2　ラグランジアン場の理論

2.1　相対論的表記

これから、空間-時間４元ベクトルを $x^\mu(\mu=0,1,2,3)$ と書く。時間成分 $x^0=ct$ と空間座標 $x^j(j=1,2,3)$ より $x^\mu=(ct,\boldsymbol{x})$ となる。
計量テンソル $g_{\mu\nu}$ について、成分は

$$\left.\begin{array}{l} g_{00}=-g_{11}=-g_{22}=-g_{33}=+1 \\ g_{\mu\nu}=0 \quad (\mu\neq\nu\text{のとき}) \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

である。これを用いて反変ベクトル x^μ から共変ベクトル x_μ を定義すると

$$x_\mu=\sum_{\nu=0}^{3}g_{\mu\nu}x^\nu\equiv g_{\mu\nu}x^\nu \tag{2.2}$$

となる。最後の表現は縮約記法を使った。式 (2.1) と (2.2) より $x_\mu=(ct,-\boldsymbol{x})$ が得られる。
また、反変計量テンソルは以下のように定義する。

$$g^{\lambda\mu}g_{\mu\nu}=g^\lambda_\nu=\delta^\lambda_\nu \tag{2.3}$$

ここでの δ^λ_ν は普通のクロネッカーデルタであり、$\lambda=\nu$ のとき $\delta^\lambda_\nu=1$、$\lambda\neq\nu$ のとき $\delta^\lambda_\nu=0$ となる。式 (2.1) と (2.3) より、$g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}$ が得られる。
ローレンツ変換

$$x^\mu\to x'^\mu=\Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{2.4}$$

のもとでは

$$x^\mu x_\mu=(x^0)^2-\boldsymbol{x}^2 \tag{2.5}$$

は不変である。つまり $x'^\mu x'_\mu=x^\mu x_\mu$ はスカラー量である。

$$\begin{aligned} x'^\mu x'_\mu &= \Lambda^\mu_\alpha x^\alpha \Lambda_\mu^\beta x_\beta \\ &= \Lambda^\mu_\alpha \Lambda_\mu^\beta x^\alpha x_\beta \\ &= g_{\alpha\lambda}\Lambda^{\mu\lambda}g^{\beta\sigma}\Lambda_{\mu\sigma}x^\alpha x_\beta \end{aligned}$$

なので、$\Lambda^\mu_\alpha\Lambda_\mu^\beta=\delta^\beta_\alpha$ であり、

$$\Lambda^{\lambda\mu}\Lambda_{\lambda\nu}=\delta^\mu_\nu \tag{2.6}$$

となる。(更に空間-時間座標が実数であるため、行列 $\Lambda^{\lambda\mu}$ は実数でなければならない。)
ローレンツ変換のもとでの $x^\mu(x_\mu)$ のように変換された４つの成分から

なる $s^\mu(s_\mu)$ は、反変 (共変) 4元ベクトルである。このとき $s^\mu s_\mu$ は不変である。1つの例として、エネルギー運動量ベクトル $p^\mu = (E/c, \boldsymbol{p})$ がある。混同しなければ、テンソルのインデックスをよく省略することがあり、例えば x^μ や x_μ の代わりに x と書くかもしれない。

2つの4元ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のスカラー積は様々な方法で書くことができ、

$$ab = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\mu = \cdots = a^0 b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \tag{2.7}$$

となる。$x^2 = x^\mu x_\mu$ のように、ローレンツ変換のもとではスカラー積 ab は不変量である。

勾配演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ の4次元空間での一般化は4元ベクトルのように変わる。もし $\phi(x)$ がスカラー関数なら、

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\delta x^\mu$$

であり、このとき

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \phi \equiv \phi_{,\mu} \tag{2.8a}$$

が共変4元ベクトルとなる。なぜなら、

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x'^\nu}\delta x'^\nu \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x'^\nu}\Lambda^\nu{}_\mu \delta x^\mu \\ \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial\phi}{\partial x'^\nu}\Lambda^\nu{}_\mu \end{aligned}$$

となるが、共変ベクトルについて

$$\begin{aligned} x'_\mu &= \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu \\ \Lambda^\mu{}_\lambda x'_\mu &= \Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu = \delta^\nu_\lambda x_\nu = x_\lambda \end{aligned}$$

となり、確かに式 (2.8a) は共変ベクトルである。
同様に

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu \phi \equiv \phi_,^\mu \tag{2.8b}$$

が反変4元ベクトルである。コンマに続くインデックスは差別化を表していることに注意してほしい。最後に、演算子 □ はスカラーであり、

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{1\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 \equiv \Box \tag{2.9}$$

となる。

2.2　古典ラグランジアン場の理論

ある系を考える。その系を特定するためにいくつかの場 $\phi_r(x)$(ただし $r = 1, \ldots, N$) を必要とする。インデックス r は (例えばベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(x)$ の成分など) 同じ場の成分にラベルを貼ったり、あるいは異なる独立な場に言及したりするかもしれない。これから、ラグランジアン密度に関する作用積分から変分原理を用いて導かれる定理に限定して考える。ラグランジアン密度は

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) \tag{2.10}$$

ここでの導関数 $\phi_{r,\alpha}$ は式 (2.8a) で定義されている。ラグランジアン密度 (2.10) は場とその 1 階微分にのみによっているので最も一般的な場合ではないが、この本で議論される定理は全てカバーし、公式をかなり簡略化している。

連続な 4 次元の時空間での任意の領域 Ω に対して作用積分 $S(\Omega)$ を以下のように定義する。

$$S(\Omega) = \int_\Omega d^4x \mathscr{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}), \tag{2.11}$$

ここでの d^4x は 4 次元の要素 $dx^0 d^3\boldsymbol{x}$ を合わせたものである。

今からは運動の方程式、つまり場の方程式は変分原理から得られると仮定する。変分原理は力学におけるハミルトンの原理とかなり類似している。任意の領域 Ω に対し、場の変化は以下のように考える。

$$\phi_r(x) \to \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) \tag{2.12}$$

領域 Ω の表面 $\Gamma(\Omega)$ 上で場は変化せず、

$$\delta\phi_r = 0 \,\mathrm{on}\, \Gamma(\Omega) \tag{2.13}$$

とする。

場 ϕ_r は実数かも複素数かもしれない。複素場 $\phi(x)$ の場合、場 $\phi(x)$ と $\phi^*(x)$ は 2 つの独立な場として扱う。あるいは、複素場 $\phi(x)$ は 2 つの実場に分解でき、それらは独立な場として扱う。今、任意の領域 Ω と変化 (2.12-2.13) に対し、作用 (2.11) は停留値を持つと要求する。すなわち、

$$\delta S(\Omega) = 0 \tag{2.14}$$

を要求する。

式 (2.11) から $\delta S(\Omega)$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\delta S(\Omega) &= \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta\phi_{r,\alpha} \right\} \\ &= \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \right) \right\} \delta\phi_r + \int_\Omega d^4x \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \delta\phi_r \right)\end{aligned} \tag{2.15}$$

となり、この最後の行は部分積分から得られ、ここでは、

$$\delta\phi_{r,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta\phi_r$$

である。式 (2.15) の最後の項は 4 次元のガウスの発散定理を用いると表面 $\Gamma(\Omega)$ の表面積分に変えることができる。Γ 上で $\delta\phi_r = 0$ より、この表面積分は消える。もし任意の領域 Ω と任意の変化 $\delta\phi_r$ に対し $\delta S(\Omega)$ が消えるなら、式 (2.15) は Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}}\right) = 0, \quad r = 1, \ldots, N \tag{2.16}$$

を導く。これらが場の運動方程式である。

非相対論的量子力学の正準形式によってこの古典理論を量子化するために、共役変数を導入しなければならない。空間 $\boldsymbol{x}$ の各点において、時間の関数として見なせるような、場 ϕ_r の値に対応している、連続的に無限の数の自由度を持つ系を扱っていく。ここで、系が数えられる数の自由度を持つとして再び系を近似し、最後に連続の極限へ持っていく。

時間 t に固定された系を考え、3 次元空間をインデックス $i = 1, 2, \ldots$ によってラベルされた $\delta\boldsymbol{x}_i$ と等しい体積の小さな区画に分解する。それぞれの区画内の場の値を区画 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i$ の中心での値に近似する。すると、系は一般座標の離散集合によって記述される。

$$q_{ri}(t) \equiv \phi_r(i, t) \equiv \phi_r(\boldsymbol{x}_i, t), \quad r = 1, \ldots N, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{2.17}$$

これらは分離した格子の地点 $\boldsymbol{x}_i$ での場の値である。もし、場の微分係数が隣接する地点間で異なるのなら、個別の系のラグランジアンは

$$L(t) = \sum_i \delta\boldsymbol{x}_i \mathscr{L}_i \left(\phi_r(i,t), \dot{\phi}_r(i,t), \phi_r(i', t)\right) \tag{2.18}$$

として書ける。ここで、ドットは時間に関しての微分を示す。i 番目の区画におけるラグランジアン密度 $\mathscr{L}_i$ は、空間の微分係数の近似のために、隣接する格子の地点 i' での場に依存している。運動量の共役をいつものように q_{ri} によって定義すると、

$$p_{ri}(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{ri}} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_r(i,t)} \equiv \pi_r(i,t)\delta\boldsymbol{x}_r \tag{2.19}$$

となり、ここで

$$\pi_r(i,t) \equiv \frac{\partial \mathscr{L}_i}{\partial \dot{\phi}_r(i,t)} \tag{2.20}$$

である。
　個別の系でのハミルトニアンは以下のようにして与えられる。

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_{ri}\dot{q}_{ri} - L \\ &= \sum_i \delta\boldsymbol{x}_i \left\{ \pi_r(i,t)\dot{\phi}_r(i,t) - \mathscr{L}_i \right\} \end{aligned} \tag{2.21}$$

ここで $\delta\boldsymbol{x}_i \to 0$ の極限、すなわち区画の面積と格子の空間的厚さをゼロに持っていくと、$\phi_r(x)$ に対する場の共役は

$$\pi_r(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_r} \tag{2.22}$$

として定義される。
$\delta\boldsymbol{x}_i \to 0$ での極限では、$\pi_r(i,t)$ は $\pi_r(\boldsymbol{x}_i,t)$ に近づき、個別のラグランジアンとハミルトニアンの関数 (2.18) と (2.21) は

$$L(t) = \int d^3\boldsymbol{x}\mathscr{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) \tag{2.23}$$

と

$$H = \int d^3\boldsymbol{x}\mathscr{H}(x) \tag{2.24}$$

になる。ここでハミルトニアン密度 $\mathscr{H}(x)$ は

$$\mathscr{H}(x) = \pi_r(x)\dot{\phi}_r(x) - \mathscr{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) \tag{2.25}$$

によって定義され、式 (2.23) と (2.24) 中の積分は時間 t での全ての空間にわたる。ラグランジアン密度は今時間に陽に依っていないので、ハミルトニアン H はもちろん時間に対し一定である。エネルギー保存はセクション 2.4 で証明するとし、そこで表式 (2.24) と (2.25) ももう一度導くことにする。
　例として、ラグランジアン密度

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\phi_{,\alpha}\phi_{,}^{\alpha} - \mu^2\phi^2) \tag{2.26}$$

を考える。これは 1 つの実場 $\phi(x)$ に対し、μ は定数で、(長さ)$^{-1}$ の次元を持つ。次の章では、この場の量子化がコンプトン波長 μ^{-1}、すなわち粒子の質量 ($\hbar\mu/c$) が減少することでスピンゼロの中性ボソンであることをみていく。この場に対する運動方程式 (2.16) は Klein-Gordon 方程式

$$(\Box + \mu^2)\phi(x) = 0 \tag{2.27}$$

であり、共役場 (2.22) は

$$\pi(x) = \frac{1}{c^2}\dot{\phi}(x) \tag{2.28}$$

で、ハミルトニアン密度 (2.25) は

$$\mathscr{H}(x) = \frac{1}{2}\left[c^2\pi^2(x) + (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + \mu^2\phi^2\right] \tag{2.29}$$

となる。

式 (2.27-2.29) を確認していくと、式 (2.16) より

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_{,\alpha}}\right) \\
&= -\mu^2\phi - \partial_\alpha\left\{\frac{\partial}{\partial \phi_{,\alpha}}\left(\frac{1}{2}\phi_{,\alpha}g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta}\right)\right\} \\
&= -\mu^2\phi - \partial_\alpha\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta} + \frac{1}{2}\phi_{,\alpha}g^{\alpha\beta}\delta^\beta_\alpha\right) \\
&= -\mu^2\phi - \frac{1}{2}\partial_\alpha\partial^\alpha\phi - \frac{1}{2}\partial_\alpha\partial^\alpha\phi \\
&= -\mu^2\phi - \partial^\alpha\partial_\alpha\phi
\end{aligned}$$

となり、式 (2.27) が得られる。

共役場は式 (2.22) より、

$$\begin{aligned}
\pi_r(x) &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\left(\frac{1}{2}\phi_{,\alpha}\phi^{\alpha}_{,}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\left\{\frac{1}{c^2}\dot{\phi}^2 - (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2\right\} \\
&= \frac{1}{c^2}\dot{\phi}
\end{aligned}$$

ハミルトニアン密度 (2.25) より、

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}(x) &= \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathscr{L}(\phi, \phi_{,\alpha}) \\
&= \frac{1}{c^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\phi_{,\alpha}\phi^{\alpha}_{,} - \mu^2\phi^2) \\
&= \frac{1}{c^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{c^2}\dot{\phi}^2 - (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 - \mu^2\phi^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c^2}\dot{\phi}^2 + (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + \mu^2\phi^2\right]
\end{aligned}$$

より求まる。