

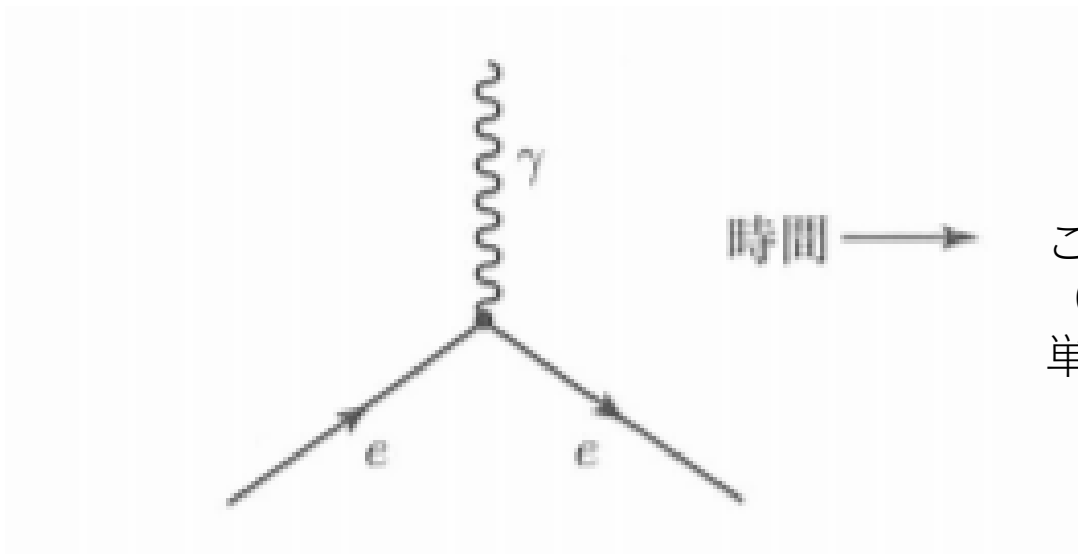
2.2 量子電磁気学(QED)

散乱過程

粒子の相互作用による散乱過程を記述するためには、系の状態の時間発展を追う必要がある。

一般に複雑なこの計算を摂動の方法を使って簡単にし、さらに可視化したものがファインマンダイアグラム。

ファインマンダイアグラム



このような図形を張り合わせたもの
(単体では意味のある図形になりえない, 例えばこの過程が
単体で起こるとすると運動量保存則が成り立っていない)

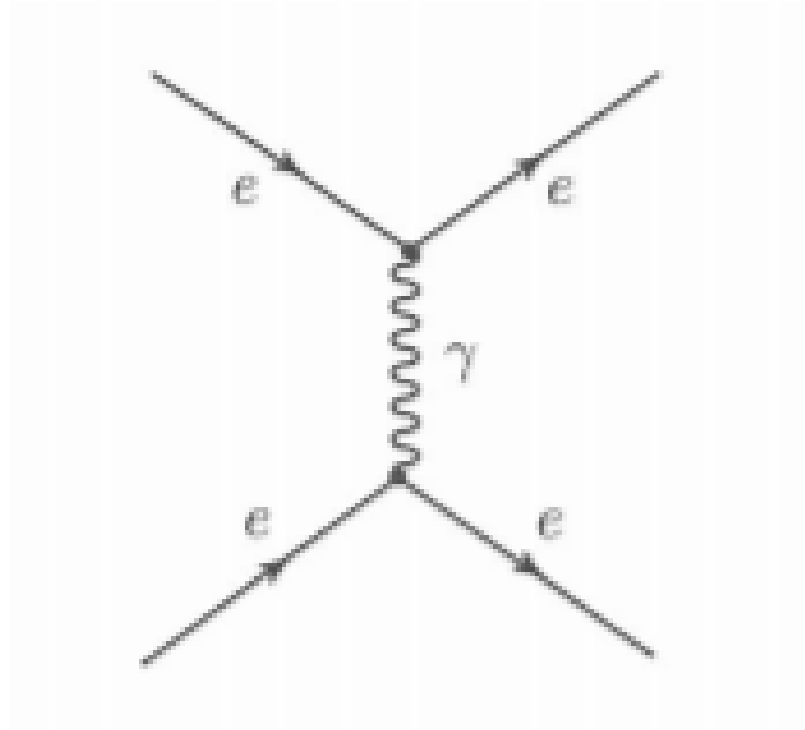
この図式の意味：電子がやってきて光子を放出（あるいは吸収）して出ていく。

また、ここでは電子を考えたが電磁相互作用を起こすような（スピン1/2の）荷電粒子であればよい。

この図は各頂点での電荷の保存と整合している。

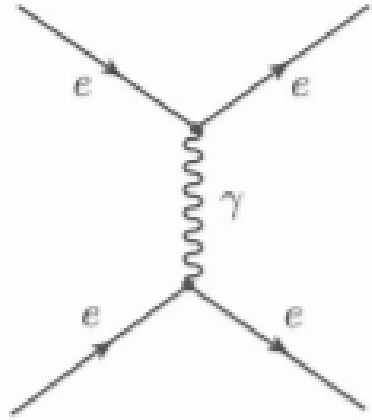
ファインマンダイアグラム

意味のある図形を描こうと思うと、先ほどのようなパーツを組み立てることになる。例えば、



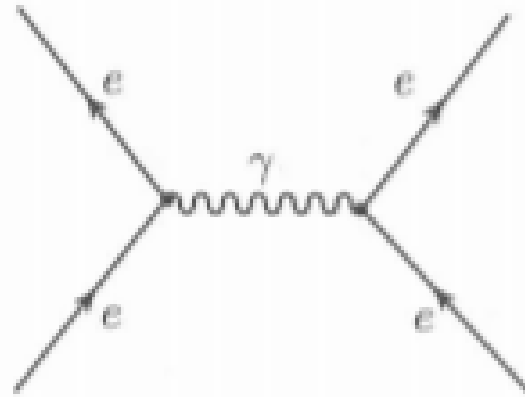
この図形の意味：電子2つがやってきて光子を交換して出ていく。

ファインマンダイアグラムは回転させることで別の過程を表すことができる。



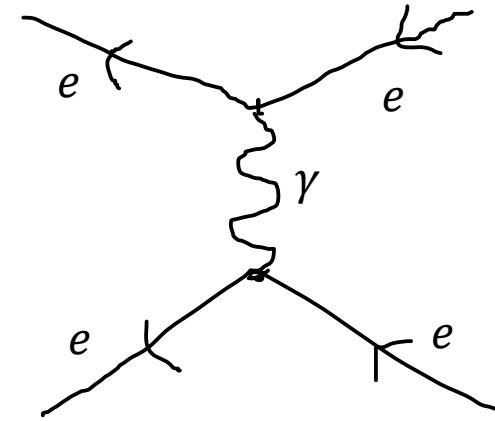
$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$$

メラー散乱
(同符号電荷でのクーロン散乱)



$$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$$

バーバー散乱
(異符号電荷での…)



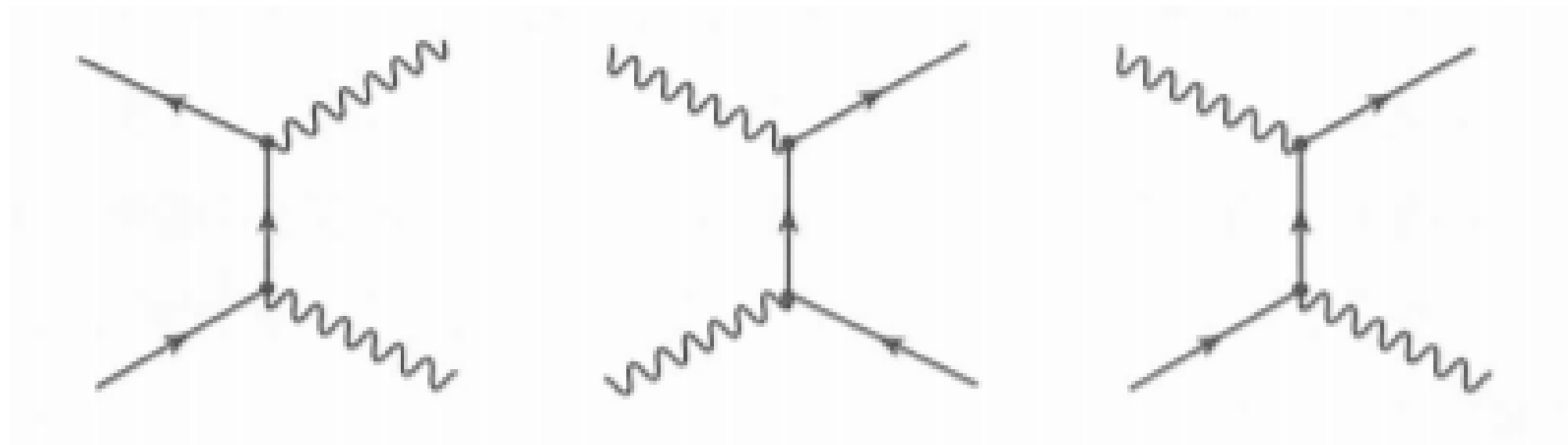
$$e^+ + e^+ \rightarrow e^+ + e^+$$

陽電子での散乱

このような図の回転は交差対称性に対応

時間を遡行する粒子は対応する粒子の反粒子

始状態や終状態に光子の存在を許すと、



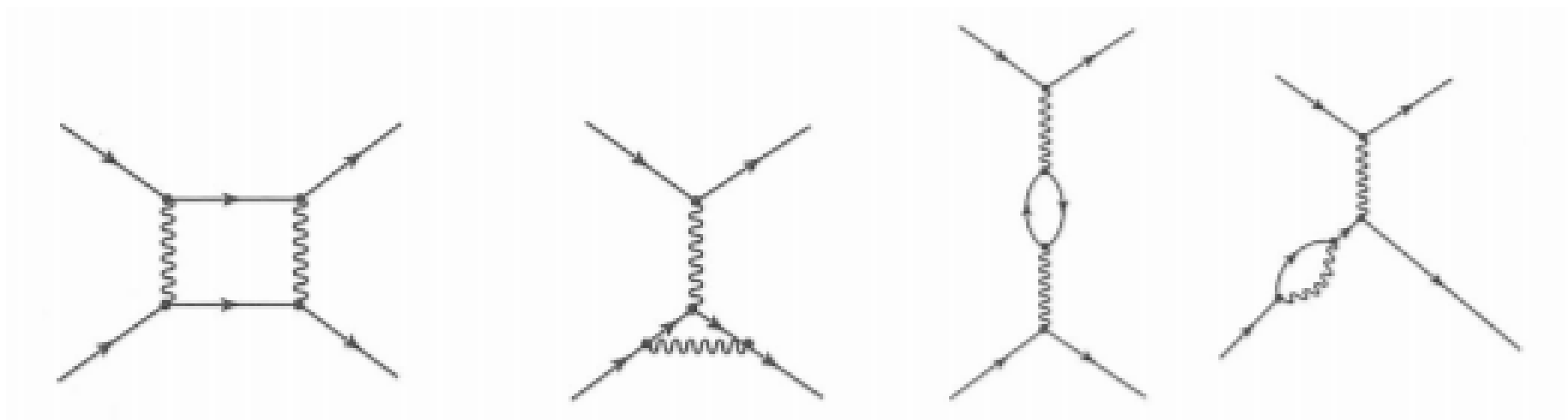
$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$
対消滅反応

$2\gamma \rightarrow e^- + e^+$
対生成反応

$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$
コンプトン散乱

といった反応も許される。

さらに多くのパーツを組み合わせると、



$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$$

(いずれもメラー散乱)

これらのような図形が許されることになる。全体としての反応は変わっていないが、内部機構が変わっている。

実は、このように頂点の数を増やすということは、摂動の次数をあげることに対応している。

用語

頂点(vertex): 線の分岐点

内線: 外部につながっていない線, つまり2つの頂点に挟まれた線

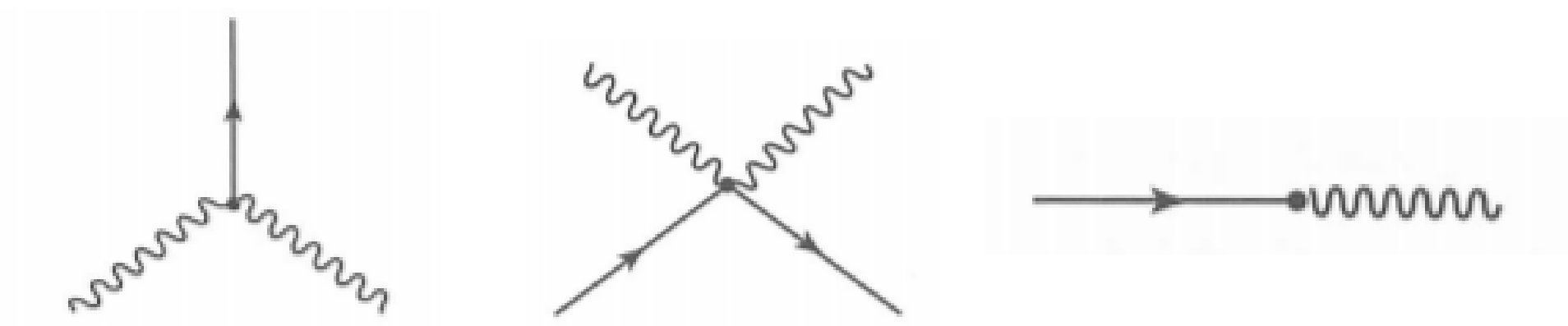
外線: 外部につながっている線, つまり少なくとも一方の端には頂点がない
($t \rightarrow -\infty$ につながっているものと $t \rightarrow \infty$ につながっているものがある)

実際の観測にかかる粒子は外線粒子であり, 内線で表される粒子は実際の粒子でない. というのも, 外線粒子は運動方程式に従っている(on-shell)が内線粒子は運動方程式に従わず(off-shell), メカニズムを表す記号として導入されているもの.

しかし現実には時間無限大はとれない...

粒子は図の左側($t \rightarrow -\infty$)から来て, 図の真ん中あたりで相互作用し(ファインマンダイアグラムで書き表される部分), 図の右側($t \rightarrow \infty$)に抜けていく.

注意として以下のようなダイアグラムは許されていない



電荷保存から言って一方をたどって外線につながっている粒子はもう一方も外線につながっていないといけない

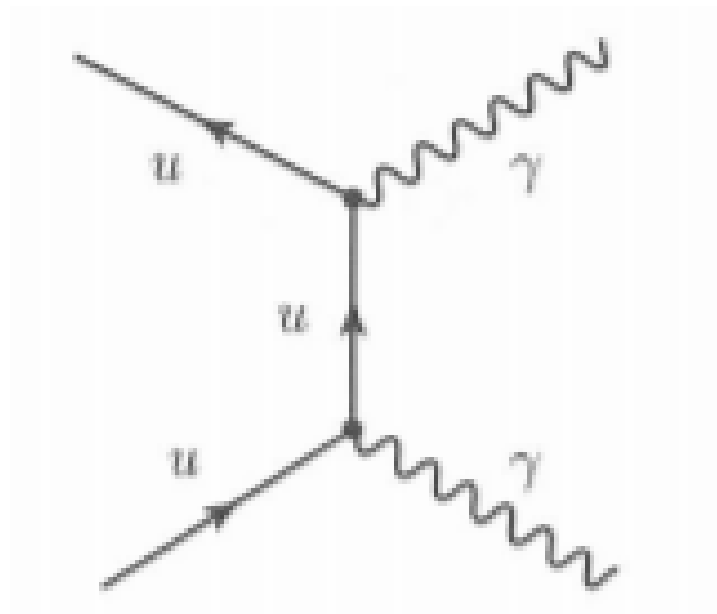
2つ以上の光子を同時に消滅もしくは生成することはできない（元の式にそのような項は出てこない）。

ファインマンダイアグラムとは、グリーン関数を計算する際にハミルトニアン（ラグランジアン）の相互作用の項を摂動として扱い、結合定数のべきに展開した後、因果律のために現れたT積（時間順序積）をウィックの定理によってN積（正規順序積）の和の形に展開してやったものを図として表したもの。
（実際の反応過程を表しているわけではない）

ファインマンダイアグラムは導入されるときに2度の展開を経ている。
1度目は摂動展開で、これは頂点の数が同じもののグループに分けることに対応。
2度目はウィックの定理による展開で、頂点の数が同じものの中で1つ1つの図形を指定することに対応。

頂点の数は結合定数の次数に対応しているので、高次になればダイアグラムの数は増えるが、結合定数の寄与は小さくなる（そもそも摂動は結合定数が小さいことに根拠を置いている）。

ここまで荷電粒子として電子を考えたが、クォークを考えることもできる。例えばuクォークを考えると、



この反応は現実的には観測できない（クォークの閉じ込めのためuクォークが単体で存在できないため）

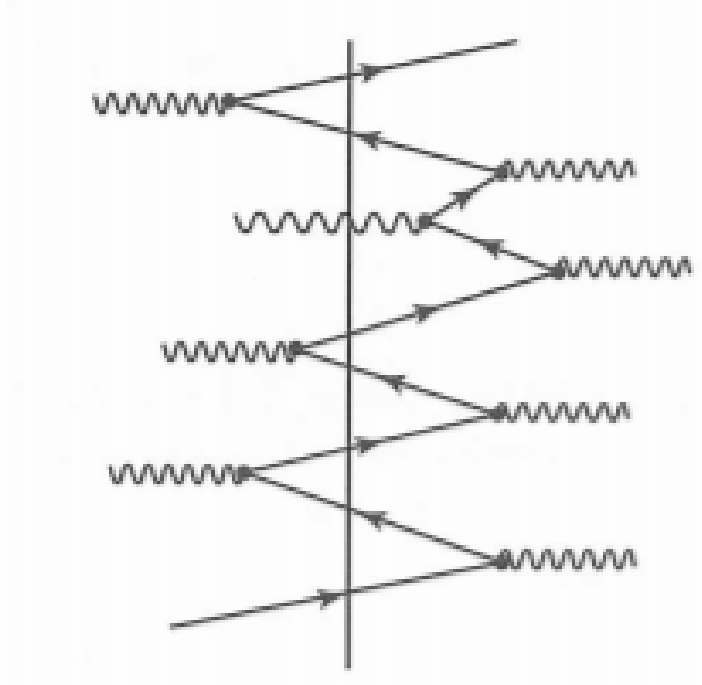
しかしこのダイアグラムを $\pi^0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d}) \right)$ の内部での過程と解釈すると、これは π^0 の“崩壊”を記述している。

そもそも π^0 は粒子反粒子の束縛状態であったから、崩壊といっても反応は単に対消滅である。

一方で同じ π 中間子であっても π^\pm は $u\bar{d}$ および $\bar{u}d$ であるので対消滅を起こさず、電磁相互作用による崩壊を起こさない。このため π^0 は π^\pm に比べて短い寿命を持っている（ π^\pm の崩壊を記述する弱い相互作用は結合定数が電磁相互作用に比べて小さいため長寿命になる）。

電子の同一性

すべての電子は同一か？



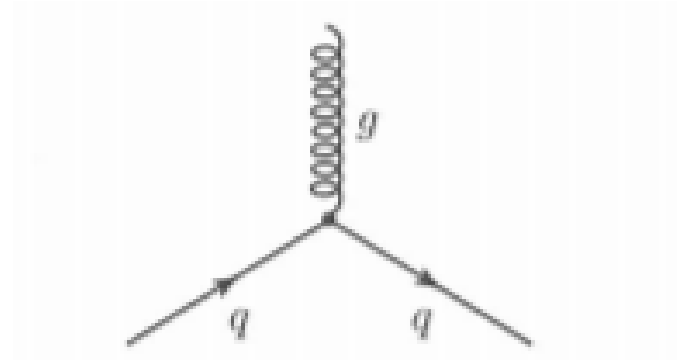
電子があるダイアグラム上に乗っているとすると、ある時間を切り出してやると、左図の場合は電子として4回、陽電子として3回存在することになる。

一般にある時間において同一の電子は電子として $n+1$ 回 (n 回)、陽電子として n 回 ($n+1$ 回) 存在するので、もしこの意味で電子が同一であるとするれば宇宙に存在する電子の数と陽電子の数はほぼ同じになってしまう。(しかし身の回りには陽電子は電子に比べてほとんど存在していないようである)

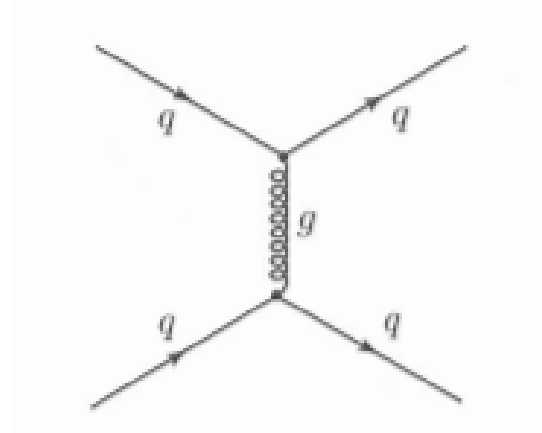
この問題を除けばこの描像は電子の同一性をよく記述している。

2.3 量子色力学(QCD)

量子色力学では相互作用を媒介する粒子はグルーオンであり、ダイアグラムの基本要素は次のような図である (q はクォーク, g はグルーオンを表す) .



QEDの時と同じようにこの図を組み合わせることで複雑な過程を記述する. 例えば2つのクォークの最低次の摂動では



$$q + q \rightarrow q + q$$

過程 $q \rightarrow q + g$ ではクォークの色は変わるが、フレーバーは変わらない。

(グルーオンはフレーバー量子数を持たないので、反応の前後でクォークのフレーバーは変わってはいけない。一方グルーオンは色荷を持つのでクォークは色を変えることができる。変化した差分はグルーオンが持ち去ることになる。)

グルーオンは2つの色を持つ (1つのプラスの色荷と1つのマイナスの色荷)。このため許されるグルーオンの種類は 3×3 の9種類かと思われるが、実際には8種類である。

(これはQCDが前提とするSU(3)対称性において次元が8しかないことに対応)

リー環（リー代数）とはリー群上の左不変ベクトル場全体の集合であり，加法に加えてカッコ積を積の演算として持った非結合環である。

リー群上の曲線の局所的なふるまいはリー環の元で与えられるので，リー群上の任意の原点を通る曲線はリー環の（各点での）基底を求めることで記述できる（ X は左不変なので実際には一点での振る舞いを見ればよい）。つまり，リー群がどのような構造をしているのかがわかる。

SU(3)に対応するリー環su(3)の元 X を指数写像で写したものを考えて，

$$\begin{aligned}\exp(X) (\exp(X))^\dagger &= I \\ \det(\exp(X)) &= 1\end{aligned}$$

から，

$$\begin{aligned}\exp(X - X^\dagger) &= I \\ \exp(\text{tr}(X)) &= 1\end{aligned}$$

つまり第1の式からu(3)の基底9つが求まるが，第2の条件からそれらのうちトレースが0でないものを除かなくてはならない。

基本ベクトルとして

$$r\bar{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b\bar{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

とあらわしてやると，第1の条件を満たすもので第2の条件のために除かれるようなものは

$$r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g}$$

というものである．これを除いた8つのベクトルで基底をなすため，SU(3)の表現であるグルーオンとして許されるのは8つのもの．

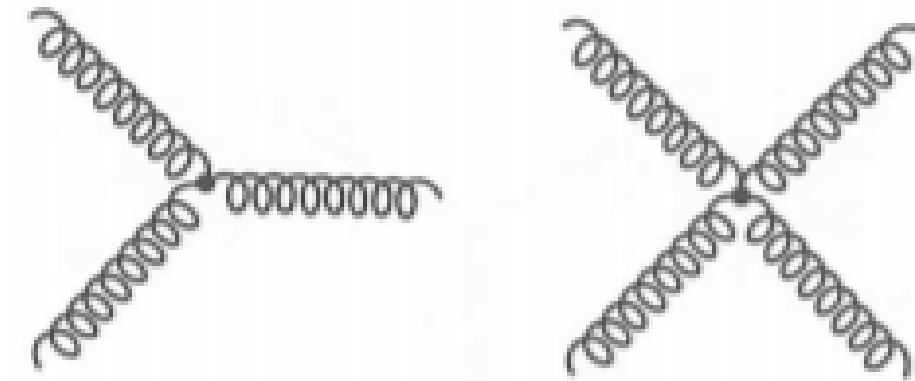
(もとの9次元のものを白色を法とするような同値類をとってやればよい，つまり

$$-x + y \in \{\text{白色}\} \Leftrightarrow x \sim y$$

とした同値関係で商をとる (射影について準同型定理より))

つまり，白色粒子は強い相互作用では“見えない”．

グルーオン自身は色荷を持っているため、グルーオンどうしで直接結合して以下のようなグルーオン-グルーオンバーテックスが存在（3つのグルーオンが結合する場合と4つのグルーオンが結合する場合がある）。



この相互作用が許されるためにクォーク無しでグルーオンのみで束縛状態を作るグルーボールの可能性が与えられる。

強い相互作用の結合定数

強い相互作用は電磁相互作用に比べて結合定数が大きく、実験的には1より大きい値が得られてしまった。

これでは摂動の方法は使えない。展開しても高次の項の方が主要になってしまい、いくつかの図形を計算するだけで良い精度が得られるということはなくなってしまう。

そこで、量子色力学の理論では、”走る結合定数“というものを導入した。

これによって、これまでは定数として扱ってきた結合定数は相互作用している粒子の距離に依存して値を変える。

相対的に距離の大きい原子核物理などでは値は大きいですが、陽子よりも小さいような短距離ではその値は極めて小さくなる。この現象は漸近的自由として知られる。

QEDにおいても結合定数は相互作用の距離によって変わる。
これは次のような分極による効果として理解できる：

例えば誘電体媒質中において正電荷 q が存在したとする。するとその電荷 q が作り出す電場は誘電体分子に分極を生じさせる。すなわち分子で作られる双極子のうち負の電荷をもつ端は q の方向に引き寄せられ、正の電荷をもつ端は q から引き離される。これを遠くから見ると点電荷 q を中心として負電荷が作る球面が存在しているかのように見える。つまり遠方から見たときには誘電体が存在することにより、粒子の実効的な電荷は小さくなる。

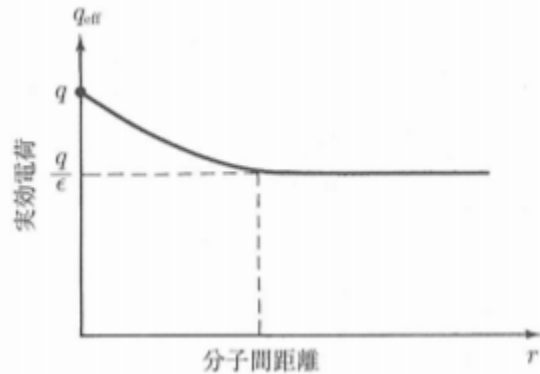


図 2.2 有効電荷の距離に対する依存性

QEDにおいては媒質中でなく真空中での反応を考えるが、この場合でも真空が誘電体のようにふるまい、電荷（つまり結合定数）を弱めてくれる。
ファインマンダイアグラムには以下のように真空中に仮想的な電子・陽電子対を生成させるようなグラフが存在する。するとこれらは頂点での粒子の電荷を弱めるように働く。
このために頂点にかかる結合定数は弱められる。

QCDにおいては、QEDのようにクォーク2つとグルーオン1つの頂点だけでなく、グルーオンだけで結びついたような頂点が存在する。

これらの項が存在することによる効果はQEDの時の分極とは逆方向で、結合定数を強める向きであることがわかっている。

ここでQCDにおける結合定数はQEDのような生成されたクォーク・反クォークにおける効果（結合定数を下げる）と、グルーオンどうしでの結合による効果（結合定数を大きくする）の異なった2つの効果が存在することになる。

これらを合わせたものが実際に現れる効果となるが、その臨界点は

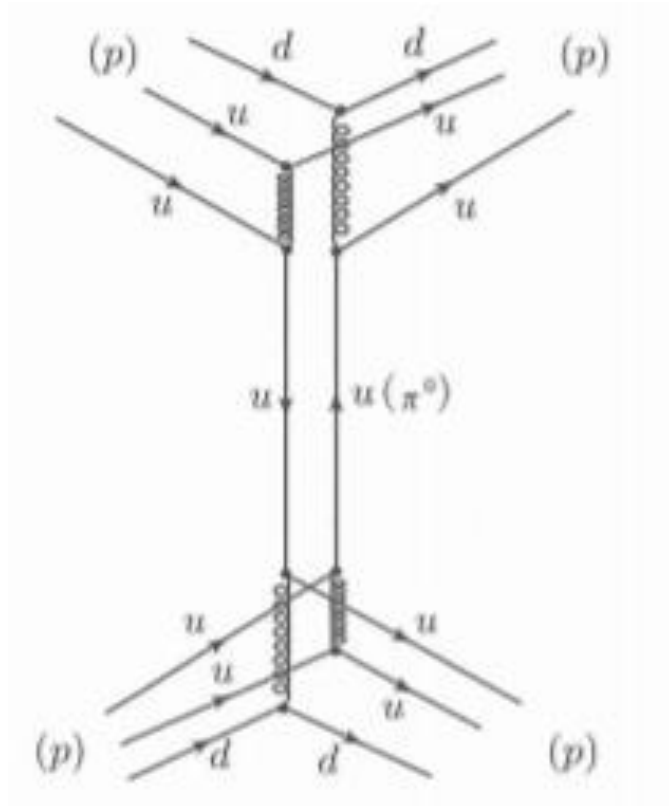
$$a \equiv 2f - 11n$$

というパラメータで決まる（ f はフレーバーの数、 n は色の数）。

これが正であれば短距離では実効的な結合定数は強くなる、一方負であれば弱くなる。

標準模型では $f = 6, n = 3$ なので、 $a = -21$ となり、長距離では結合定数は大きくなる（短距離では減少する）。

QEDとQCDの違いとして、自然に存在する粒子は電荷はもちうるが、色荷は持たないこと。クォークは2つ（中間子）や3つ（バリオン）で集まって全体として色荷がない（白色）状態で存在している。そのため我々は現実的にはクォーク単体での反応を見ることはできず、中間子やバリオンの反応を通して観測することになる。



左図で我々が観測できるのは左図の uud が一体となった陽子のみ

QCDが正しいとするとクォークの閉じ込めに関する説明が必要。
以下のような説明がつけられる：

クォークどうしが離れれば離れるほどその間のポテンシャルエネルギーは無限大に大きくなるので、それらを引き離すには無限のエネルギーが必要になる。すると十分に引き離すとそのエネルギーは新たなクォーク・反クォーク対を生成するのに必要なエネルギーを超える。そうして新たに生成されたクォークと再び束縛状態を作る方がエネルギー的に安定であるため、クォーク単独の状態は作りえない。
(厳密な証明は存在していない)