2.2.3　エネルギー依存

図 2.4 は阻止能（dE/dx）の大きさを入射粒子の運動エネルギーの関数としてプロットしたものである。図の特徴として、

- $v \leq 0.96c$ くらいまで, 阻止能は全体にかかる $1/\beta^2$ に大きく依存する。
- $v \simeq 0.96c$ 付近で阻止能は最小値をとり、この時の粒子は最小電離といわれる。また、同じ電荷をもつ粒子の場合、この最小値はほとんど同じである。
- $v \geq 0.96c$ くらいでは、$1/\beta^2$ はほぼ一定になり、阻止能はエネルギーが増加するにつれて (2.27) の対数依存性により上昇するが、この相対論的上昇は、図 2.3 に示すように密度補正によって抑えられる。
- 最小電離値より低いエネルギーでは、各粒子は、ほとんどの場合、他の粒子タイプと異なる dE/dx カーブを示す。この特性は、このエネルギー範囲で粒子を特定する手段として素粒子物理学で利用される。

がある。

図 2.4 では、非常に低いエネルギー領域では阻止能は示されていないが、その領域ではベーテ・ブロッホの式が崩れるためである。実際、吸収体の軌道電子と同じくらいの低速度では、阻止能は最大値に達し、その後再び急激に減少する。ここでは、多くの複雑な効果があり、最も重要なのは、荷電粒子が電子を拾う効果である。これによって、荷電粒子の有効電荷が減り、阻止能も減少する。有効電荷を計算するのは、特に重いイオンにとって困難な問題である。

図 2.4 から、荷電粒子は物質中を進むにつれ、エネルギーを失うため、阻止能は上昇する。図 2.5 は、この荷電粒子の通過距離と阻止能の関係をプロットしたものである。これはブラッグ曲線として知られている。この曲線から、荷電粒子が停止する直前で、阻止能が最大になり、最後に急激に低下する。これは、放射線療法に利用され、患部に高線量の放射線を照射し、患部以外の組織への影響を最小限にすることができる。

2.2.4　$\frac{dE}{dx}$ のスケーリング則

同じ吸収体中の粒子の場合、ベーテ・ブロッホの式は

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 f(\beta) \tag{2.34}$$

と書ける。ここで $f(\beta)$ は粒子速度のみの関数。したがって、エネルギー損失は粒子の電荷と速度にのみ依存する。運動エネルギ $T = (\gamma - 1)Mc^2$ より、$\beta = g(T/M)$ と書けることから、

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 f'\left(\frac{T}{M}\right) \tag{2.35}$$

と変換できる。
これはスケーリング則を示している。粒子の質量 M_1 と電荷 z_1 の $\frac{dE_1}{dx}$ を知っていれば、粒子の質量 M_2 と電荷 z_2 の運動エネルギー T_2 のエネルギー損失は、$T = T_2(M_1/M_2)$ にスケーリングし電荷の比 $(z_2/z_1)^2$ をかけることによって、$\frac{dE_2}{dx}$ を知ることができる、すなわち

$$-\frac{dE_2}{dx}(T_2) = -\frac{z_2^2}{z_1^2}\frac{dE_1}{dx}\left(T_2\frac{M_1}{M_2}\right) \tag{2.36}$$

とわかる。

2.2.5 質量阻止能

阻止能は、質量厚さ単位で考えたとき、多くの吸収体でほとんど変化しない。そこで、阻止能を吸収体の密度で割った量を考えると、

$$-\frac{dE}{d\varepsilon} = -\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx} = z^2\frac{Z}{A}f(\beta, I) \tag{2.37}$$

となる。ここで、$d\varepsilon = \rho\, dx$ である。Z があまり異ならない場合、比（Z/A) もほとんど変わらず、$I(Z)$ も対数での変化しかないためほとんど変わらない。よって、質量阻止能は吸収体の種類によらない。たとえば、$10\,\mathrm{MeV}$ の陽子が $1\,\mathrm{g/cm^2}$ の銅で失うエネルギー量は、$1\,\mathrm{g/cm^2}$ のアルミニウムや鉄などで失うエネルギー量とほぼ同じである。これらの単位は、混合物や化合物中での阻止能を求めるのに便利である。

2.2.6 混合物や化合物中での $\frac{dE}{dx}$

これまでは、吸収体が純粋なものを考えてきた。では、混合物や化合物中での dE/dx はどうか？正確な値は直接測る必要があるが、近似的に化合物、混合物中の各元素の電子の割合によって阻止能を平均化したものと考えることができる (Bragg's Rule)。
a_i,Z_i, A_i をそれぞれ i 番目の元素の数、原子番号、原子量とし、$A_m = \sum a_i A_i$ とすると、

$$\begin{aligned}
-\frac{dE}{dx} &= \sum z^2\rho\frac{a_i Z_i}{A_m}f\left(\beta, I_i\right) \\
&= \rho\left(\sum z^2\frac{a_i A_i}{A_m}\frac{\rho_i}{\rho_i}\frac{Z_i}{A_i}f\left(\beta, I_i\right)\right) \\
&= -\rho\left(\sum\frac{w_i}{\rho_i}\left(\frac{dE}{dx}\right)_i\right)
\end{aligned}$$

となり、変形して

$$\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx} = \frac{w_1}{\rho_1}\left(\frac{dE}{dx}\right)_1 + \frac{w_2}{\rho_2}\left(\frac{dE}{dx}\right)_2 + \ldots \tag{2.38}$$

と書ける。ここで、w_i は分子 M の i 番目の元素の質量比であり、

$$w_i = \frac{a_i A_i}{A_m} \tag{2.39}$$

である。これから、混合物、化合物中の質量阻止能は、純粋な吸収体の質量阻止能に質量比率をかけたものの和で表せることがわかる。

また、(2.27) に直接使える有効な Z, A, I などをそれぞれ定義することもでき、

$$Z_{\mathrm{eff}} = \sum a_i Z_i \tag{2.40}$$

$$A_{\mathrm{eff}} = \sum a_i A_i \tag{2.41}$$

$$\ln I_{\mathrm{eff}} = \sum \frac{a_i Z_i \ln I_i}{Z_{\mathrm{eff}}} \tag{2.42}$$

$$\delta_{\mathrm{eff}} = \sum \frac{a_i Z_i \delta_i}{Z_{\mathrm{eff}}} \tag{2.43}$$

$$C_{\mathrm{eff}} = \sum a_i C_i \tag{2.44}$$

として、(2.27) に代入して計算することもできる。

2.2.7 ベーテ・ブロッホの式の制限とその他の効果

(2.27) のベーテ・ブロッホの式は、ほとんどの場合 dE/dx 計算で使われる式である。素粒子や α 粒子までの軽い原子核であれば、相対論的範囲から $\beta \simeq 0.1$ までの範囲の速度に対して、数%以内の精度の結果が得られる。さらに補正を加えることで吸収体の原子番号 26 くらいまで正確な結果が得られる。

$\beta \leq 0.05$ では、ベーテ・ブロッホの式での仮定が成り立たず、補正を入れても正確な計算はできない。

$0.01 < \beta < 0.05$ では、陽子に対して満足な理論はまだなく、より重い原子核では電子捕獲効果もあるため、さらに広い範囲で理論はない。この範囲では、実験からの式しか見つかっていない。

しかし、$\beta < 0.01$ では、Lindhard の理論によってエネルギー損失はうまく説明されている。