$$

とすればよいのだ。(3.18) と比較すると、どちらかまたは両方の ψ が随伴な $\overline{\psi}$ となった時、あるいは 2 つ以上の場についての積であるときは、(3.18) と似た形になる。（差のところが + になる）
この時、保存量についての表現 (4.22),(4.23),(4.26-4.28) 式は例えば次のように修正される。

$$H=\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}N\left\{\overline{\psi}(x)\left[-i\hbar c\gamma^j\frac{\partial}{\partial x^j}+mc^2\right]\psi(x)\right\} \tag{4.22a}$$

これらにより (4.38) を置き換え、ディラック方程式の解である (4.31) の 1 粒子についての正規直交性を用いて、エネルギー、運動量及び電荷を得る。

$$H = \sum_{r\boldsymbol{p}} E_{\boldsymbol{p}}[N_r(\boldsymbol{p}) + \overline{N}_r(\boldsymbol{p})] \tag{4.44}$$

$$\boldsymbol{P} = \sum_{r\boldsymbol{p}} \boldsymbol{p}[N_r(\boldsymbol{p}) + \overline{N}_r(\boldsymbol{p})] \tag{4.45}$$

$$Q = -e\sum_{r\boldsymbol{p}}[N_r(\boldsymbol{p}) - \overline{N}_r(\boldsymbol{p})] \tag{4.46}$$

ただし q は電子の電荷であり $q = -e < 0$。従ってディラック方程式の質量 m を電子質量とすれば、c-及び d-演算子はそれぞれ電子、陽電子に対応する。
スピンの性質を明らかにするため状態 $c_r^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$（電子）及び $d_r^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$（陽電子）についてスピン角運動量を計算する。(4.26) 及び (4.34) 式から縦スピン（運動量方向）は

$$S_p = \frac{\hbar}{2}\int \mathrm{d}^3\mathrm{x} N[\psi^d agger(x)\sigma_{\boldsymbol{p}}\psi(x)] \tag{4.47}$$

この時

$$\begin{aligned} S_p c_r^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle &= (-1)^{r+1}\frac{\hbar}{2}c_r^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle \\ S_p d_r^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle &= (-1)^{r+1}\frac{\hbar}{2}d_r^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle, \qquad r = 1, 2 \end{aligned} \tag{4.48}$$

である。ここから、電子及び陽電子のどちらでも $r = 1$ に対してスピンは $+\hbar/2$ であり、$r = 2$ に対し $-\hbar/2$ であることがわかる。それぞれスピンが運動量方向に対して並行、あるいは逆行ととらえ、これは正（右巻き）及び負（左巻き）のヘリシティを持つ。（左右の巻きは運動方向に対しての巻きの方向を判別する。）ここで S_p を運動量 $\boldsymbol{p}$ におけるスピン $\frac{1}{2}$ の粒子のヘリシティ演算子と呼ぶ。
(4.44)-(4.46) 及び (4.48) 式から、 複素クラインゴルドン場に関して (?) この理論が物質と反物質に関して完全に対称であることがわかる。電荷についての符号が逆であることを除けば性質は同じである。（結果として他の磁気モーメントなどの電磁気的な性質は逆の符号をもつ。）
この物質と反物質の対称性は場の演算子を単に拡張して適切なスピノルの表式をとっていないことから、(4.38) の 2 式からは見えてこない。(4.38) 式が主張しているのは、マヨラナ表現という特定の表現の下での物質と反物質の表現の対称性のみである。ガンマ行列をマヨラナ表記 M で書くと、

$$\gamma_M^{\mu *} = -\gamma_M^\mu, \qquad \mu = 0, ..., 3 \tag{4.49}$$

*は複素共役であり、つまり 4 つの μ についてのガンマ行列はすべて純虚数でつくられた行列である。マヨラナ表現について詳しくは Appendix A の (A.79) 式を参照されたい。さて、(4.49) 式より、マヨラナ表現において演算子

$$(i\hbar\gamma_M^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc) \tag{4.49a}$$

は実である。したがって、マヨラナ表記でのディラック方程式の解が ψ_M であれば、これは複素共役な解 ψ_M^* に一致する。この時、(4.31) 式について正のエネルギー解を

$$u_{Mr}(\boldsymbol{p})\frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{V}}, \qquad r = 1, 2 \tag{4.50a}$$

とすれば、対応する負のエネルギー解は

$$u^*_{Mr}(\boldsymbol{p})\frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{V}}, \qquad r=1,2 \tag{4.50b}$$

である。この時 (4.38) 式はマヨラナ表記で次のように拡張される。

$$\left.\begin{aligned}
\psi_M(x) &= \sum_{r\boldsymbol{p}}\left(\frac{mc^2}{VE_{\boldsymbol{p}}}\right)^{1/2}[c_r(\boldsymbol{p})u_{Mr}(\boldsymbol{p})e^{-ipx/\hbar}+d^\dagger_r(\boldsymbol{p})u^*_{Mr}(\boldsymbol{p})e^{ipx/\hbar}]\\
\psi^{\dagger T}_M(x) &= \sum_{r\boldsymbol{p}}\left(\frac{mc^2}{VE_{\boldsymbol{p}}}\right)^{1/2}[d_r(\boldsymbol{p})u_{Mr}(\boldsymbol{p})e^{-ipx/\hbar}+c^\dagger_r(\boldsymbol{p})u^*_{Mr}(\boldsymbol{p})e^{ipx/\hbar}]
\end{aligned}\right\} \tag{4.51}$$

対称性を明らかに示すためオーバーラインを共役及び転置であらわしている。$c_r(\boldsymbol{p})$ 及び $d_r(\boldsymbol{p})$ は一粒子の波動関数にかけられて消滅演算子となっており、つまり、一つの状態について、物質と反物質の両方の消滅演算子となっている。生成演算子についても同様。さて、この対称性が隠された状態の (4.31) 及び (4.38) 式に戻る。

(4.39) 式の生成消滅演算子の反交換関係は、ディラック場の演算子 ψ と $\overline{\psi}$ についての反交換関係を示唆する。(4.38) と (4.39) 式から、

$$[\psi_\alpha(x),\ \psi_\beta(y)]_+ = [\overline{\psi}_\alpha(x),\ \overline{\psi}_\beta(y)]_+ = 0 \tag{4.52a}$$

$$[\psi^\pm_\alpha(x),\ \overline{\psi}^\mp_\beta(y)]_+ = i\left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{mc}{\hbar}\right)_{\alpha\beta}\Delta^\pm(x-y) \tag{4.52b}$$

ただし $\Delta^\pm(x)$ は (3.39) と (3.41) 式にある不変な Δ 関数。添え字を略すと (4.52b) は

$$[\psi^\pm(x),\ \overline{\psi}^\mp(y)]_+ = iS^\pm(x-y) \tag{4.53a}$$

ここで $S^\pm(x)$ は 4×4 行列で以下で定義される。

$$S^\pm(x) = \left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{mc}{\hbar}\right)\Delta^\pm(x) \tag{4.54a}$$

従って足し合わせることにより

$$[\psi(x),\overline{\psi}(y)]_+ = iS(x-y) \tag{4.53b}$$

ただし、$\Delta(x)=\Delta^+(x)+\Delta^-(x)$ からの類推で

$$S^\pm(x) = S^+(x)+S^-(x) = \left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{mc}{\hbar}\right)\Delta(x) \tag{4.54b}$$

とした。

Δ 関数の表式 (3.50) からの類推によって、S についても類推から書き下すことができて、(4.54a) 式を書き換えると

$$S^\pm(x) = \frac{-\hbar}{(2\pi\hbar)^4}\int_{C^\pm}\mathrm{d}^4p\ e^{-ipx/\hbar}\frac{\not{p}+mc}{p^2-m^2c^2} \tag{4.55a}$$

経路 $C^\pm$ は p_0 平面についての、極 $p_0=\pm(E_{\boldsymbol{p}}/c)$ を囲む反時計回りの経路で 3.1 図の複素数 $k_0=p_0/c$ 平面に対応している。この時、

$$(\not{p}\pm mc)(\not{p}\mp mc) = p^2-m^2c^2$$

であることから、(4.55a) は

$$S^{\pm}(x) = \frac{-\hbar}{(2\pi\hbar)^4} \int_{C^{\pm}} \mathrm{d}^4 p \; \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\not{p} - mc} \tag{4.55b}$$

と表記されることも多い。