2.2 原子衝突による重荷電粒子のエネルギー損失

荷電粒子は以下の二つに分類：

- 電子及び陽電子
- 電子よりは重い粒子（ミューオン、π 中間子、陽子、α 粒子）

これらよりも重い重イオン（一般に炭素より重いもの）はさらに異なる作用をもたらすため除外物質中を荷電粒子が移動する際の主な特徴：

1. 粒子によるエネルギーの損失
2. 入射方向による偏り

原因となる現象：

1. 物質の原子にある電子との非弾性衝突
2. 原子核による弾性散乱
3. チェレンコフ光の放射：物質中の光の速度を超えて荷電粒子が物質中を移動する場合に生じる光
4. 核反応
5. 制動放射：（高速な）電子が強い電磁場との相互作用で軌道が変化したり減速するとともに X 線を放出すること

この中では電磁的な作用である上の二つの効果が大きく、他のものは稀。特に核反応、制動放射に関しては今回は無視。
エネルギー損失に最も大きくかかわるのは 1 つ目。散乱断面積は $\sigma \cong 10^{-17} \sim 10^{-16}\ \mathrm{cm}^2$ 程度で、粒子のエネルギーは、衝突された原子のイオン化や励起を引き起こす。1 度の衝突で移り変わるエネルギーは粒子の運動エネルギーに対してわずかなものであるが、単位光路長あたりの衝突数が多いため、エネルギーの損失は比較的薄い物質に対してぶつけても観測される。（例：10 MeV の陽子は 0.25 mm の厚みの銅を通るうちにエネルギーをすべて失う）
原子衝突は以下の 2 つに分類されることが多い。

- 励起のみ起こるような軽い衝突
- イオン化を起こすのに十分なエネルギーが伝わる強い衝突

イオン化を起こすような強い衝突においては、衝突で電離した電子が電子線として相互作用し、二次電離を引き起こすほどにエネルギーが伝わるものもある。このような衝突により高エネルギーをもった電離電子線を δ 線、ノックオン電子という。
原子核による弾性散乱も電子との非弾性衝突ほどではないがよくおこるが、基本的に原子核の質量が衝突する粒子のそれより大きいため、エネルギーの移り変わりは非常に小さい。そうでない例として、例えば α 粒子を水素に衝突させた場合などは、この弾性散乱によりいくらかエネルギーが失われる。（その場合でも電子との非弾性衝突の寄与が大きい）
非弾性衝突は、統計的性質として量子力学の確率をもっておこるが、ふつう巨視的な経路に対してその数が大きいため、エネルギー損失の総量の変動は小さく、単位光路長あたりの平均損失を考えることができる。これ

は阻止能と呼ばれ、dE/dx として、ボーアによって古典的定理を用いて初めて計算され、のちにはベーテやブロッホらが量子力学を用いて計算した。それでもボーアの計算はためになる（教育的である）ので、これを簡略化して紹介する。

2.2.1　ボーアの計算-古典的な場合

荷電重粒子を考える。

電荷　ze

質量　M

速さ　v

荷電重粒子は Fig.2.2 のように物質中を通過し、軌道からの距離 b の位置に原子内の、自由に動く基底状態の電子があり、荷電重粒子との相互作用が小さく、わずかにしか動かないためこの電子の移動による電磁場の変動を考えなくてよいとする。また、この重荷電粒子は衝突の際、電子の質量よりはるかに大きいため軌道を変えられることがないとする。これが前述した電子と荷電重粒子を分けて考える理由の一つである。
荷電重粒子との衝突により電子が受ける力積を考える。

$$I = \int F dt = e \int E_\perp dt = e \int E_\perp \frac{dt}{dx} dx = e \int E_\perp \frac{dx}{v} \tag{2.16}$$

対称性から、電子には電場 E の軌道垂直成分のみが関与する。Fig2.2 のように無限に長い円筒を考えてガウスの法則を適用すると、

$$\int E_\perp 2\pi b dx = 4\pi ze, \quad \int E_\perp dx = \frac{2ze}{b} \tag{2.17}$$

$$I = \frac{2ze^2}{bv} \tag{2.18}$$

従って得られるエネルギーは

$$\Delta E(b) = \frac{I^2}{2m_e} = \frac{2z^2e^4}{m_e v^2 b^2} \tag{2.19}$$

N_e を電子の密度とすれば、微小な厚み $b \sim b + db$ 間に存在する長さ dx の範囲の電子全体によるエネルギーの損失は、

$$-dE(b) = \Delta E(b) N_e dV = \Delta E(b) N_e \cdot 2\pi b\, db\, dx = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \frac{db}{b} dx \tag{2.20}$$

このままだと普通に行けば b について $0 \to \infty$ で積分しそうであるが、これは妥当でない。例えば b が非常に大きいとき作用する時間は非常に短いと考えられるし、同様に b=0 の時は 2.19 より ΔE が発散してしまい妥当でない。従って、我々は相互作用する距離 b について制限を加えなければならない。制限として $b_{\min}$ と $b_{\max}$ の間を定めて 2.20 を b について積分すると、

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}} \tag{2.21}$$

$b_{\min}$ 及び $b_{\max}$ はどのような値をとるだろうか。古典的に考えると、真正面からの衝突によって電子が得うるエネルギーが最大となる。衝突後の質量 M の粒子の速度を v_1、電子の速度を v_2 とすると、運動量保存則及

び力学的エネルギー保存則から、

$$Mv = Mv_1 + mv_2$$
$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M{v_1}^2 + \frac{1}{2}m{v_2}^2$$

これを解いて

$$v_2 = \frac{2Mv}{m+M}$$

これが最大となるのは $M \to \infty$ の時 $v_2 = 2v$ であり、この時受け取るエネルギーは $\frac{1}{2}m_e(2v)^2$ である。実際には相対論的効果を加味しなければならない。相対論的速さは

$$\gamma v = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}v \quad (\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \beta = \frac{v}{c})$$

と、γ をかけた状態であらわされる。従って、この時先ほどの古典的エネルギーは $2\gamma^2 m_e v^2$ と書き換えられる。これに対して 2.19 を用いると、受け取るエネルギーが最大となるのは $b = b_{\min}$ のときであるから、

$$\frac{2z^2e^4}{m_e v^2 {b_{\min}}^2} = 2\gamma^2 mv^2,\ \ b_{\min} = \frac{ze^2}{\gamma m_e v^2} \tag{2.22}$$

となる。

一方 $b_{\max}$ については、電子が本来自由ではなく、原子によってある軌道の周波数 ν に縛られていることから、電子がエネルギーを吸収するには束縛された電子自身の周期 $\tau = 1/\nu$ に比べて短い時間の中で摂動が起きなければならない。そうでない場合、摂動は断熱的で、エネルギーは移り変わらない。このような量を断熱不変量という。（断熱不変量：外部パラメータが時間的にゆっくり変化するときに不変に保たれる物理量）

この衝突では典型的な相互作用する時間は $t \cong b/v$ であるから、時間を相対論の固有時間にし、また複数の束縛状態の平均周波数を $\overline{\nu}$ として

$$\frac{b}{\gamma v} \leq \tau = \frac{1}{\overline{\nu}} \tag{2.23}$$

従って、b の最大値は

$$b_{\max} = \frac{\gamma v}{\overline{\nu}} \tag{2.24}$$

$b_{\min}$ とともに 2.21 に代入して

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e ln \frac{\gamma^2 m v^3}{ze^2\overline{\nu}} \tag{2.25}$$

これがボーアの（本質的に）古典的計算である。α 粒子やより重い原子核などのとても重い粒子のエネルギー損失については合理的な記述ができているが、陽子のような軽い粒子に対しては量子的な効果のために成り立たない。（それでも荷電粒子の衝突による電子へのエネルギー損失の重要な特徴をすべてとらえたものではある）

2.2.2 ベーテ・ブロッホの式

量子力学に基づいた正しい計算はベーテやブロッホらによってはじめて計算された。エネルギーの移動は衝突径数（相互作用がないとしたときに標的の粒子にある粒子が近づく最近接距離で計測できない量）よりも運動量（計測できる量）の移動によってパラメーター表記される。この時計算式はベーテ・ブロッホの式と呼ばれ、エネルギー損失の基本的な計算として用いられる。

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a {r_e}^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\left[ln\left(\frac{2m_e\gamma^2 v^2 W_{\max}}{I^2}\right) - 2\beta^2\right] \tag{2.26}$$

実際にはさらに δ 及び C の二つのパラメーターを加えて

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a {r_e}^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\left[ln\left(\frac{2m_e\gamma^2 v^2 W_{\max}}{I^2}\right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z}\right] \tag{2.27}$$

ここで

$$2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 = 0.1535 \text{ MeVcm}^2/\text{g}$$

ただし 最もエネルギーが伝わるのは粒子同士の正面衝突、あるいは先述のような弾性的な衝突の場合であり、

r_e:	古典的電子半径 $= 2.187 \times 10^{-13}$ cm	ρ:	吸収物質の密度
m_e:	電子の質量	z:	入射粒子の電荷（素電荷 e 単位）
N_a:	アボガドロ定数 $= 6.022 \times 10^{23}$ mol^{-1}	$\beta=$	v/c（入射粒子について）
I:	平均励起エネルギー	$\gamma=$	$1/\sqrt{1-\beta^2}$
Z:	吸収物質の原子番号	δ:	密度補正（分極による電子密度の移動）
A:	吸収物質の質量数	C:	殻補正
$W_{\max}$:	1 衝突で移るエネルギーの最大値		

この時入射粒子の質量を M とすると、力学的に計算して

$$W_{\max} = \frac{2m_e c^2\eta^2}{1 + 2s\sqrt{1+\eta^2} + s^2} \tag{2.28}$$

ただし $s = m_e/M$、$\eta = \beta\gamma$ であり、$M \gg m_e$ とすれば

$$W_{\max} \simeq 2m_e c^2 \eta^2$$

と近似できる。

・平均励起エネルギー I

I はベーテ・ブロッホの式の中核をなすパラメーターであり、ボーアの公式の平均の軌道の周波数 ν にプランク定数をかけた $h\overline{\nu}$ であらわされる。これは理論的には原子準位の振動の強さと呼ばれるものによって重みをつけた対数平均である。

なお、対数平均 $M_{lm}(x,y)$ は

$$M_{lm}(x,y) = \lim_{(\xi,\eta)\to(x,y)} \frac{\eta - \xi}{ln(\eta) - ln(\xi)}$$

実際は、原子準位の振動の強さがほとんどの場合わからないので計算の難しい量であるが、$\frac{dE}{dx}$ や I と Z を用いてフィッティングした半経験的公式から計算される。一例としては

$$
\begin{aligned}
\frac{I}{Z} &= 12 + \frac{7}{Z}eV & Z < 13 \\
\frac{I}{Z} &= 9.76 + 58.8Z^{-1.19}eV & Z \geq 13
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

実際は Z によってより複雑に異なり、原子の閉殻によって不規則さをもっている。

・殻及び密度の補正

δ 及び C はベーテ・ブロッホの補正としてエネルギーの高い、あるいは低いところで重要となる。

密度効果は粒子の電磁場によって粒子線に沿った原子に分極が起こることによって生じる。この分極化によって、粒子の軌道から遠い電子はその電磁場から守られる形で受ける電磁場が弱くなる。外側の電子の寄与は小さく、したがってエネルギー損失が小さくなる。特に粒子のエネルギーが高いときにこの寄与が大きくなる。また速度が高いほど衝突する範囲が広く、離れた位置での衝突がエネルギー損失への寄与が大きい。またこれは密度が大きいほうが大きくなる。補正されたものとの違いは図 2.3 の通り。

δ の値はステインハイマーによって以下の式で与えられる。

$$
\delta = \begin{cases} 0 & X < X_0 \\ 4.6052X + C_0 + a(X_1 - X)^m & X_0 < X < X_1 \\ 4.6052X + C_0 & X > X_1 \end{cases} \tag{2.30}
$$

ただし $X = log_{10}(\beta\gamma)$ で、X_0, X_1, C_0, a, m は吸収する物質に依存する定数。C_0 は

$$
C_0 = -\left(2ln\frac{I}{h\nu_p} + 1\right) \tag{2.31}
$$

また ν_p は物質のプラズマ振動数と呼ばれる値で

$$
\nu_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\pi m_e}} = \sqrt{80.617 \times 10^6 \mathrm{cm}^3 N_e}\ \mathrm{Hz} \tag{2.32}
$$

（$N_e = N_a \rho Z/A$）で与えられる。2.30 のフィッティングによって残りの定数を与えられる。いくつかの定数については表 2.1 の通り。

殻補正は入射粒子の速度が束縛電子の軌道での速度と同程度かそれより遅いときに効果が大きい。このエネルギー帯においては、電子が入射粒子に対し定常であるという仮定が妥当でなく、ベーテ・ブロッホの式が破綻する。補正は一般に小さく、$\eta \geq 0.1$ において次のような経験的式で与えられる。ここで $\eta = \beta\gamma$ で、I は eV 単位での平均励起エネルギーである。

$$
\begin{aligned}
C(I,\eta) =& (0.422377\eta^{-2} + 0.0304043\eta^{-4} - 0.00038106\eta^{-6}) \times 10^{-6} I^2 \\
&+ (3.850190\eta^{-2} - 0.1667989\eta^{-4} + 0.00157955\eta^{-6}) \times 10^{-9} I^3
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

他にも、超相対論的極限（速度が光速に近く $E \simeq cp$ と近似できる）状態での放射線の効果や入射するものが質量が無限という仮定による力学的効果、より高次での量子電磁力学的な効果、散乱断面での高次な限界点、粒子の内部構造による補正、低速でのスピンの効果及び電子捕獲などが補正として存在する。重イオンによる電子捕獲の効果を除いては、これらの効果は 1% 程度である。いずれにせよベーテ・ブロッホの式の補正としては、初等的な粒子に対しては殻及び密度効果を補正すればよい。