

2.5.1

ガウス近似での多重散乱

多重散乱の評価

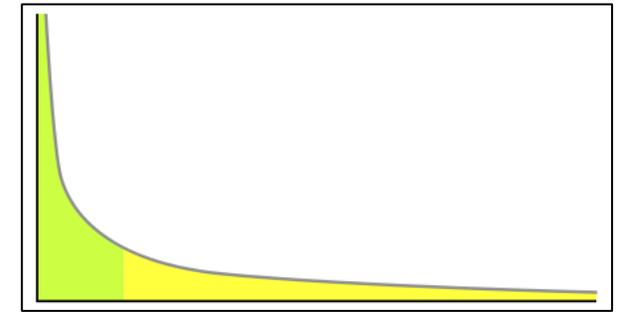
- ・ 大きな角度での単一散乱を除いた場合の多重散乱の評価
 - ・ 一度の散乱角度が10度未満の散乱だけを考える

→ ガウス分布として近似できる $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

θ の十分小さい時立体角 $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$ について
 $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta \approx 2\pi\theta d\theta$

$$P(\theta) \approx \frac{2\theta}{\langle\theta^2\rangle} \exp\left(\frac{-\theta^2}{\langle\theta^2\rangle}\right) d\theta \quad (2.88)$$
$$\langle\theta^2\rangle = \int_0^\infty \theta^2 P(\theta)$$

散乱角の期待値について



図：ロングテール（黄部分）

<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%86%AA%E4%B9%97%E5%89%87>

- ・ $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$: rms(Root Mean Square)散乱角
- ・ (2.87)と比較すると、 $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle} \approx \theta \sqrt{B}$ だが実際には式(2.87)には long tailの部分があるため、これをすべて含めようとすると無限になってしまう。

→LynchとDahlの経験的式

$$\langle \theta^2 \rangle = 2 \frac{\chi_c^2}{1+F^2} \left[\frac{1+v}{v} \ln(1+v) - 1 \right] \text{rad}^2 \quad (2.89)$$

LynchとDahlの式

$$v = 0.5 \Omega / (1 - F)$$

$$\Omega = \chi_c^2 / \chi_a^2$$

$$\chi_c^2 = 0.157z \left(\frac{Z(Z+1)}{A} \right) \frac{x}{p^2 \beta^2}$$

$$\chi_a^2 = 2.007 \times 10^{-5} Z^{2/3} [1 + 3.34(Zz\alpha/\beta)^2] / p^2$$

p : 運動量(MeV/c), x : 経路長(g/(cm²)), z : 入射粒子の電荷

Z : 原子番号, A : 質量数, α : 微細構造定数

- FはMoliere分布を考慮した部分で1以下と条件を定めておく
- Fが90~99.5%の範囲にあり、 $10 < \Omega < 10^8$ の時、この式は誤差が2%以内におさまる。

標準偏差とフィッティング

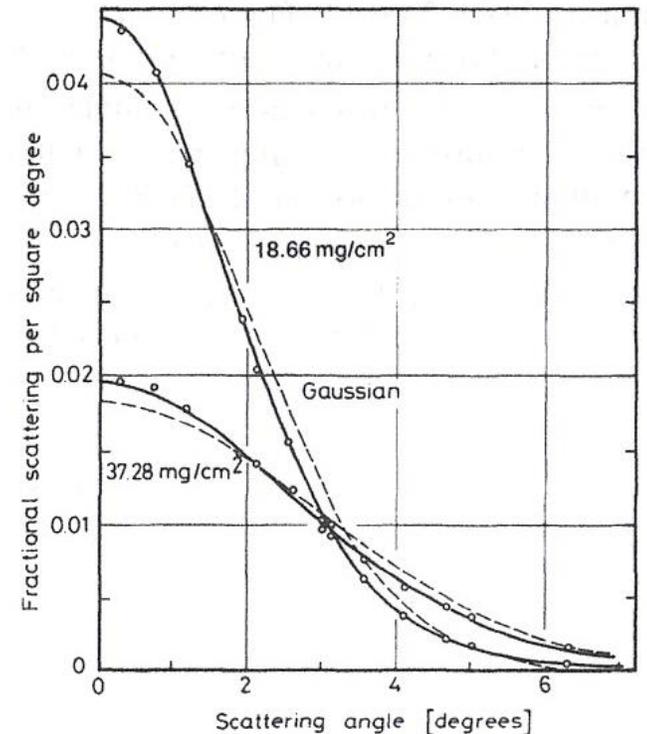
これにより15.7MeVの電子について標準偏差 σ を求める

- ・ ガウス分布と比較すると $\sigma = \sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$ であるから、

$$\langle \theta^2 \rangle = \begin{cases} 0.0023 \text{ rad}^2 & x = 18.66 \text{ mg/cm}^2 \\ 0.0051 \text{ rad}^2 & x = 37.28 \text{ mg/cm}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma = \begin{cases} 1.94^\circ \\ 2.89^\circ \end{cases}$$

- ・ 実際の結果とフィッティングでよい一致が見える。



垂直方向への射影

- θ を垂直方向へ射影した偏角についても概ねガウス分布であり

$$P(\theta_x)d\theta_x = (2\pi\langle\theta_x^2\rangle)^{-1/2}\exp\left(\frac{-\theta_x^2}{2\langle\theta_x^2\rangle}\right)d\theta_x \quad (2.90)$$

- この時、 $\langle\theta_x^2\rangle = \langle\theta^2\rangle/2$

$$\because) \theta_x = \theta\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \langle\theta_x^2\rangle = \langle\theta^2\rangle \frac{\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi}{\int_0^{2\pi} d\varphi} = \frac{\langle\theta^2\rangle}{2}$$

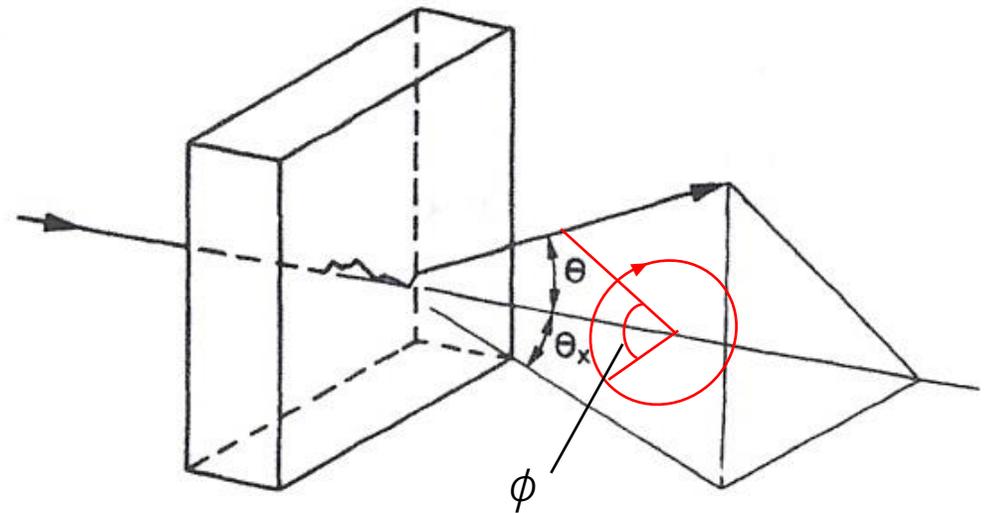
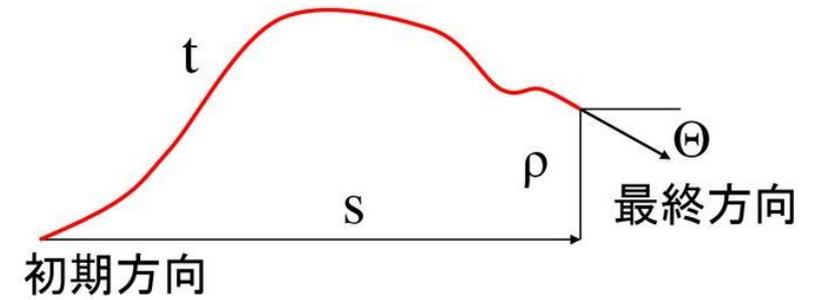


Fig.2.14

横変位

多重散乱ステップ



<https://slidesplayer.net/slide/16609425/>

- ・ 横方向への変位も小さいが存在

$$P(r)dr = 6r(\langle\theta^2\rangle t^2)^{-1} \exp\left(\frac{-3r^2}{\langle\theta^2\rangle t^2}\right) dr \quad (2.91)$$

r : 変位, $t = x/L_{rad}$: 放射長単位での厚み

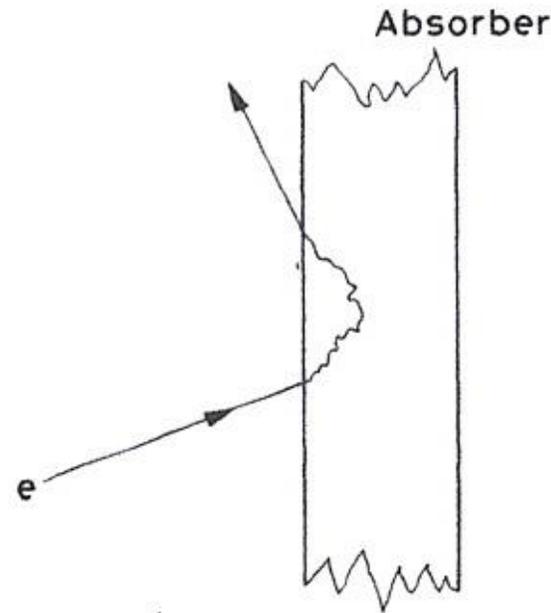
比較によって、

$$\langle r^2 \rangle = \langle \theta^2 \rangle t^2 / 3 \quad (2.92)$$

であるとわかる (放射長は単純化のため用いただけで多重散乱とは関係がない)

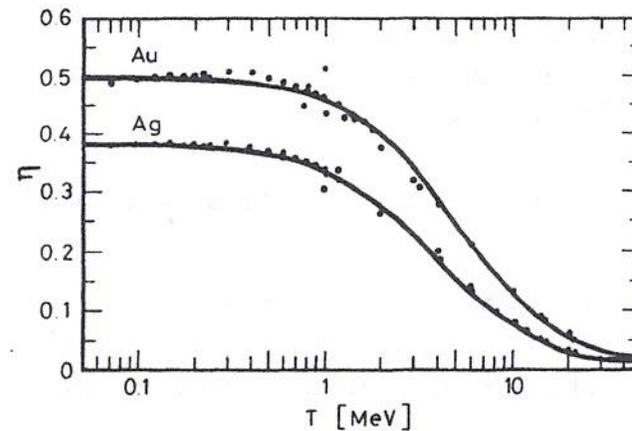
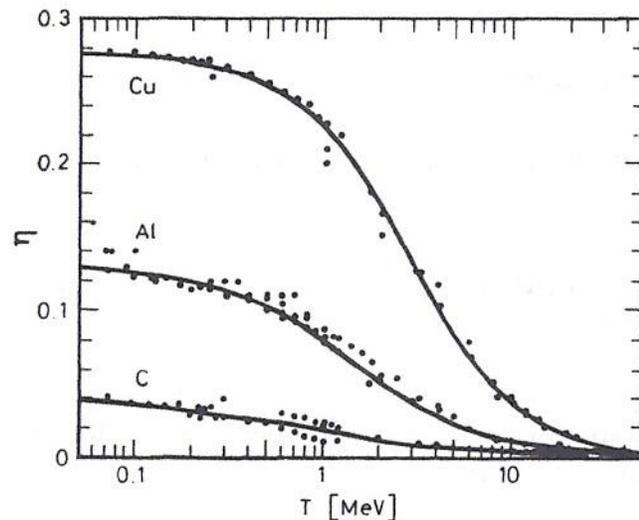
2.5.2 低エネルギー電子の後方散乱

- ・ 質量の軽い電子は原子核による大きな角度の散乱を受けやすい
→ 多重散乱ののち後方に散乱散乱されることがある (Fig.2.16)
- ・ この効果は電子が低エネルギーであるほど、また吸収物質のZが大きいほど起こりやすい。



後方散乱係数

- 入射角が斜めでも起こりやすい（垂直に比べ）
- 後方散乱される割合=後方散乱係数（グラフでは η ）
- ほとんどが後方散乱されて情報として使えない可能性もあり、重要なファクター（揃えられていない電子がNaIのようなZの大きい物質に入射した場合80%もの電子が後方に反射されうる）



2.6 エネルギー拡がり（ストラグリング）

- ・ 2.5まででエネルギー損失の期待値は概ね計算できたが、実際は統計的な変動をともなって計算には一致しない（単一エネルギービームを入射させると、式からはデルタ関数的ピークを持つはずだが実際には広がったピークをもつ(range straggling)

- ・ 視点の変更

吸収体の厚み一定の時のエネルギーの幅

⇔ エネルギー一定の時の経路長の幅

- ・ 理論的には吸収体の厚みが一定の時のエネルギー損失の分布計算は難しいが、厚みで分類できる

2.5.1 厚い物質：ガウス極限

- ・ 比較的厚い物質においてはガウス分布で簡単に表記できる
 - δE：一衝突で失われるエネルギー（ランダム）
 - ・ 一衝突での速度の変化は無視できる程度とする（速度に依る衝突は定数として扱う）
- ・ この時、独立なδEを十分な数Nだけ足し合わせるとガウス分布に近づく（中心極限定理）

$$f(x, \Delta) \propto \exp\left(\frac{-(\Delta - \bar{\Delta})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.93)$$

x:吸収体の厚み, Δ:吸収体中でのエネルギー損失,
Δ̄:損失の平均, σ:標準偏差

標準偏差

- ・ 非相対論的重粒子における統計の標準偏差 σ_0 の計算 (ボーア)

$$\sigma_0^2 = 4\pi N_a r_e^2 (m_e c^2)^2 \rho \frac{Z}{A} x = 0.1569 \rho \frac{Z}{A} x \text{ [MeV}^2\text{]} \quad (2.94)$$

N_a : アボガドロ定数, r_e, m_e : 古典的電子半径及び質量

ρ, Z, A : 吸収体の密度、原子番号、質量数

- ・ 相対論的に拡張すると

$$\sigma^2 = \frac{1 - \frac{1}{2}\beta^2}{1 - \beta^2} \sigma_0^2 \quad (2.95)$$

5.2 非常に厚い吸収体

- ・非常に厚い場合速度の減少を無視できない→破綻
- ・この場合の挙動はTschalarの論文で扱われ、また細かい分布はBichselの論文で書かれている（らしい）