

9

弱い相互作用

この章では、弱い相互作用の理論を眺めてみる。7章の内容を多く使うが、8章は使わない。4.4.1項は有用な背景情報となるだろう。まず初めに、レプトンと W^\pm の結合に関するファインマン則を説明し、その後、ミュー粒子、中性子、荷電パイ中間子のベータ崩壊という、古くからの三つの問題を少し詳しく取り扱う。次に、クォークと W^\pm との結合を考察する。それにより、カビボ角、GIM機構、小林-益川行列が出てくる。9.6節では、クォークやレプトンと Z^0 との結合に関するファインマン則を説明し、最後の節で、グラシロー-ワインバーグ-サラムの電弱理論を描写する。この章を通して、ニュートリノは質量ゼロとして扱う。(わずかな)ニュートリノ質量を入れたとしても、結果として測定できるほどの違いは現れない。

9.1 荷電レプトン弱相互作用

弱い相互作用の媒介粒子は(QEDにおける光子や、QCDにおけるグルーオンとの類推で) $W(W^+$ と $W^-)$ と Z^0 だ。質量をもたない光子やグルーオンと違って、これら「中間状態におけるベクトルボソン」はきわめて重く、実験的には

$$M_W = 80.40 \pm .03 \text{ GeV}/c^2, \quad M_Z = 91.188 \pm .002 \text{ GeV}/c^2 \quad (9.1)$$

である。質量をもつスピン1の粒子は三つの偏極状態($m_s = 1, 0, -1$)が許される一方で、質量をもたない自由粒子は二つの偏極状態しかもたない(z を運動の方向とすると、「縦」偏極、すなわち $m_s = 0$ は起こらない)。ゆえに、光子とグルーオンに対してはローレンツ条件、

$$\epsilon^\mu p_\mu = 0 \quad (9.2)$$

を課して(ϵ^μ の独立成分を4から3に減らす)、さらにクーロンゲージ($\epsilon^0 = 0$, つまり、 $\epsilon \cdot p = 0$ により独立成分の数をさらに3から2に減らす)を使った。 W と Z に対しては、後者の制約を課すことができない。その結果、完全性関係はまったく違

うものとなり (問題 9.1), 伝播関数はもはや単純な $-ig_{\mu\nu}/q^2$ ではなく,

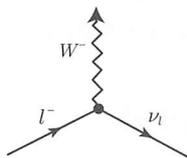
$$\frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M^2 c^2)}{q^2 - M^2 c^2} \quad (W \text{ と } Z \text{ の伝播関数}) \quad (9.3)$$

となる*1. ここで M は, 場合に応じて M_W か M_Z である. 実際のところ, q^2 は通常, $(Mc)^2$ よりもずっと小さいので

$$\frac{ig_{\mu\nu}}{(Mc)^2} \quad (q^2 \ll (Mc)^2 \text{ のときの伝播関数}) \quad (9.4)$$

を使っても安全だ. しかしながら, 注目する過程が Mc^2 と同じくらいの大きさのエネルギーを含むときは, もちろん, 正確な表式に戻さなければならない.

(W によって媒介される)「荷電」弱相互作用は, (Z によって媒介される)「中性」のものよりも単純なので, しばらくの間, 前者にのみ集中する. この節では, W のレプトンへの結合を考察する. その次の節では, クォークとハドロンへの結合を議論する. 基本的なレプトンのバーテックスは以下である.



ここで, 電子, ミュー粒子, タウは, W^- を放出して (あるいは W^+ を吸収して), それぞれに対応するニュートリノに変換される. 逆の過程 ($\nu_l \rightarrow l^- + W^+$) もまたもちろん可能だし, 反レプトンを含む「交差した」反応も可能だ. ファインマン則は QED のものと同様 (すでに述べたように, 質量をもつ媒介粒子を組み入れるための修正を除いて) だが, バーテックス因子だけは次のようになる.

$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \quad (\text{弱相互作用のバーテックス因子}) \quad (9.5)$$

いろいろなところにある 2 は純粹に慣習で, $g_w = \sqrt{4\pi\alpha_W}$ は (QED における g_e や QCD における g_s との類推で)「弱結合定数」だ. しかし, $(1 - \gamma^5)$ の項は深遠な重要

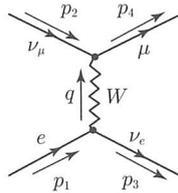
*1 $M \rightarrow 0$ の極限で光子の伝播関数と一致しないことをうとうしいと思うかもしれない. スピン 1 の (あるいはそれよりも大きなスピンをもつ) 粒子に対しては, 一つの重要な観点なのだが, 連続的な操作でないことから, 悪名高いことに質量ゼロの極限が思うようなかたちにならない. 自由度の数 (つまり, 許されるスピンの向きの数) は, 突然 $2s + 1$ ($M \neq 0$ の場合) から 2 ($M = 0$ の場合) になってしまう. $M = 0$ への滑らかな遷移を許す理論を定式化するいくつかの方法はあるが, 擬似的な物理的ではない状態を導入するという対価を支払うことになる.

性をもつ。 γ^μ だけだと (QED や QCD のように) ベクトル結合を表す一方で, $\gamma^\mu \gamma^5$ は軸性ベクトルだ (式 (7.68))。ベクトルに軸性ベクトルを加えた理論はパリティの保存を破るようになり, これこそがまさに弱い相互作用で起きていることである*2。

例題 9.1 逆ミュー粒子崩壊

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$$

という過程は (最低次では) 以下の図で表される。



この過程について考察しよう。ここで, $q = p_1 - p_3$ であり, $q^2 \ll M_W^2 c^2$ と仮定しよう。すると簡略化された伝播関数 (式 (9.4)) を安全に使えて, 振幅は

$$\mathcal{M} = \frac{g_w^2}{8(M_W c)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu(1 - \gamma^5)u(2)] \quad (9.6)$$

となる。カシミール・トリック (式 (7.125)) を使い, さらにニュートリノの質量を無視するという近似により,

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 &= \left(\frac{g_w^2}{8(M_W c)^2} \right)^2 \text{Tr}[\gamma^\mu(1 - \gamma^5)(\not{p}_1 + m_e c)\gamma^\nu(1 - \gamma^5)\not{p}_3] \\ &\quad \times \text{Tr}[\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\not{p}_2\gamma_\nu(1 - \gamma^5)(\not{p}_4 + m_e c)] \end{aligned} \quad (9.7)$$

となることがわかる。7.7 節の定理により, 最初のトレースは

$$8[p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - g^{\mu\nu}(p_1 \cdot p_3) - i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{1\lambda} p_{3\sigma}] \quad (9.8)$$

となり, 2 番目は

*2 実際のところ, 二つの項が同じくらい大きさであるという観点から, その破れは「最大」だ。パリティの破れが初めて観測されたとき, $(1 + \epsilon\gamma^5)$ というかたちの因子が使われたが, 実験家がすぐに $\epsilon = -1$ であることを見出した (問題 9.3)。それを「V - A」(ベクトル引く軸性ベクトル) 結合とよぶ。フェルミの元々の理論ではベータ崩壊は純粋にベクトル理論であったし (QED のように), スカラー, 擬スカラー, テンソル, あるいは純粋な軸性結合を提案する者もいたが, 1956 年になるまで異なるパリティをもつ項を混ぜ合わせることを誰も真剣に試みなかった。

$$8[p_{2\mu}p_{4\nu} + p_{2\nu}p_{4\mu} - g_{\mu\nu}(p_2 \cdot p_4) - i\epsilon_{\mu\nu\kappa\tau}p_2^\kappa p_4^\tau] \quad (9.9)$$

となる。よって

$$\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = 4 \left(\frac{g_w}{M_W c} \right)^4 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) \quad (9.10)$$

を得る*3。

実際には、終状態のスピンについては和を取って、始状態についてはスピンの平均を取りたい。電子は二つのスピンの状態をもつが、(質量のない)ニュートリノは(4.4節で学んだように)一つの状態しかもたない(お望みならば、ニュートリノはいつも「左巻き」なので、入射ニュートリノはいつも偏極していると考えてよい)。よって、

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2 \left(\frac{g_w}{M_W c} \right)^4 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) \quad (9.11)$$

である。重心系に行き、電子の質量を無視すると

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 8 \left(\frac{g_w E}{M_W c^2} \right)^4 \left\{ 1 - \left(\frac{m_\mu c^2}{2E} \right)^2 \right\} \quad (9.12)$$

となる。ここで、 E は入射電子(またはニュートリノ)のエネルギーである。微分断面積(式(6.47))は等方的で(あらゆる散乱角が同様の頻度で選ばれる)、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left[\frac{\hbar c g_w^2 E}{4\pi(M_W c^2)^2} \right]^2 \left\{ 1 - \left(\frac{m_\mu c^2}{2E} \right)^2 \right\}^2 \quad (9.13)$$

となり、全断面積は

$$\sigma = \frac{1}{8\pi} \left[\left(\frac{g_w}{M_W c^2} \right)^2 \hbar c E \right]^2 \left\{ 1 - \left(\frac{m_\mu c^2}{2E} \right)^2 \right\}^2 \quad (9.14)$$

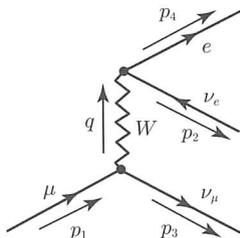
である。

9.2 ミュー粒子崩壊

電子-ニュートリノ散乱を実験的に研究するのはこの世で最も簡単というわけではない。しかし、密接な関連をもつミュー粒子の崩壊($\mu \rightarrow e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$)は、理論的に

*3 $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon_{\mu\nu\kappa\tau} = -2(\delta_\kappa^\lambda \delta_\tau^\sigma - \delta_\tau^\lambda \delta_\kappa^\sigma)$ であることに注意せよ(問題7.35)。式(9.7)中のトレースは、この章でくり返し現れることになる特別な構造をもつ例だ。ここで一休みして、一般的な結果(問題9.2)をやってみるのはよい考えかもしれない。

も実験的にも弱い相互作用の中で最もきれいな過程である。ファインマン図



から、振幅

$$\mathcal{M} = \frac{g_w^2}{8(M_W c)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu(1 - \gamma^5)v(2)] \quad (9.15)$$

が得られ、それによって、以前と同じように

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2 \left(\frac{g_w}{M_W c} \right)^4 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) \quad (9.16)$$

を得る。ミュー粒子の静止系 $p_1 = (m_\mu c, \mathbf{0})$ においては、

$$p_1 \cdot p_2 = m_\mu E_2 \quad (9.17)$$

であり、 $p_1 = p_2 + p_3 + p_4$ なので

$$\begin{aligned} (p_3 + p_4)^2 &= p_3^2 + p_4^2 + 2p_3 \cdot p_4 = m_e^2 c^2 + 2p_3 \cdot p_4 \\ &= (p_1 - p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 \cdot p_2 = m_\mu^2 c^2 - 2p_1 \cdot p_2 \end{aligned} \quad (9.18)$$

となり、

$$p_3 \cdot p_4 = \frac{(m_\mu^2 - m_e^2)c^2}{2} - m_\mu E_2 \quad (9.19)$$

であることが導かれる。 $m_e = 0$ とおけば、正確さを失うことなしに後の計算を簡略化できて、

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \left(\frac{g_w}{M_W c} \right)^4 m_\mu^2 E_2 (m_\mu c^2 - 2E_2) = \left(\frac{g_w^2 m_\mu}{M_W^2 c} \right)^2 |\mathbf{p}_2| (m_\mu c - 2|\mathbf{p}_2|) \quad (9.20)$$

となる。

崩壊幅は式 (6.21) で与えられる*4。

*4 これは三体崩壊なので、黄金律にまで戻らねばならないことに注意せよ。

$$d\Gamma = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{2\hbar m_\mu} \left(\frac{d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}_2|} \right) \left(\frac{d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}_3|} \right) \left(\frac{d^3 \mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}_4|} \right) \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \quad (9.21)$$

まず最初に、デルタ関数を取り出す。

$$\delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) = \delta(m_\mu c - |\mathbf{p}_2| - |\mathbf{p}_3| - |\mathbf{p}_4|) \delta^3(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \quad (9.22)$$

そして、 \mathbf{p}_3 について積分する。

$$d\Gamma = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{16(2\pi)^5 \hbar m_\mu} \frac{(d^3 \mathbf{p}_2)(d^3 \mathbf{p}_4)}{|\mathbf{p}_2| |\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4| |\mathbf{p}_4|} \delta(m_\mu c - |\mathbf{p}_2| - |\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4| - |\mathbf{p}_4|) \quad (9.23)$$

次に \mathbf{p}_2 に関する積分を行う。 \mathbf{p}_4 の方向に沿って極座標の軸を取ると (\mathbf{p}_2 の積分を行うため固定する)。

$$d^3 \mathbf{p}_2 = |\mathbf{p}_2|^2 d|\mathbf{p}_2| \sin \theta d\theta d\phi \quad (9.24)$$

と、

$$|\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4|^2 = |\mathbf{p}_2|^2 + |\mathbf{p}_4|^2 + 2|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_4| \cos \theta \equiv u^2 \quad (9.25)$$

を得る。 ϕ に関する積分は自明だ ($\int d\phi = 2\pi$)。 θ での積分を行うために、変数変換 ($\theta \rightarrow u$) をする。

$$2u du = -2|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_4| \sin \theta d\theta \quad (9.26)$$

から、

$$d\Gamma = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{16(2\pi)^4 \hbar m_\mu} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{|\mathbf{p}_4|^2} d|\mathbf{p}_2| \int_{u_-}^{u_+} \delta(m_\mu c - |\mathbf{p}_2| - |\mathbf{p}_4| - u) du \quad (9.27)$$

となる。ここで、

$$u_{\pm} \equiv \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + |\mathbf{p}_4|^2 \pm 2|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_4|} = \left| |\mathbf{p}_2| \pm |\mathbf{p}_4| \right| \quad (9.28)$$

である。 u の積分は、もし

$$u_- < m_\mu c - |\mathbf{p}_2| - |\mathbf{p}_4| < u_+ \quad (9.29)$$

なら 1 だ (さもなければ 0 である)。いい換えると (問題 9.4)。

$$\begin{cases} |\mathbf{p}_2| < \frac{1}{2}m_\mu c \\ |\mathbf{p}_4| < \frac{1}{2}m_\mu c \\ (|\mathbf{p}_2| + |\mathbf{p}_4|) > \frac{1}{2}m_\mu c \end{cases} \quad (9.30)$$

ということである。これらの制約は、運動学的に理にかなっている。たとえば、粒子2は、粒子3と4が正反対方向に飛び出したときに、最大の運動量をもつ。



このとき、粒子2は利用できるエネルギーの半分 $((1/2)m_\mu c^2)$ をもらい、一方、粒子3と4は残りを分け合う。もし、粒子3と4の間の角度がゼロでなければ、2がもらうエネルギーは少なくなり、それに応じて3と4のエネルギーがより大きくなる。ゆえに、 $(1/2)m_\mu c$ は、外向きの個々の粒子がもち得る最大の運動量であり、かつ、対がもち得る合計運動量の最小値である。

θ と ϕ に関する積分を行うと

$$d\Gamma = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{(4\pi)^4 \hbar m_\mu} d|\mathbf{p}_2| \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{|\mathbf{p}_4|^2} \quad (9.31)$$

となる。式(9.30)の不等式は、 $|\mathbf{p}_2|$ と $|\mathbf{p}_4|$ の積分範囲を指定する。 $|\mathbf{p}_2|$ の積分範囲は $(1/2)m_\mu c - |\mathbf{p}_4|$ から $(1/2)m_\mu c$ までで、 $|\mathbf{p}_4|$ は0から $(1/2)m_\mu c$ までだ。式(9.20)*5を代入し、 $|\mathbf{p}_2|$ の積分を行うと

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \left(\frac{g_w}{4\pi M_W} \right)^4 \frac{m_\mu}{\hbar c^2} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{|\mathbf{p}_4|^2} \int_{(1/2)m_\mu c - |\mathbf{p}_4|}^{(1/2)m_\mu c} |\mathbf{p}_2| (m_\mu c - 2|\mathbf{p}_2|) d|\mathbf{p}_2| \\ &= \left(\frac{g_w}{4\pi M_W} \right)^4 \frac{m_\mu}{\hbar c^2} \left(\frac{m_\mu c}{2} - \frac{2}{3} |\mathbf{p}_4| \right) d^3 \mathbf{p}_4 \end{aligned} \quad (9.32)$$

を得る。最後に、

$$d^3 \mathbf{p}_4 = 4\pi |\mathbf{p}_4|^2 d|\mathbf{p}_4|$$

を使い、解を電子のエネルギー $E = |\mathbf{p}_4|c$ で表すと、

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \left(\frac{g_w}{M_W c} \right)^4 \frac{m_\mu^2 E^2}{2\hbar (4\pi)^3} \left(1 - \frac{4E}{3m_\mu c^2} \right) \quad (9.33)$$

*5 $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ は \mathbf{p}_2 の大きさのみに依存し、方向にはよらないことに注意せよ。だから θ と ϕ を積分する際に方向を気にしなくてよい。

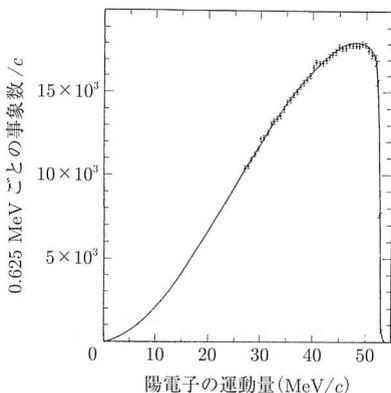


図9.1 $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \nu_\mu$ における陽電子スペクトルの測定. 実線は式 (9.33) に基づく理論的予言で, 電磁効果を補正してある (出典: M. Bardon *et al.*: Phys. Rev. Lett., 14, 44 (1965). ミュー粒子崩壊の最新の高精度データについては, TWIST 実験グループのウェブサイト (TRIUMF, Vancouver, BC) を参照.)

が答えとなる*6. この式により, ミュー粒子崩壊で放出される電子のエネルギー分布がわかり, 実験で測定したスペクトル (図9.1) とよく一致する. 全崩壊幅は

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left(\frac{g_w}{M_W c} \right)^4 \frac{m_\mu^2}{2\hbar(4\pi)^3} \int_0^{(1/2)m_\mu c^2} E^2 \left(1 - \frac{4E}{3m_\mu c^2} \right) dE \\ &= \left(\frac{m_\mu g_w}{M_W} \right)^4 \frac{m_\mu c^2}{12\hbar(8\pi)^3} \end{aligned} \quad (9.34)$$

なので, ミュー粒子の寿命は

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \left(\frac{M_W}{m_\mu g_w} \right)^4 \frac{12\hbar(8\pi)^3}{m_\mu c^2} \quad (9.35)$$

である.

ミュー粒子の寿命の式にも, 電子-ニュートリノ散乱断面積の式にも, g_w と M_W が別々に現れておらず, 比としてのみ現れていることに注意しよう. 実際のところ, 弱い相互作用の式では「フェルミ結合定数」

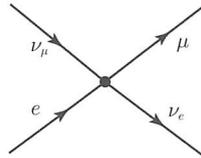
$$G_F \equiv \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{g_w}{M_W c^2} \right)^2 (\hbar c)^3 \quad (9.36)$$

を使うのが慣習だ. これを使うと, ミュー粒子の寿命は

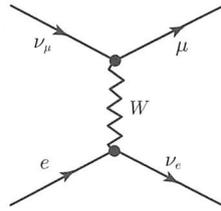
*6 式 (9.33) は $E = (1/2)m_\mu c^2$ で突然ゼロになり (その変化は粒子の質量と放射補正により, 少し緩やかにはなる), そのエネルギーまでしか適用できないことに注意せよ (式 (9.30)).

$$\tau = \frac{192\pi^3 \hbar^7}{G_F^2 m_\mu^5 c^4} \quad (9.37)$$

と書ける。フェルミの元々のベータ崩壊の理論（1933年）には、 W はなかった。その相互作用は、ファインマンの言葉を使うと、以下のかたちをしたダイアグラムで表現される直接の4点結合だと思われていた。



現代の観点からは、次のダイアグラムで表されるように、フェルミの理論は二つのバーテックスと W の伝播関数を組み合わせて実効的に4点結合定数 G_F をつくっている。



これがうまくいくのは、 W が非常に重いために式(9.4)が真の伝播関数(式(9.3))のよい近似になっている*7からで、実際、1950年代にはすでにフェルミの理論は高いエネルギーでは適用できないであろうということが認識されていた。弱い相互作用における媒介粒子(光子の類推)というアイデアは、さかのぼること1938年にクラインによって提案された。

ミュー粒子の寿命と質量の測定値を代入すると、

$$G_F/(\hbar c)^3 = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{g_w}{M_W c^2} \right)^2 = 1.166 \times 10^{-5}/\text{GeV}^2 \quad (9.38)$$

であることを見出す。それに対する g_w の値は

$$g_w = 0.653 \quad (9.39)$$

*7 フェルミもまた、以前言及したように、結合は純粋なベクトルだと思っていた。これらの欠点にもかかわらず(そのためにフェルミを非難することはできない。結局のところ、ニュートリノは野心的な推測であり、ディラック方程式がびかびかの新品の時代に、彼は理論をつくったのだから)、フェルミの理論には驚くべき先見の明があって、その後の発展は比較的軽微な調整であった。

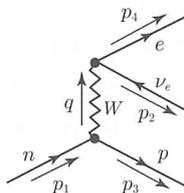
であり、よって、「弱い相互作用における微細構造定数」は

$$\alpha_w = \frac{g_w^2}{4\pi} = \frac{1}{29.5} \quad (9.40)$$

となる。この数字は驚くべきものだった。電磁相互作用における微細構造定数 ($\alpha = 1/137$) より5倍近くも大きいのだ！ 弱い相互作用が弱いのは、元々の結合が弱いからではなく（実際のところ弱くない）、媒介粒子があまりにも重いからなのだ。あるいは、より正確には、われわれがこれまで問題にしてきたエネルギーは概して W の質量よりもずっと小さく、伝播関数の分母 $|q^2 - M_W^2 c^2|$ があまりにも大きいのだ。

9.3 中性子の崩壊

ミュー粒子崩壊の公式をうまく得られたことで（式 (9.33)）、それと同じ方法を中性子の崩壊 $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ に適用してみたい。もちろん、中性子と陽子は複合粒子だが、ちょうどモットとラザフォードの断面積（それらは陽子を素粒子の「ディラック」粒子であるかのように取り扱う）が低エネルギーでの電子-陽子散乱をうまく記述したように、このダイアグラム ($\mu \rightarrow \nu_\mu + W^-$ を $n \rightarrow p + W^-$ に置き換える以外はミュー粒子崩壊と同じ) が中性子のベータ崩壊のよい近似を与えることを期待できるかもしれない。



計算の観点からの唯一新たな特徴は、粒子3が今度は質量をもっていることだ（ニュートリノの代わりに陽子になっている）。そうだとすると（問題9.8）、これによって振幅は変わらない。

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2 \left(\frac{g_w}{M_W c} \right)^4 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) \quad (9.41)$$

式 (9.16) と同じだ。中性子の静止系では、

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{m_n}{c} \left(\frac{g_w}{M_W} \right)^4 |\mathbf{p}_2| \left(m_n^2 - m_p^2 - m_e^2 - \frac{2m_n |\mathbf{p}_2|}{c} \right) \quad (9.42)$$

となることがわかる。しかし、電子の静止エネルギーは放出される全エネルギー ($m_n - m_p - m_e)c^2$) に比べて相当な大きさなので、今回は、電子の質量を無視することはできない。

崩壊幅の計算は前と同じように進める (今度は質量を含めて)。

$$d\Gamma = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{2\hbar m_n} \left(\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}_2|} \right) \left(\frac{d^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_p^2 c^2}} \right) \left(\frac{d^3\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_e^2 c^2}} \right) \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \quad (9.43)$$

\mathbf{p}_3 に関する積分を行うと

$$d\Gamma = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{16(2\pi)^5 \hbar m_n} \frac{d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{p}_4}{|\mathbf{p}_2| u \sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_e^2 c^2}} \delta \left(m_n c - |\mathbf{p}_2| - u - \sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_e^2 c^2} \right) \quad (9.44)$$

を得る。ここで、

$$u \equiv \sqrt{(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4)^2 + m_p^2 c^2} \quad (9.45)$$

である。 \mathbf{p}_2 に関する積分を実行するために、再び

$$d^3\mathbf{p}_2 = |\mathbf{p}_2|^2 d|\mathbf{p}_2| \sin \theta d\theta d\phi \quad (9.46)$$

と置き、 z 軸方向を \mathbf{p}_4 の向きに取る (\mathbf{p}_2 積分のために固定する)。すると、

$$u^2 = |\mathbf{p}_2|^2 + |\mathbf{p}_4|^2 + 2|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_4| \cos \theta + m_p^2 c^2 \quad (9.47)$$

であり、

$$u du = -|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_4| \sin \theta d\theta \quad (9.48)$$

である。 ϕ と θ (というかむしろ u) について積分すると

$$d\Gamma = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{(4\pi)^4 \hbar m_n} \frac{d^3\mathbf{p}_4}{|\mathbf{p}_4| \sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_e^2 c^2}} d|\mathbf{p}_2| I \quad (9.49)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
 I &\equiv \int_{u_-}^{u_+} \delta \left(m_n c - |\mathbf{p}_2| - \sqrt{|\mathbf{p}_4|^2 + m_e^2 c^2} - u \right) du \\
 &= \begin{cases} 1 & (u_- < (m_n c - |\mathbf{p}_2| - \sqrt{|\mathbf{p}_4|^2 + m_e^2 c^2}) < u_+) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (9.50)
 \end{aligned}$$

であり，上限と下限は

$$u_{\pm} = \sqrt{(|\mathbf{p}_2| \pm |\mathbf{p}_4|)^2 + m_p^2 c^2} \quad (9.51)$$

である．以前と同様に，式(9.50)が $|\mathbf{p}_2|$ 積分の範囲を決める．計算は読者に任せる(問題9.9)．

$$p_{\pm} = \frac{(1/2)(m_n^2 - m_p^2 + m_e^2)c^2 - m_n \sqrt{|\mathbf{p}_4|^2 + m_e^2 c^2}}{m_n c - \sqrt{|\mathbf{p}_4|^2 + m_e^2 c^2} \mp |\mathbf{p}_4|} \quad (9.52)$$

式(9.42)の $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ を使うと， $|\mathbf{p}_2|$ 積分は

$$\int_{p_-}^{p_+} |\mathbf{p}_2| \left(m_n^2 - m_p^2 - m_e^2 - \frac{2m_n |\mathbf{p}_2|}{c} \right) d|\mathbf{p}_2| \equiv J \quad (9.53)$$

となり，

$$d^3 \mathbf{p}_4 = 4\pi |\mathbf{p}_4|^2 d|\mathbf{p}_4| \quad (9.54)$$

なので，

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \frac{1}{\hbar c^2 (4\pi)^3} \left(\frac{g_w}{M_W c} \right)^4 J(E) \quad (9.55)$$

が結論だ．ただし， $E = c\sqrt{|\mathbf{p}_4|^2 + m_e^2 c^2}$ は電子のエネルギーである．

式(9.55)は正確だが(式(9.33)をもう一度導出したければ， $m_n \rightarrow m_\mu$ と $m_p, m_e \rightarrow 0$ の置き換えを行えばよい)， $J(E)$ は少し複雑な関数だ．

$$J(E) = (1/2)(m_n^2 - m_p^2 - m_e^2)c^4(p_+^2 - p_-^2) - \frac{2m_n c^3}{3}(p_+^3 - p_-^3) \quad (9.56)$$

概算だが，この段階で四つの小さな数があることに気づく．

$$\begin{aligned}
 \epsilon &\equiv \frac{m_n - m_p}{m_n} = 0.0014, & \delta &\equiv \frac{m_e}{m_n} = 0.0005 \\
 \eta &\equiv \frac{E}{m_n c^2} \quad (\delta < \eta < \epsilon), & \phi &\equiv \frac{|\mathbf{p}_4|}{m_n c} \quad (0 < \phi < \eta)
 \end{aligned} \quad (9.57)$$

(これらはもちろん独立ではなく， $\phi^2 = \eta^2 - \delta^2$ である．) 最低次で展開すると(問題9.9)，

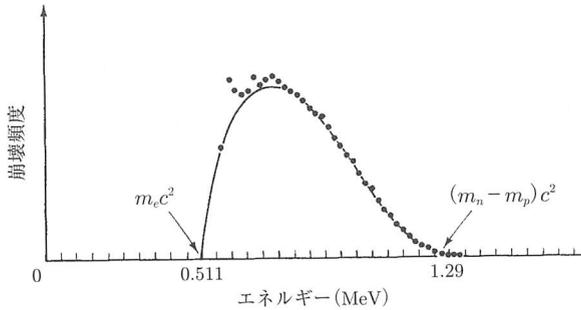


図9.2 中性子のベータ崩壊で放出される電子のエネルギー分布 (実線が理論計算による曲線で、点が実験データ) (出典: C. J. Christensen *et al.*: *Phys. Rev.*, D **5**, 1628 (1972). Fig (9.4))

$$J \cong 4m_n^4 c^6 \eta \phi(\epsilon - \eta)^2 = \frac{4}{c^2} E \sqrt{E^2 - m_e^2 c^4} [(m_n - m_p)c^2 - E]^2 \quad (9.58)$$

を得る. よって, 電子のエネルギー分布は

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \frac{1}{\pi^3 \hbar} \left(\frac{g_w}{2M_W c^2} \right)^4 E \sqrt{E^2 - m_e^2 c^4} [(m_n - m_p)c^2 - E]^2 \quad (9.59)$$

で与えられる. 実験の結果は図9.2に示す. 電子のエネルギーの範囲は $m_e c^2$ からおよそ $(m_n - m_p)c^2$ までだ (問題9.10). E について積分し, 全崩壊幅を得る (問題9.11).

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi^3 \hbar} \left(\frac{g_w}{2M_W c^2} \right)^4 (m_e c^2)^5 \times \left[\frac{1}{15} (2a^4 - 9a^2 - 8) \sqrt{a^2 - 1} + a \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) \right] \quad (9.60)$$

ここで,

$$a \equiv \frac{m_n - m_p}{m_e} \quad (9.61)$$

である. 数値を代入すると (問題9.12),

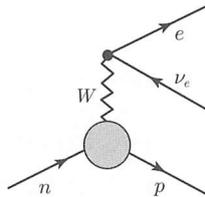
$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = 1318 \text{ 秒} \quad (9.62)$$

を見出す. これは, 世間でいわれているように, まあまあの結果だ. 中性子の寿命^{*8}の

^{*8} この数値は2006年版のParticle Physics Booklet (PPB) のものだ. 自由中性子の取り扱いはいは難しく, 何年かの間に「公式な」中性子寿命は大きく変わった (最初のPPBでは 1010 ± 130 秒とリストされていた). また, 原子核物理学者は半減期 ($t_{1/2} = \tau \ln 2$) を使う傾向があり, ベータ崩壊の専門家はいわゆる「 ft 値」とよばれる「比較用半減期」をしばしば引用することにも注意しよう. 比較用半減期とは, ある運動学的な寄与とクーロン力の寄与を差し引いたものである (中性子ではその補正係数は約1.7である). ここで注意したいことは, 中性子の「寿命」に対する文献値はさまざまな定義のものがあり, 慎重に微妙な違いを読み取り, 日付を確認する必要があるということだ.

実測値は 885.7 ± 0.8 秒で、弱い相互作用による崩壊では寿命が 15 分から 10^{-13} 秒と幅広いことを考慮すると、たぶん、正しいオーダーを得られたことに満足すべきだ。しかし、なぜもっとよく一致しないのだろうか。

主要な問題は、陽子と中性子を単純な点粒子としてレプトンとまったく同様に W と相互作用するかのように取り扱ったことにある。この点に関して誠実になると、一番最初までさかのぼって、 W が複合物とどのように結合するかを知らないことを認め、ファインマン図に（われわれの無知を象徴させるために）滴を書き、振幅をさまざまな未知の「形状因子」を用いて記述しなければならない。形状因子は 8 章で陽子-光子バーテックスについてやったのとちょうど同じように、ローレンツ共変によってのみ制限される。QCD が成熟して核子の詳細な構造を説明できるようになって初めて中性子寿命の完璧な計算を行えるようになるのだ。



しかし、モットの公式は低エネルギーの電子-陽子散乱をうまく記述する。なぜ根本的に同じやり方で電気力学では正しい答えを得られるのに、弱い相互作用では得られないのだろうか。どちらの場合も、「探り針」（場合に依じて γ や W ）の波長は「標的」（ p か n ）の直径よりもずっと長い（問題 9.13）。核子の内部構造は「見え」なくて、それは点粒子であるかのように振る舞う。だが、重大な問題は、この対象物の正味の結合定数がどうなるか、ということである。もちろん、陽子の正味の電荷は e だ。内部でどんなに複雑な過程があったとしても、価クォークが仮想グルーオンを放出し、グルーオンがクォーク-反クォーク対をつくり、「海」クォークが再結合するなどしていても、この狂乱した動きすべてで電荷は保存される。長波長の光子から見たら、それは点であり、複合物である核子の正味の電荷は価クォークの電荷の合計にすぎない。しかし、同じことが弱い相互作用の結合に当てはまるかどうかは自明ではない。グルーオンがクォーク-反クォーク対に分離したとき、この対の弱結合への正味の寄与がゼロではないかもしれない。どうしたらわかるのか。これを計算するために、 $n \rightarrow p + W$ のバーテックス因子を以下のように置き換える。

$$(1 - \gamma^5) \rightarrow (c_V - c_A \gamma^5) \quad (9.63)$$

ここで c_V はベクトルの「弱電荷」への補正であり、 c_A は軸性ベクトルの「弱電荷」への補正である。幸運なことに、 $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ という同じ基本的な過程が自由中性子だけでなく、放射性原子核でも起こるので、原理的には c_V と c_A を独立に測定する多くの機会に恵まれている*9。実験の結果は以下だ。

$$c_V = 1.000, \quad c_A = 1.270 \pm 0.003 \quad (9.64)$$

驚くべきことに、ベクトル弱結合は核子中の強い相互作用でも変化を受けない。たぶん、電荷と同様に、それは保存則によって「守られて」いるのだろう。これを「保存ベクトル流」(CVC) 仮説とよぶ*10。軸性の項も大きくは変化しておらず、あきらかにそれは「ほぼ」保存している。これを「部分的保存軸性流」(PCAC) 仮説とよぶ。

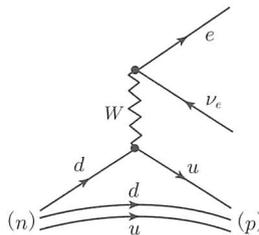
もし読者にスタミナがあるなら、中性子の寿命に対するこの置き換え (式 (9.63)) の効果は自身で計算するに価するものだ。よい近似で崩壊幅は因子

$$(1/4)(c_V^2 + 3c_A^2) = 1.46 \quad (9.65)$$

だけ増加し、寿命は同じ割合で減少する。

$$\tau = \frac{1316 \text{ 秒}}{1.46} = 901 \text{ 秒} \quad (9.66)$$

これは実験値に驚くほど近い。だが、運の悪いことに、その一致はまやかした。というのは、さらに別の補正が必要だからだ。ここでのクォークレベルでの過程は $d \rightarrow u + W$ (と 2 個の傍観クォーク) で、



*9 とりわけ好ましいのが、(始状態と終状態のスピンとパリティの観測から) ベクトル結合だけを含んでいることが知られている $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}$ だ。

*10 CVC は標準模型に組み込まれていて、現在、 c_V は正確に 1 にされている。実験結果はカビボ角 (この直後を参照)、あるいはより正確には V_{ud} の測定と解釈される。

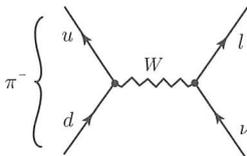
このクォークのバーテックスは $\cos \theta_C$ という因子を含んでいる。ここで $\theta_C = 13.15^\circ$ は「カビボ角」である。これについては、9.5節でさらに説明するが、ここで本質的なのは、軸性電荷の非保存に対する補正とカビボ角による変更を受けた後の中性子の寿命の理論値は

$$\tau = \frac{901 \text{ s}}{\cos^2 \theta_C} = 950 \text{ 秒} \tag{9.67}$$

であるということである。2歩進んで、1歩戻った！*11

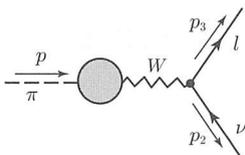
9.4 パイ中間子の崩壊

クォーク模型によると、荷電パイ中間子の崩壊 ($\pi^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l$, ここで l はミュー粒子が電子である) は、入射するクォークがたまたま互いに束縛されているが、本当に散乱事象だ。



この観点では、電磁気力によるポジトロニウムの崩壊 ($e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$), あるいは強い相互作用による η_c 崩壊 ($c + \bar{c} \rightarrow g + g$) の弱い相互作用版である。例題 7.8 と 8.5 節の方法 (問題 9.14) に従って解析できるかもしれないが、最終的には、 $|\psi(0)|^2$ という因子で先に進めなくなってしまう、この段階ではパイ中間子中のクォークの波動関数 (ψ) がどのようなかたちをしているのかわからない。そのような計算では、未決定の乗数因子がいずれにせよ存在することを考えると、以下のように進める方がよりすっきりとしている。

π^- と W^- の結合を表現するのに滴を用いてファインマン図を描き直す。



*11 これで話が終わるわけではない。たとえば、(終状態の電子と陽子の間の引力による) クーロン力の小さな補正がある。しかし、実験結果と 7% の精度で一致している。いまは先に進むべきときだ。

W がどのようにパイ中間子に結合するかはわからないかもしれないが、どのようにレプトンに結合するかはよく知っているので、振幅は

$$\mathcal{M} = \frac{g_w^2}{8(M_{Wc})^2} [\bar{u}(3)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(2)]F^\mu \quad (9.68)$$

という一般的なかたちにならなければならない。ここで、 F^μ は $\pi \rightarrow W$ の滴を記述する「形状因子」である。これは、レプトンの項の中の γ_μ と縮約するために4元ベクトルでなければならない。しかし、パイ中間子はスピンゼロだ。パイ中間子に付随する中で唯一ベクトルであり、 F^μ として構成し得るのは、運動量 p^μ だけだ（パイ中間子の運動量に下付き添字を付けて繁雑にしたくなかったので、 $p \equiv p_1$ と定義した）*12。よって、 F^μ は何らかのスカラール量と p^μ の積になっているはずだ*13。

$$F^\mu = f_\pi p^\mu \quad (9.69)$$

原理的には f_π は唯一のスカラール量である p^2 の関数だが、パイ中間子は質量殻上 ($p^2 = m_\pi^2 c^2$) にいるので、われわれの目的に対しては、固定した数字、すなわち「パイ中間子の崩壊定数」となる*14。

外へ出て行く粒子のスピンを足し合わせると

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \left[\frac{f_\pi}{8} \left(\frac{g_w}{M_{Wc}} \right)^2 \right]^2 p_\mu p_\nu \text{Tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{p}_2\gamma^\nu(1-\gamma^5)(\not{p}_3 + m_l c)] \\ &= \frac{1}{8} \left[f_\pi \left(\frac{g_w}{M_{Wc}} \right)^2 \right]^2 [2(p \cdot p_2)(p \cdot p_3) - p^2(p_2 \cdot p_3)] \end{aligned} \quad (9.70)$$

を得る（トレースは式(9.8)ですでに計算されている）。しかし、 $p = p_2 + p_3$ なので

$$p \cdot p_2 = p_2 \cdot p_3, \quad p \cdot p_3 = m_l^2 c^2 + p_2 \cdot p_3 \quad (9.71)$$

*12 \mathcal{M} の段階で（弱い相互作用の）パイ中間子の形状因子を導入した一方で、（電磁気力の）陽子の形状因子については $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ まで待ったことに注意しよう。その理由は、陽子はスピンをもっており、利用できるベクトルの表にそれを含める必要があったからだ。これができるのは、スピンの平均を取り、表のリストが二つまで減って、問題を扱えるようになった後である。しかし、パイ中間子にはスピンがないので \mathcal{M} に直接形状因子を導入することができる。ただし、ベクトル量についてだけで、テンソル量ではできない。

*13 次節で理由はあきらかになるが、今日では、適切なカビボ-小林-益川 (CKM) 行列の要素を抜き出して中間子の崩壊定数を定義するのが慣習で、 $f_\pi \rightarrow V_{ud}f_\pi$ と書く。繁雑な表記を避けるために、ここでは古い慣習を使う。

*14 他の擬スカラール中間子に対応する因子は、異なる p^2 の値と、異なる CKM 行列要素を含む（脚注*13を参照）。

かつ,

$$p^2 = p_2^2 + p_3^2 + 2p_2 \cdot p_3, \quad \text{よって} \quad 2p_2 \cdot p_3 = (m_\pi^2 - m_l^2)c^2 \quad (9.72)$$

となる。ゆえに,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \left(\frac{g_w}{2M_W} \right)^4 f_\pi^2 m_l^2 (m_\pi^2 - m_l^2) \quad (9.73)$$

である (定数).

崩壊幅は標準の式で与えられて (式 (9.35))

$$\Gamma = \frac{|\mathbf{p}_2|}{8\pi\hbar m_\pi^2 c} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \quad (9.74)$$

であり, 外に出て行く運動量は (式 (9.34) あるいは問題 3.19 を参照)

$$|\mathbf{p}_2| = \frac{c}{2m_\pi} (m_\pi^2 - m_l^2) \quad (9.75)$$

となる。よって

$$\Gamma = \frac{f_\pi^2}{\pi\hbar m_\pi^3} \left(\frac{g_w}{4M_W} \right)^4 m_l^2 (m_\pi^2 - m_l^2)^2 \quad (9.76)$$

である。

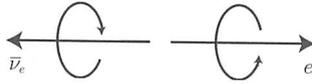
もちろん, 崩壊定数 f_π を知らずには, パイ中間子の寿命を計算できない*15。しかし, 電子とミュー粒子の崩壊幅の比なら計算できる。

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu)} = \frac{m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} = 1.283 \times 10^{-4} \quad (9.77)$$

(実験値は $1.230 \pm 0.004 \times 10^{-4}$.) 一目, これは非常に驚くべき結果だ。というのも, 電子の方がはるかに軽いにもかかわらず, それはパイ中間子がミュー粒子への崩壊の方を好むと (正しく) 予言しているからだ。位相空間を考えると, 質量の減少が大きいほど崩壊しやすくなる。そして, 何らかの保存則が介入しない限り, 通常最も軽い終状態へ一番多く崩壊することを知っている。パイ中間子の崩壊は悪名高い例外で, それを説明する何か特別な力学が必要である。ヒントは式 (9.76) に示されている。もし電子が質量をもたなかったら, $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ も一緒に禁止されることに注目しよう。この極限について理解できるだろうか。答えはイエスだ。パイ中間子はスピン 0 なの

*15 もし $f_\pi = m_\pi c$ (さらに近づけるには $m_\pi c \cos \theta_C$) を代入すると, $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ の寿命に非常に近い値を得られることは驚くべき事実だ。しかし, この取り扱いには説得力のある理論的正当性がなく, そして, より重い中間子ではうまくいかない。

で、電子と反ニュートリノは反対のスピンをもたなければならない、結果として同じヘリシティでなければならない。反ニュートリノはつねに右巻きなので、電子も同様に右



巻きでなければならない。しかし、もし電子が本当に質量をもたないと、(ニュートリノのように) 左巻き粒子としてしか存在できない。より正確には、弱バーテックス因子中の $1 - \gamma^5$ は左巻きのニュートリノにしか結合しないように (問題 9.15), 左巻き電子にしか結合しない。それが、もし電子が質量をもたなかったとしたら、 $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$ がまったく起こらない理由であり、その崩壊が強く抑圧されている理由である (物理的な電子は非常に質量ゼロに近い)。

9.5 クォークの荷電弱相互作用

レプトンの場合、 W^\pm への結合は、厳密に特定の世代の中でのみ起きる。

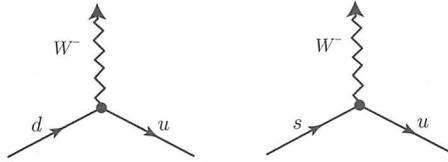
$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} \quad (\text{レプトンの世代})$$

つまり、 $e^- \rightarrow \nu_e + W^-$ や $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + W^-$ や $\tau^- \rightarrow \nu_\tau + W^-$ はあるが、たとえば、 $e^- \rightarrow \nu_\mu + W^-$ のようなかたちの世代を交差する結合はない。W のクォークへの結合は全然単純ではない。世代の構造は似ているのだが、

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad (\text{クォークの世代})$$

弱い相互作用は、世代の独立を厳密には保たない。確かに、 $d \rightarrow u + W^-$ のかたちの相互作用が存在するが ($n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ という中性子の崩壊の裏で起きている過程)、 $s \rightarrow u + W^-$ (たとえば、 $\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ の崩壊中に見られる) のような世代をまたぐ結合もまた存在するのだ。実際、もしそうでなかったら、三つのレプトン数保存則との類推で、「アップとダウン」「チャームとストレンジ」「トップとボトム」という三つの完全な「フレーバー保存」則が存在したはずだ。最も軽いストレンジ粒子 (K^-) は完璧に安定だし、B 中間子もまた安定だ (最も軽いボトム粒子)。われわれの世界はまったく違ったものとなっていたはずだ。

1963年に(当時は u, d, s クォークしか知られていなかった) カビボは $d \rightarrow u + W^-$ パーテックスには因子 $\cos \theta_C$ が掛かる一方, $s \rightarrow u + W^-$ には $\sin \theta_C$ が掛かることを提案した [1].



それ以外は, レプトンの結合と同じだとした (式 (9.5)).

$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\cos\theta_C, \quad \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\sin\theta_C \quad (9.78)$$

ストレンジネスを変える過程 ($s \rightarrow u + W^-$) は, ストレンジネスを保存する過程 ($d \rightarrow u + W^-$) より際立って弱いので, あきらかに「カビボ角」 θ_C は小さい. 実験的には

$$\theta_C = 13.15^\circ \quad (9.79)$$

弱い相互作用はクォークの世代をだいたい尊重するが, 完璧に, ではない.

例題 9.2 レプトニック崩壊 崩壊 $K^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l$ を考えてみよう. ここで l は電子かミュー粒子とする. これは π^- 崩壊 (9.4 節) の類似だが, 今度は, クォークパーテックスは $d + \bar{u} \rightarrow W^-$ の代わりに $s + \bar{u} \rightarrow W^-$ である. 式 (9.76) から

$$\Gamma = \frac{f_K^2}{\pi\hbar m_K^3} \left(\frac{g_w}{4M_w}\right)^4 m_l^2(m_K^2 - m_l^2)^2$$

を得る. f_π は因子 $\cos \theta_C$ を, f_K は因子 $\sin \theta_C$ をもっていることを除けば, たぶん結合の強さはほぼ同じだ. それに応じて

$$\frac{\Gamma(K^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l)} = \tan^2 \theta_C \left(\frac{m_\pi}{m_K}\right)^3 \left(\frac{m_K^2 - m_l^2}{m_\pi^2 - m_l^2}\right)^2 \quad (9.80)$$

となる. 数値を代入すると, ミュー粒子モード ($l = \mu$) では 0.96, 電子モード ($l = e$) では 0.19 を得る. 測定値はそれぞれ 1.34 と 0.26 である. これらの崩壊は純粋に軸性ベクトルであり, 以前発見したように (9.3 節), 完璧な一致は期待できない.

例題 9.2 で考察したような種類の過程をレプトニック崩壊とよぶ. $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$ や $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ (図 9.3(a)), あるいは中性子のベータ崩壊 $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

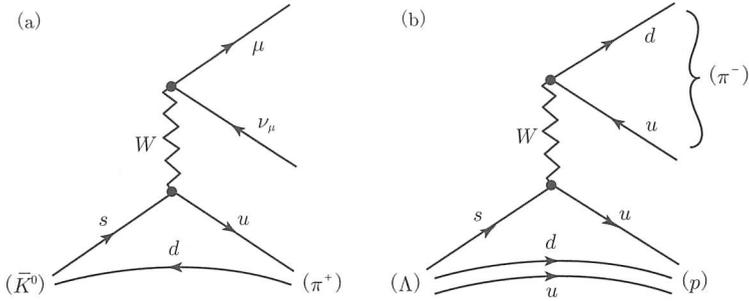


図 9.3 (a) 典型的なセミレプトニック崩壊 ($\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$). (b) 典型的な非レプトニック崩壊 ($\Lambda \rightarrow p^+ + \pi^-$)

のようなセミレプトニック崩壊もまた存在する。最後に、 $K^- \rightarrow \pi^0 + \pi^-$ や $\Lambda \rightarrow p^+ + \pi^-$ (図 9.3(b)) のような非レプトニック弱相互作用も存在する。一般的には、 W の線の両端に強い相互作用が混入しているので、後者は解析が難しい [2]。

例題 9.3 セミレプトニック崩壊 中性子の崩壊 ($n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$) の場合には、素過程は $d \rightarrow u + W^-$ (と 2 個の傍観者) だ。しかし、中性子には 2 個の d クォークがあり、それらのうちのどちらかが W と結合するので、正味の振幅はその和になる。数値を得るための最も単純な方法は 5.6.1 項でやったクォークの波動関数を使うことだ。たとえば、フレーバー状態 ψ_{12} が $n = (ud - du)d/\sqrt{2}$ を与えると、そこから ($d \rightarrow u$ の置き換えで) $[(uu - uu)d + (ud - du)u]/\sqrt{2} = (ud - du)u/\sqrt{2} = p$ を得る。全体に掛かる係数は単純に $\cos \theta_C$ となる (9.3 節の終わりで主張したように)。対照的に、 $\Sigma^0 \rightarrow \Sigma^+ + e + \bar{\nu}_e$ 崩壊では、クォークレベルの過程はやはり $d \rightarrow u$ だが、ここでは $\Sigma^0 = [(us - su)d + (ds - sd)u]/\sqrt{2} \rightarrow [(us - su)u + (us - su)u]/\sqrt{2} = (us - su)u = \sqrt{2}\Sigma^+$ となり、よって、振幅は $\sqrt{2} \cos \theta_C$ の因子をもつ^{*16}。崩壊幅は式 (9.60) で与えられ、それは ($a \gg 1$ のときには)

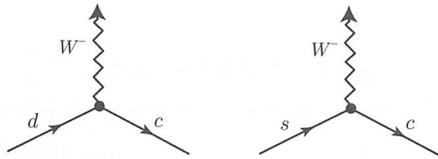
$$\Gamma = \frac{1}{30\pi^3 \hbar} \left(\frac{g_w}{2M_W c^2} \right)^4 (\Delta m c^2)^5 X^2$$

というかたちになる。ここで、 Δm はバリオンの質量の減少量で、 X はカピボ係数 (中性子の崩壊に対しては $\cos \theta_C$ 、 $\Sigma^0 \rightarrow \Sigma^+ + e + \bar{\nu}_e$ に対しては $\sqrt{2} \cos \theta_C$ など) であ

^{*16} 実際、ここにはわずかな違いがある。反応に寄与するクォークはスピン一重項にある傍観者と束縛状態にある。幸運にもこれは寿命に影響を与えない。

る。数値計算は読者に委ねる (問題 9.17)*17。

カビボの理論は数多くの崩壊幅を算出する点で大きな成功を収めたが、うっとうしい問題が残っていた。この描像だと K^0 が $\mu^+\mu^-$ 対に崩壊してしまうのだ (図 9.4)。振幅は $\sin \theta_C \cos \theta_C$ に比例するが、その計算値は実験での制限をはるかに上回ってしまう。このジレンマに対する解は 1970 年にグラシヨー、イリオポロス、マイアニ (GIM) によって提案された [3]。彼らは、 s と d との結合にそれぞれ $\cos \theta_C$ と $-\sin \theta_C$ の因子をもつ 4 番目のクォーク c を導入したのだ (これは、チャームを初めて実験的に直接観測した「11 月革命」の 4 年前であることに注意せよ)。



$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma^5)(-\sin\theta_C), \quad \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\cos\theta_C \quad (9.81)$$

その「GIM 機構」では、図 9.4 のダイアグラムが、 u を c に置き換えたダイアグラム (図 9.5) で打ち消される。今度はその振幅は $-\sin \theta_C \cos \theta_C$ に比例する*18。

カビボと GIM の方法は単純かつ美しい解釈をもたらした。物理的なクォーク d と s の代わりに、弱い相互作用で使うべき「正しい」状態は以下で与えられる d' と s' なのだ。

$$d' = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C, \quad s' = -d \sin \theta_C + s \cos \theta_C \quad (9.82)$$

あるいは行列形式では

*17 この手続きは価クォークのみに適用されるゆえに、軸性結合の非保存との関係がない。式 (9.65) で見たように、PCAC により 50% 近い補正を生じるので、寿命計算に高い精度を期待できない。カビボの理論には軸性結合の計算方法が含まれているが、ここではこれ以上はやらない。

*18 c の質量は u の質量と同じではないので、完全には打ち消されない。しかし、これらの仮想粒子は質量殻からずれていて、両方の伝播関数は基本的にはたんに iq/q^2 だ (\mathcal{M} を計算するには、保存則によって固定されずに残っている内線の運動量について積分を行う。これは、本質的には「ループに沿って回っている」運動量だ。二つの W の伝播関数のために、おもな寄与は W の質量付近に入ってくる。それは、 c や u の質量よりもはるかに重いので、後者はよい近似で無視することができる。実際に、その崩壊は起こるが、きわめてゆっくりだ。もし u/c の質量差の効果を含めると、計算値は観測した崩壊幅と一致する)。

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{9.83}$$

W は、レプトン対 $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$ と結合したのとまったく同様に、「カビボ回転された」状態

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}$$

と結合する。物理的な粒子（あるフレーバーの状態）との結合は

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -d \sin \theta_C + s \cos \theta_C \end{pmatrix} \tag{9.84}$$

で与えられる。つまり、 $d \rightarrow u + W^-$ は因子 $\cos \theta_C$ を、 $s \rightarrow u + W^-$ は因子 $\sin \theta_C$ などをもつ*19。

当時、GIM 機構、すなわち、広く立証されていない理論における難解なわずかな欠陥を直すためにだけ新しいクォークを導入するのは、少し贅沢に思えた。しかし、その懐疑は 1974 年の $\psi(c\bar{c})$ の発見により消え去った。一方、小林と益川は、3 世代の

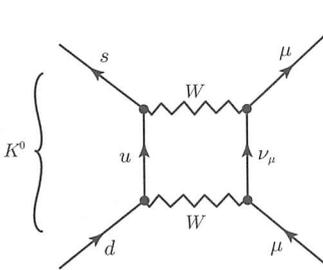


図 9.4 $K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ 崩壊

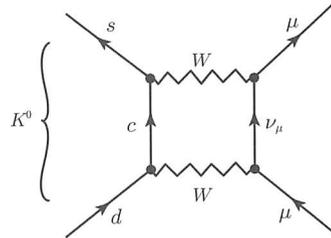


図 9.5 GIM 機構。このダイアグラムが図 9.4 をキャンセルする。仮想 c クォークが u と置き換わることに着目せよ

*19 u と c ではなく d と s を「回転」させたのは純粋に慣習である。 $u' = u \cos \theta_C - c \sin \theta_C$ と $c' = u \sin \theta_C + c \cos \theta_C$ を導入しても同じ目的を達成することは可能だ。ちなみに、レプトンセクターにも同様の回転が起こるのかどうか気になるかもしれない。もしすべてのニュートリノが質量ゼロなら、それらのいかなる線形結合もまた質量ゼロで「回転していない」状態を同定するための「タグ」がなくなってしまう。しかし、ニュートリノが質量をもてば（そうであることをいまや知っている）、「質量の固有状態」が弱い相互作用の状態と同じだと仮定する理由はなく、同様の回転があってもおかしくない。というのも、「慣れ親しんだ」ニュートリノは弱い相互作用においては荷電レプトンと対をなし、「物理的な」状態を得るためには逆に回転させる必要がある（11 章）。

クォークを取り扱うためにカビボ-GIM 機構を一般化した [4]*20. 「弱い相互作用の世代」

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix} \quad (9.85)$$

は, CKM 行列によって物理的なクォークの状態と関連づけられる.

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (9.86)$$

ここで, たとえば, V_{ud} は u と d との結合 ($d \rightarrow u + W^-$) を決める.

CKM 行列には 9 個の (複素) 行列要素があるが, それらすべてが独立というわけではない (問題 9.18). それらは, 3 個だけの「一般化されたカビボ角」(θ_{12} , θ_{23} , θ_{13}) と一つの位相因子 (δ) だけをもつ「正準形式の」一種にまとめることができる [5].

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (9.87)$$

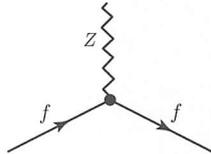
ここで, c_{ij} は $\cos \theta_{ij}$ を, s_{ij} は $\sin \theta_{ij}$ を意味する. もし $\theta_{23} = \theta_{13} = 0$ だと, 第 3 世代は他の 2 世代と混ざらず, $\theta_{12} = \theta_C$ とすることでカビボ-GIM の描像を回復する. しかし, 3 世代混合に対する抗しがたい証拠がいくつか存在する (つまり, $B^-(b\bar{u})$ 中間子の崩壊の観測だ). ただし, カビボ-GIM 手法の成功を考慮に入れると, その効果はきわめて小さくなければならない. 標準模型は CKM 行列についていかなる洞察も与えない (実際, これは最もおもだった欠点の一つだ). とりあえず, 実験で得られた行列要素の値をたんに使う. その大きさは以下だ [6].

$$|V_{ij}| = \begin{pmatrix} 0.9738 & 0.2272 & 0.0040 \\ 0.2271 & 0.9730 & 0.0422 \\ 0.0081 & 0.0416 & 0.9991 \end{pmatrix} \quad (9.88)$$

*20 第 2 世代が完成するよりも前に, さらに第 3 世代に対する実験的な確証が得られるはるか前に, 小林と益川が第 3 世代のクォークを提案したことは興味深い. 彼らは, カビボ-GIM の手法の枠内で CP 非保存を説明するという動機に駆られていた. そのためには, 「回転」行列 (式 (9.83)) の中に複素数が必要であることがわかったが, そのような項は, 3×3 行列に行かない限り, クォークの位相の再定義により消えてしまうのだった. それゆえ 3 世代なのだ (問題 9.18).

9.6 中性弱相互作用

1958年にブラドマンが、 W のパートナーである電荷をもたない Z^0 によって誘起される中性弱相互作用が存在するかもしれないと提唱した[7].



ここで、 f は任意のレプトン、クォークである。(QEDやQCDとちょうど同じように) 入ったのと同じフェルミオンが出て行くことに着目せよ。たとえば、 $\mu^- \rightarrow e^- + Z^0$ のようなかたちの結合は許されないし(これは、ミュー粒子と電子数の保存を破ってしまう)、 $s \rightarrow d + Z^0$ というかたちも許されない(そのようなストレンジネスを変化させる中性過程は $K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ をもたらししてしまうが、すでに言及したように、それは強く抑圧されている)*²¹。1961年にグラシヨは弱い相互作用と電磁気相互作用の統一に関する最初の論文を発表した[8]。彼の理論では中性弱相互作用の存在が必要で、その構造を特定していた(9.7節)。1967年にはワインバーグとサラムがグラシヨの模型を「自発的にゲージ対称性が破れる」ものとして定式化して[9]、1971年にはトフーフトがグラシヨ-ワインバーグ-サラム(GWS)の枠組みがくりこみ可能であることを示した[10]。よって、自然界に中性弱相互作用が起こることを考えてしかるべき、説得力のある理論的な理由は続々と増えていた。しかし、この望みを支持する実験的データは長い間存在しなかった。1973年になってようやくCERNにおける泡箱の写真(図9.6)により[11]、反応

*²¹ 中性過程の場合、物理的な状態 (u, s, b) を使っても、「回転された」状態 (d', s', b') を使っても違いはない。模式的には議論は以下ようになる。

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{Z} \\
 \text{wavy line} \\
 \text{d}' \quad \text{d}' \\
 \text{diagram}
 \end{array}
 \end{array}$$

は $\mathcal{M} \sim \bar{d}'d' = \bar{d}d \cos^2 \theta_C + \bar{s}s \sin^2 \theta_C + (\bar{d}s + \bar{s}d) \sin \theta_C \cos \theta_C$ を与える。

$$\begin{array}{c}
 \text{Z} \\
 \text{wavy line} \\
 \text{s}' \quad \text{s}' \\
 \text{diagram}
 \end{array}$$

は $\mathcal{M} \sim \bar{s}'s' = \bar{d}d \sin^2 \theta_C + \bar{s}s \cos^2 \theta_C - (\bar{d}s + \bar{s}d) \sin \theta_C \cos \theta_C$ を与える。

よって、その二つの和は $\mathcal{M} \sim \bar{d}'d' + \bar{s}'s' = \bar{d}d + \bar{s}s$ になる。ゆえに、正味の振幅は、両方のダイアグラムを足し合わせると、どちらの状態を使っても同じになる(CKM行列がユニタリーである限り、同じ議論は3世代に対しても成立する)。

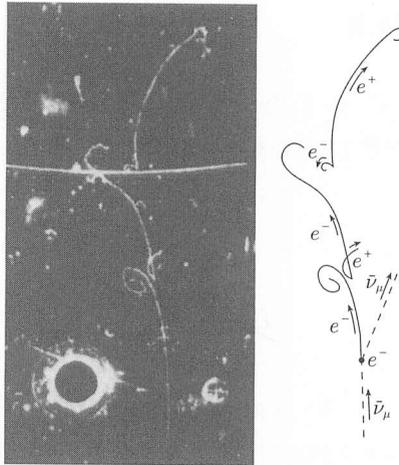
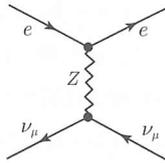


図9.6 中性弱過程 ($\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$) の初めての写真. ニュートリノは下から入り (飛跡は残さず), 電子に当たり, その電子は (上方に) 動き二つの光子 (それは図では引き続き電子-陽電子対を生成したときにだけ現れる) を放出し, 速度が遅くなると磁場によって内向きの螺旋を描く (左下の大きな円は電灯) (提供: CERN)

$$\bar{\nu}_\mu + e \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e$$

の証拠が初めて見つかった. それは Z^0 による媒介を示していた.

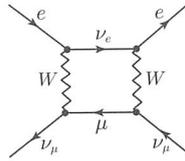


一連の同じ実験により, 対応するニュートリノ-クォーク過程を包括的なニュートリノ-核子散乱というかたちで見つけた.

$$\bar{\nu}_\mu + N \rightarrow \bar{\nu}_\mu + X$$

$$\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + X$$

それらの断面積は, 関連する荷電事象 ($\bar{\nu}_\mu + N \rightarrow \mu^+ + X$ と $\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + X$) に比べて約3倍で, たんに高次の過程なのではなく, 本当に新しい種類の弱い相互作用であることを示唆していた



(高次の過程では断面積がはるかに小さくなってしまう)。CERNの結果は、数年間足踏みをしていた電弱理論家に勇気を与え、歓迎された [12]。

これまでに見てきたように、クォークとレプトンの W^\pm への結合は共通の「 $V - A$ 」型である。バーテックスに掛かる因子はいつも

$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1 - \gamma^5) \quad (W^\pm \text{ バーテックス因子}) \quad (9.89)$$

である(陽子のような複合物への軸性結合は変更を受けるといのは真実だ。しかし、それは強い相互作用による汚染のせいであって、その背後にあるクォークレベルでの過程は純粋な $V - A$ である)。 Z^0 への結合はそれほど単純ではない。

$$\frac{-ig_z}{2}\gamma^\mu(c_V^f - c_A^f\gamma^5) \quad (Z^0 \text{ バーテックス因子}) \quad (9.90)$$

ここで、 g_z は中性の結合定数で、係数 c_V^f と c_A^f は反応に含まれるクォークあるいはレプトン (f) に依存する。GWS 模型では、表 9.1 に示されるように、これらすべての数値が「弱混合角」(あるいは「ワインバーグ角」) とよばれる基本的なパラメーターで決定される。弱結合定数と電磁気結合定数には以下の関係がある。

$$g_w = \frac{g_e}{\sin \theta_w}, \quad g_z = \frac{g_e}{\sin \theta_w \cos \theta_w} \quad (9.91)$$

ここで、 g_e は本質的には電子の電荷 ($g_e = e\sqrt{4\pi/\hbar c}$) であることを思い出そう。最後に、 W^\pm と Z^0 の質量は

$$M_W = M_Z \cos \theta_w \quad (9.92)$$

表 9.1 GWS 模型における中性ベクトルおよび軸性ベクトル結合

f	c_V	c_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	1/2	1/2
e^-, μ^-, τ^-	$-1/2 + 2 \sin^2 \theta_W$	(-1/2)
u, c, t	$1/2 - (4/3) \sin^2 \theta_W$	1/2
d, s, b	$-(1/2) + (2/3) \sin^2 \theta_W$	(-1/2)

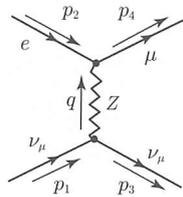
のように関連づけられる。式 (9.90) から (9.92) は GWS 模型の基本的な予言である。これらがどのように求められたかは次の節で見たい。

標準模型には θ_w 自身を計算する術がない。CKM 行列と同様に、その値は実験によって決められる。

$$\theta_w = 28.75^\circ \quad (\sin^2 \theta_w = 0.2314) \quad (9.93)$$

しかし、 θ_w が与えられると、 W と Z の質量を計算できる (問題 9.20)。1983 年に CERN でルビアによってそれらが $M_W = 82 \text{ GeV}/c^2$, $M_Z = 92 \text{ GeV}/c^2$ という質量 (予言されたように) で発見されたことは、GMS 模型の説得力のある証拠となった [13].

例題 9.4 弾性ニュートリノ-電子散乱 例題 9.1 で、 W によって媒介される $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_e + \mu$ の断面積を計算した。今度はそれに関連した、 Z^0 により媒介される $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$ を考察する。



Z^0 の伝播関数は (式 (9.3))

$$\frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_Z^2 c^2)}{q^2 - M_Z^2 c^2} \quad (9.94)$$

である。低エネルギー ($q^2 \ll M_Z^2 c^2$) では、それは

$$\frac{i g_{\mu\nu}}{(M_Z c)^2} \quad (9.95)$$

と簡略になる。この近似を使うと、その振幅は

$$\mathcal{M} = \frac{g_z^2}{8(M_Z c)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu(c_V - c_A\gamma^5)u(2)] \quad (9.96)$$

であり、よって (問題 9.2)

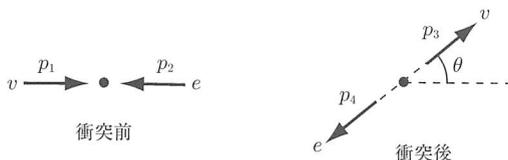


図 9.7 重心系における弾性ニュートリノ-電子散乱

$$\begin{aligned}
 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 2 \left(\frac{g_z}{4M_Z c} \right)^4 \text{Tr} \{ \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \not{p}_3 \} \\
 &\quad \times \text{Tr} \{ \gamma_\mu (c_V - c_A \gamma^5) (\not{p}_2 + mc) \gamma_\nu (c_V - c_A \gamma^5) (\not{p}_4 + mc) \} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{g_z}{M_Z c} \right)^4 \{ (c_V + c_A)^2 (p_1 \cdot p_2) (p_3 \cdot p_4) \\
 &\quad + (c_V - c_A)^2 (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) - (mc)^2 (c_V^2 - c_A^2) (p_1 \cdot p_3) \} \\
 &\hspace{15em} (9.97)
 \end{aligned}$$

である。ここで、 m は電子の質量で、 c_V と c_A は電子に対する中性弱結合定数である。いま、重心系に移り、電子の質量を無視すると ($m \rightarrow 0$),

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2 \left(\frac{g_z E}{M_Z c^2} \right)^4 \left[(c_V + c_A)^2 + (c_V - c_A)^2 \cos^4 \frac{\theta}{2} \right] \quad (9.98)$$

を見出す。ここで、 E は電子 (あるいはニュートリノ) のエネルギーで、 θ は散乱角である (図 9.7)。微分断面積 (式 (9.47)) は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2 \left(\frac{\hbar c}{\pi} \right)^2 \left(\frac{g_z}{4M_Z c^2} \right)^4 E^2 \left[(c_V + c_A)^2 + (c_V - c_A)^2 \cos^4 \frac{\theta}{2} \right] \quad (9.99)$$

で、(すべての角度について積分する) 全断面積は、

$$\sigma = \frac{2}{3\pi} (\hbar c)^2 \left(\frac{g_z}{2M_Z c^2} \right)^4 E^2 (c_V^2 + c_A^2 + c_V c_A) \quad (9.100)$$

となる。GWS 模型における c_V と c_A の値を (表 9.1 から) 代入し、例題 9.1 の結果 (式 (9.14)) と比較すると、ミュー粒子質量よりもはるかに高いエネルギー領域では

$$\frac{\sigma(\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-)}{\sigma(\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-)} = \frac{1}{4} - \sin^2 \theta_w + \frac{4}{3} \sin^4 \theta_w = 0.0900 \quad (9.101)$$

であることを見出す。実験に 10% の不定性があることを考えると、現在の実測値 [14] 0.11 とよく一致している。

実験室で弱中性相互作用を検出するのになぜそんなに時間がかかったのかとも思えない。結局、ブラドマンの最初の予想から CERN での確固たる実験結果の間

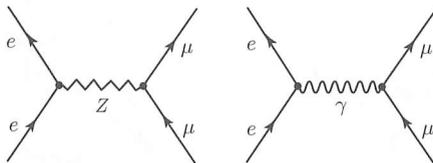


図 9.8 $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ に対する弱相互作用および電磁気相互作用の寄与

には 15 年の歳月が流れた。その理由は、たいいていの中性過程は競合する電磁気過程に「マスクされて」しまうからだ。たとえば、 $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ は、仮想 Z^0 と仮想 γ のどちらかによって起こる (図 9.8)。低エネルギーでは、光子を媒介する過程が圧倒している*22。だからこそ、ニュートリノ散乱が中性弱相互作用の存在を確かめるために最初に使われたのだ。ニュートリノは電磁気結合をもたないので、弱い相互作用による効果がぼやけないのだ。しかし、ニュートリノの実験は非常に難しく、だからとても時間がかかったのだ。別の選択肢は、高エネルギーに行くことだ。とりわけ、 Z^0 質量の近くでは Z^0 の伝播関数の分母が小さくなるので、それに応じて「弱い」相互作用が大きくなる。昔は、 θ_w を見積もるのが難しかったので、 Z^0 質量はまったくもって不定だった。しかし、70 年代の終わり頃までには、何種類もの実験データが $\theta_w \approx 29^\circ$ であること、よって $M_Z = 90 \text{ GeV}/c^2$ であることを示した (問題 9.20)。この予言は 1983 年に驚くほどしっかりと確かめられて [13]、その結果が、 Z^0 ピークで実験を行うように設計された電子-陽電子コライダ-の建設へと人々を奮い立たせた。SLAC の SLC と CERN の LEP だ。

例題 9.5 Z^0 ピーク近傍における電子-陽電子散乱 $e^+ + e^- \rightarrow f + \bar{f}$ 過程 (図 9.9) を考えてみよう。ここで、 f はクォークかレプトンだ*23。今度は、 Z^0 の伝播関数に関して近似 (式 (9.95)) を使わない。というのは、まさに $q^2 \approx (M_Z c)^2$ の領域に興味があるからだ。振幅は

$$\mathcal{M} = -\frac{g_z^2}{4[q^2 - (M_Z c)^2]} [\bar{u}(4)\gamma^\mu (c_V^f - c_A^f \gamma^5) v(3)]$$

*22 原理的には、すべての電磁気過程に弱い相互作用による汚染が存在する。というのも、 Z^0 は γ が結合するものすべてに結合するからだ (加えてそれ以外にも)。たとえば、原子内で電子を原子核に束縛しているクーロン力は Z^0 の交換によりわずかに修正を受けて、それが原子のスペクトルで観測されている。同様に、電子-陽子散乱にも弱相互作用の混入はある。これらの効果はわずかだが、隠しきれない痕跡を残している。パリティ非保存だ [15]。

*23 しかし、電子の場合、それを回転させたダイアグラムも含めなければならないことに注意せよ。

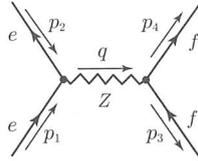


図 9.9 Z^0 ボーク近くでの電子-陽電子散乱

$$\times \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{(M_Z c)^2} \right) [\bar{v}(2)\gamma^\nu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(1)] \quad (9.102)$$

となる。ここで、 $q = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ である。90 GeV 近傍の話をしているので、レプトンとクォークの質量は無視してよい*24。この場合、伝播関数の第 2 項は何の寄与も与えない。なぜなら、 q_μ が γ^μ と縮約されて、

$$\bar{u}(4) \not{q} (c_V - c_A \gamma^5) v(3)$$

となり、 $\not{q} = \not{p}_3 + \not{p}_4$ 、かつ、 $\bar{u}(4)\not{p}_4 = 0$ (式 (9.96) で $m = 0$ とする) で、同じ理由から

$$\not{p}_3 (c_V - c_A \gamma^5) v(3) = (c_V + c_A \gamma^5) \not{p}_3 v(3) = 0$$

となるからである。ゆえに、

$$\mathcal{M} = -\frac{g_z^2}{4[q^2 - (M_Z c)^2]} [\bar{u}(4)\gamma^\mu (c_V^f - c_A^f \gamma^5) v(3)] [\bar{v}(2)\gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(1)] \quad (9.103)$$

であり、そこから、

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \left[\frac{g_z^2}{8(q^2 - (M_Z c)^2)} \right]^2 \text{Tr} \{ \gamma^\mu (c_V^f - c_A^f \gamma^5) \not{p}_3 \gamma^\nu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) \not{p}_4 \} \\ &\quad \times \text{Tr} \{ \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) \not{p}_1 \gamma_\nu (c_V^f - c_A^f \gamma^5) \not{p}_2 \} \end{aligned} \quad (9.104)$$

が導かれる。さてここで、最初のトレースは (問題 9.2)、

$$4[(c_V^f)^2 + (c_A^f)^2][p_3^\mu p_4^\nu + p_3^\nu p_4^\mu - g^{\mu\nu}(p_3 \cdot p_4)] - 8i c_V^f c_A^f \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{3\lambda} p_{4\sigma} \quad (9.105)$$

であり、2 番目のトレースも同様の表現になる。よって、

*24 $m_f \ll M_Z$ を仮定して、トップクォークは含まれない。しかし、このエネルギーではいずれにせよ t は生成されない。

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\frac{g_z^2}{q^2 - (M_Z c)^2} \right]^2 \{ [(c_V^f)^2 + (c_A^f)^2] [(c_V^e)^2 + (c_A^e)^2] \\
&\quad \times [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)] \\
&\quad + 4c_V^f c_A^f c_V^e c_A^e [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)] \} \quad (9.106)
\end{aligned}$$

であり、重心系では、

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \left[\frac{g_z^2 E^2}{(2E)^2 - (M_Z c^2)^2} \right]^2 \\
&\quad \times \left\{ [(c_V^f)^2 + (c_A^f)^2] [(c_V^e)^2 + (c_A^e)^2] (1 + \cos^2 \theta) - 8c_V^f c_A^f c_V^e c_A^e \cos \theta \right\} \quad (9.107)
\end{aligned}$$

になる。ここで、 E はそれぞれの粒子のエネルギーで、 θ は \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_3 の間の角度である。それゆえ、微分散乱断面積 (式 (9.47)) は

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{\hbar c g_z^2 E}{16\pi [(2E)^2 - (M_Z c^2)^2]} \right)^2 \\
&\quad \times \left\{ [(c_V^f)^2 + (c_A^f)^2] [(c_V^e)^2 + (c_A^e)^2] (1 + \cos^2 \theta) - 8c_V^f c_A^f c_V^e c_A^e \cos \theta \right\} \quad (9.108)
\end{aligned}$$

となり、全断面積は

$$\sigma = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{\hbar c g_z^2 E}{4[(2E)^2 - (M_Z c^2)^2]} \right)^2 [(c_V^f)^2 + (c_A^f)^2] [(c_V^e)^2 + (c_A^e)^2] \quad (9.109)$$

である。

見てわかるように、 Z^0 極、つまり、全エネルギー ($2E$) が $M_Z c^2$ (Z^0 を質量核上にちょうど置いたとき) になると、 σ は発散する。この問題は、 Z^0 を安定粒子として取り扱ってきたことにあるが、じつはそうではないということだ。その寿命は有限で、これが質量を「ほやかせる」効果を与える。これを考慮に入れるために伝播関数を修正する [16].

$$\frac{1}{q^2 - (M_Z c)^2} \rightarrow \frac{1}{q^2 - (M_Z c)^2 + i\hbar M_Z \Gamma_Z} \quad (9.110)$$

ここで、 Γ_Z は崩壊幅である (実験的には $\Gamma_Z = 3.791 \pm 0.003 \times 10^{24}$ /秒)。この調整を加えると、断面積は

$$\sigma = \frac{(\hbar c g_z^2 E)^2}{48\pi} \frac{[(c_V^f)^2 + (c_A^f)^2][(c_V^e)^2 + (c_A^e)^2]}{[(2E)^2 - (M_Z c^2)^2]^2 + (\hbar M_Z c^2 \Gamma_Z)^2} \quad (9.111)$$

になる。 $\hbar \Gamma_Z \ll M_Z c^2$ なので、 Z^0 を有限寿命にする補正は、 Z^0 極のごく近傍以外では無視できるほど小さい。 Z^0 極では無限のピークを滑らかにする効果がある。

8章で光子が媒介するときの同じ過程の断面積を計算した (式 (8.6))。

$$\sigma = \frac{(\hbar c g_e^2)^2 (Q^f)^2}{48\pi E^2} \quad (9.112)$$

ここで、 Q^f は e を単位とした f の電荷である。 ゆえに、 (たとえば) ミュー粒子生成における弱相互作用と電磁気相互作用との比は、

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \mu^+\mu^-)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \left\{ \frac{[(1/2) - 2\sin^2\theta_w + 4\sin^4\theta_w]^2}{(\sin\theta_w \cos\theta_w)^4} \right\} \times \frac{E^4}{[(2E)^2 - (M_Z c^2)^2]^2 + (\hbar \Gamma_Z M_Z c^2)^2} \quad (9.113)$$

となる。 中括弧の中の係数は約 2 である。 Z^0 極よりもはるかに低いところ ($2E \ll M_Z c^2$) では、

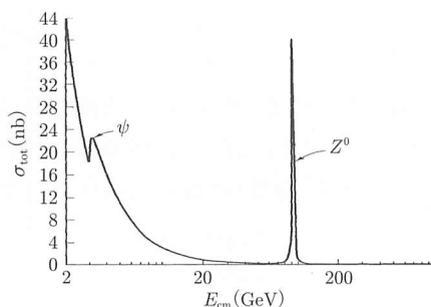
$$\frac{\sigma_Z}{\sigma_\gamma} \cong 2 \left(\frac{E}{M_Z c^2} \right)^4 \quad (9.114)$$

であり、電磁気力を經由する方が圧倒的に大きい (たとえば、 $2E = (1/2)M_Z c^2$ では弱い相互作用の寄与は 1%未満だ)。 しかし、ちょうど Z^0 極上では ($2E = M_Z c^2$)、

$$\frac{\sigma_Z}{\sigma_\gamma} \cong \frac{1}{8} \left(\frac{M_Z c^2}{\hbar \Gamma_Z} \right) \approx 200 \quad (9.115)$$

となる。 つまり、 Z^0 極では 200 倍も弱い相互作用の方が好まれる (図 9.10)*25。

*25 同様に興味深いのは、その二つの振幅を組み合わせるときに起きる電磁相互作用と弱い相互作用との「干渉」 $|\mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z|^2 = |\mathcal{M}_\gamma|^2 + |\mathcal{M}_Z|^2 + 2\text{Re}(\mathcal{M}_\gamma \mathcal{M}_Z)$ だ。 $|\mathcal{M}_\gamma|^2$ と $|\mathcal{M}_Z|^2$ (8章で) は計算したが、交差項は Z^0 極よりもはるかに低いエネルギーでも GWS 模型に対する精度の高い試験を提供する (ハルツェンとマーチンの教科書 [11] の 13.6 節と文献 [15] を参照)。 実際、1978 年の電弱干渉実験は成功して、それによりたいいていの理論家が GMS 模型は正しいと確信した。 現代の結果については、Physics Today, 17 (September 1978) を参照せよ。

図 9.10 Z^0 極近辺における電子-陽電子散乱

9.7 電弱統一

9.7.1 カイラルフェルミオン

いまやすべてのカードがテーブルに出そろった*26。残っているのは、表 9.1 と式 (9.90) から (9.92) 中の GWS 模型のパラメーターがどこから出てくるのかを説明するのみだ。グラシヨーの元々の目的は弱い相互作用と電磁気相互作用を統一することであった。つまり、互いが無関係な現象としてではなく、一つの根源的な「電弱」相互作用の異なる顕在化として、一つの理論体系にまとめることだった。これは 1961 年には大胆な提案であった [17]。まず初めに、弱い力と電磁気力では強さの差が甚大だ。しかし、グラシヨーと他の数人が気づいたように、もし弱い相互作用が極度に重い粒子によって媒介されているとしたら、その違いは説明がついた。もちろん、すぐに次の疑問にぶつかる。もし本当に根本的には一つの相互作用だとしたら、電磁気力の媒介粒子 (γ) は質量がないのに、弱い力の媒介粒子 (W^\pm と Z^0) はなぜそんなに重いのか。グラシヨーには特別なよい答えがなかった (彼は恥ずかしそうに「それはわれわれが乗り越えなければならなかつまづきだ」といった)。その解答は、1967 年に「ヒッグス機構」(10 章) というかたちで、ワインバーグとサラムによってもたらされた (文献 [8] と [9] を参照)。最後に、電磁気力と弱い力のパーテックス因子には構造的な違いがある。一見それは、統一の可能性を拒むように見える。前者は純粋にベクトル (γ^μ) で、後者はベクトルと軸性ベクトル部分を含む。とりわけ、 W^\pm の結合は、文字通り「最大限」 $V-A$ に混じり合って、 $\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ だ。

*26 W と Z^0 同士の (あるいは W と光子の) 結合についてはまだ議論していない。そのルールは、QCD におけるグルーオン-グルーオン結合のルールと似ており、付録 D にまとめてある。

この最後の難問は、行列 $(1 - \gamma^5)$ を粒子のスピンル自身に吸収させてしまうという賢明な方法によって解決された。具体的には、

$$u_L(p) \equiv \frac{(1 - \gamma^5)}{2} u(p) \quad (9.116)$$

を定義する。下付き添字 (L) は「左巻き」を意味し、「ヘリシティー -1」を想起させるはずだ。しかし、これは重大な誤解を生む。というのも、 u_L は一般的にはヘリシティーの固有状態ではないからだ。実際、ディラック方程式の解に対して

$$\gamma^5 u(p) = \begin{pmatrix} \frac{c(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{E + mc^2} & 0 \\ 0 & \frac{c(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{E - mc^2} \end{pmatrix} u(p) \quad (9.117)$$

となる (問題 9.26)。問題となっている粒子が質量ゼロならば、 $E = |\mathbf{p}|c$ で

$$\gamma^5 u(p) = (\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\Sigma}) u(p) \quad (9.118)$$

である。ここで

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad (9.119)$$

なのは以前と同じだ。 $(\hbar/2)\boldsymbol{\Sigma}$ はディラック方程式のスピン行列であることを思い出すと、 $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\Sigma})$ は固有値 ± 1 をもつヘリシティーである。それに伴って

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u(p) = \begin{cases} 0 & (u(p) \text{ のヘリシティーが } +1) \\ u(p) & (u(p) \text{ のヘリシティーが } -1) \end{cases} \quad (m = 0 \text{ のとき}) \quad (9.120)$$

である。もし $u(p)$ がヘリシティーの固有状態でなかったら、 $(1/2)(1 - \gamma^5)$ は、ヘリシティー -1 成分を取り出す「射影演算子」として働く。一方、もし粒子が質量ゼロでないときは、式 (9.118) が (近似的に) 成立するのは超相対論的な領域 ($E \gg mc^2$) だけで、それゆえ、この極限でのみ (式 (9.116) で定義された) u_L はヘリシティー -1 をもつ。しかしそれでも、みんなが u_L を「左巻き」とよぶので、私も慣例に従った言語を使うことにする*27。

*27 どうか理解してほしい。式 (9.116) が u_L の定義で、誰もそれに異論はない。注意喚起したいのは、そのよび名が混乱を生じさせるということだけだ。「左巻き」は、粒子の質量を無視できるとき以外では、「ヘリシティー -1」を意味しない。

表 9.2 カイラルスピノル

粒 子	反粒子
$u_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u$	$v_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)v$
$u_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u$	$v_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)v$
$\bar{u}_L = \bar{u}\frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$	$\bar{v}_L = \bar{v}\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$
$\bar{u}_R = \bar{u}\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$	$\bar{v}_R = \bar{v}\frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$

R と L は, $m = 0$ ならヘリシティ $+1$ と -1 に対応し, $E \gg mc^2$ のときも近似的にヘリシティに対応する.

一方, 反粒子に対しては

$$v_L(p) \equiv \frac{(1 + \gamma^5)}{2}v(p) \quad (9.121)$$

を定義する*28. それに対応する「右巻き」のスピノルは

$$u_R(p) = \frac{(1 + \gamma^5)}{2}u(p), \quad v_R(p) \equiv \frac{(1 - \gamma^5)}{2}v(p) \quad (9.122)$$

である. 随伴表現のスピノルについては, γ^5 がエルミートで ($\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$), かつ, γ^μ と反交換なので ($\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$),

$$\bar{u}_L = u_L^\dagger \gamma^0 = u^\dagger \frac{(1 - \gamma^5)}{2} \gamma^0 = u^\dagger \gamma^0 \frac{(1 + \gamma^5)}{2} = \bar{u} \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \quad (9.123)$$

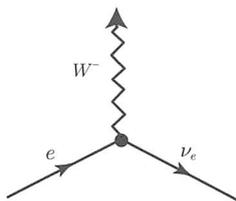
となる. 同様に,

$$\bar{v}_L = \bar{v} \frac{(1 - \gamma^5)}{2}, \quad \bar{u}_R = \bar{u} \frac{(1 - \gamma^5)}{2}, \quad \bar{v}_R = \bar{v} \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \quad (9.124)$$

である. これらのさまざまな (表 9.2 にまとめられた) スピノルを「カイラル」フェルミオン状態とよぶ (ギリシャ語の「手」から来ている, 語源は「カイロブラクティック」と同じだ).

これは表記法以外の何物でもないということを強調したい. ただ, これによって電弱統一が容易になり, 弱い相互作用と電磁気相互作用を再構築することができるので便利なのだ. まず初めに, 電子とニュートリノの W^- への結合を考えてみよう (たとえば, 逆ベータ崩壊のかたちで起こる. 例題 9.1 参照).

*28 もし γ^5 の符号が奇妙だと思ふなら, 式 (7.30) に続く脚注 *9 (7 章) を参照せよ.



このバーテックスから \mathcal{M} への寄与は

$$j_{\mu}^{-} = \bar{\nu} \gamma_{\mu} \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) e \quad (9.125)$$

によって与えられる（ここで、 e と ν は粒子のスピンルを表す。しばらくの間、異なる種類の粒子の表記には注意する必要がある。 u_e や u_{ν_e} などと書くのはあまりにも面倒なので）。この物理量は弱「カレント」とよばれる。今後わかるように、それは、QED における電流のような役割を果たす。

$$\left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} [1 - 2\gamma^5 + (\gamma^5)^2] = \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \quad (9.126)$$

かつ、

$$\gamma_{\mu} \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) = \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \gamma_{\mu} \quad (9.127)$$

なので、

$$\gamma_{\mu} \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) = \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \gamma_{\mu} \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \quad (9.128)$$

である。

あまり何も変わっていないように見えるかもしれないが、この式とカイラルスピノルを使い、式 (9.125) をもっとすっきりと書くことができる。

$$j_{\mu}^{-} = \bar{\nu}_L \gamma_{\mu} e_L \quad (9.129)$$

弱い相互作用のバーテックス因子はいまや純粋なベクトル型となった。しかし、これは左巻きの電子と左巻きのニュートリノに結合する。この点では、QED における本質的なバーテックスとは構造的にまだ違う。しかし、QED でやったのと同じようなことができる。

$$u = \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) u + \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) u = u_L + u_R \quad (9.130)$$

に注意すると (同様に $\bar{u} = \bar{u}_L + \bar{u}_R$), カイラルスピノルを使い電磁カレント自身を

$$j_\mu^{em} = -\bar{e}\gamma_\mu e = -(\bar{e}_L + \bar{e}_R)\gamma_\mu(e_L + e_R) = -\bar{e}_L\gamma_\mu e_L - \bar{e}_R\gamma_\mu e_R \quad (9.131)$$

と書ける (先々のために, 電子の電荷が負であることを考慮して, 因子 -1 をつけておくのがよい). 「交差項」が消えていることに着目しよう.

$$\bar{e}_L\gamma_\mu e_R = \bar{e} \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) \gamma_\mu \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) e = \bar{e}\gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) e \quad (9.132)$$

だが,

$$(1-\gamma^5)(1+\gamma^5) = 1 - (\gamma^5)^2 = 0 \quad (9.133)$$

である. 式 (9.129) と (9.131) は統一理論を構築するための第一歩だ. 弱カレントは左巻きだけに結合する一方で, 電磁カレントが左右両方に結合するのは真実だが, それを除けば, それら二つは驚くほどよく似ている. この式がさらに魅力的なのは, 物理学者が左巻きフェルミオンと右巻きフェルミオンをほぼ別の粒子とみなすに至ったことである*29.

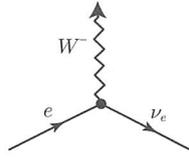
この観点からは, 荷電弱バーテックスの因子 $(1-\gamma^5)/2$ は, 相互作用自身というよりもむしろそれに関わる粒子を特徴づけている. 相互作用自身は, 強い力ばかり, 電磁気力ばかり, 弱い力ばかり, すべての場合でベクトル型だ.

9.7.2 弱アイソスピンとハイパー荷

$e^- \rightarrow \nu_e + W^-$ 過程を記述する (負の荷電) 弱カレント

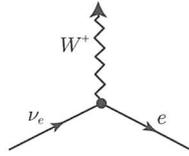
$$j_\mu^- = \bar{\nu}_L\gamma_\mu e_L$$

*29 この議論を進めすぎるのは危険だ. たとえば, 左巻きの電子が必ずしも右巻きと同じ質量である必要があるのか不思議に思うかもしれない. あるいは, いかなるベクトル相互作用も左巻き粒子を右巻き粒子に結合させないことに気づいて (式 (9.132) と (9.133) を参照), それら二つの「世界」はどのように交信するのか疑問に思うかもしれない. どちらの疑問も u_L と u_R に対する誤解に由来している. 問題は, 粒子の相互作用を記述するには便利であるけれども, (粒子の質量がゼロでない限り) 左巻き右巻きは自由粒子の伝播に対して保存しない. 数式的には, γ^5 は自由粒子のハミルトニアンと交換しない. 実際には, u_L と u_R はディラック方程式を満たさない (問題 9.26). 初期状態で左巻きだった粒子が, すぐに右巻き成分をもち始める (対照的に, ヘリシティは自由粒子の伝播で保存する). 質量をもたないフェルミオンに限って, 完全な意味で, 左巻きと右巻き粒子は文字通りまったく別物であると考えることができる.



に加えて、もちろん、 $\nu_e \rightarrow e^- + W^+$ 過程を表現する正の荷電カレント

$$J_\mu^+ = \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_L$$



も存在する。これらの弱カレントは、左巻き二重項

$$\chi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \tag{9.134}$$

と、 2×2 行列

$$\tau^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^- \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.135}$$

を導入することにより、

$$J_\mu^\pm = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \tau^\pm \chi_L \tag{9.136}$$

のように、より簡略化した表記で記述できる。行列 τ^\pm はパウリのスピン行列の最初の二つの線形結合だ (式 (4.26))

$$\tau^\pm = \frac{1}{2}(\tau^1 \pm i\tau^2) \tag{9.137}$$

(ここでは、通常のスピンとの混乱を避けるために、 σ の代わりに τ という文字を使う)。これは、アイソスピンのことを強く思い起こさせる。4.3 節で、陽子と中性子を式 (9.134) とよく似た二重項に組み込んだ。もし、 $(1/2)\tau^3 = (1/2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対応する 3 番目の弱カレント

$$J_\mu^3 = \bar{\chi}_L \gamma_\mu (1/2)\tau^3 \chi_L = (1/2)\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - (1/2)\bar{e}_L \gamma_\mu e_L \tag{9.138}$$

が存在するならば、本当に、完全な「弱アイソスピン」対称性を考えることができる。「完璧だ！ 弱中性カレントがあった！」と読者が叫ぶのが聞こえてくる。そう急いではいけない。このカレントは左巻き粒子にだけ結合する。昔の言葉でいえば、それは純粋な $V-A$ だ。一方、中性弱相互作用は右巻き成分も同様に含んでいる。しかし、大丈夫だ、ゴールは目前だ。

アイソスピンに平行な成分を構築することで、ハイパー荷 (Y)*³⁰の弱相互作用版を考えてみる。それは、電荷 (e を単位として Q) とアイソスピン (I^3) を使い、ゲルマン-西島の公式によって (式 (4.37))

$$Q = I^3 + (1/2)Y \tag{9.139}$$

と関係づけられる。そこで、「弱ハイパー荷」カレント

$$j_\mu^Y = 2j_\mu^{em} - 2j_\mu^3 = -2\bar{e}_R\gamma_\mu e_R - \bar{e}_L\gamma_\mu e_L - \bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L \tag{9.140}$$

を導入する。これは、弱アイソスピンに関しては、不変な構造になっている。というのも、後ろの部分は右巻き成分にまったく感知しておらず、かつ、組み合わせ

$$\bar{e}_L\gamma_\mu e_L + \bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L = \bar{\chi}_L\gamma_\mu\chi_L$$

自身が不変だ*³¹。この背後にある対称群のことは、 $SU(2)_L \otimes U(1)$ とよばれる。 $SU(2)_L$ は弱アイソスピンを意味し (下付き添字によって、それは左巻き状態だけに伴うことを注記している)、 $U(1)$ は弱ハイパー荷を意味する (右巻きと左巻きの両方を含む)。

すべてのことを電子とニュートリノを用いて説明してきたが、他のレプトンやクォークにも簡単に拡張できる。左巻き二重項 (クォークの場合はカビボ回転されたもの)

$$XL \rightarrow \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L \tag{9.141}$$

*³⁰ おそらく、この語を忘れていたのではないが、しかし、ハイパー荷は基本的にはストレンジネスと同じで、バリオンの場合、八道説の図の真ん中の行がつねに $Y = 0$ をもつように平行移動させればよい。具体的には、 A をバリオン数として、 $Y = S + A$ だ。

*³¹ もしこう考えることが気になるなら、以下のように考えてみよう。われわれは、二つのアイソスピン二重項を組み合わせるアイソスピン三重項 $\bar{\nu}_L e_L$, $(\bar{\nu}_L \nu_L - \bar{e}_L e_L)$, $\bar{e}_L \nu_L$ (式 (5.38) の類推) と、アイソスピン一重項 $(\bar{\nu}_L \nu_L + \bar{e}_L e_L)$ (式 (5.39) の類推) をつくったのだ。最初の三つが弱アイソスピンカレント j^\pm と j^3 になり、残りが右巻き成分と一緒に、弱ハイパー荷カレント j^Y になったのだ。

から、三つの弱アイソスピンカレント

$$\mathbf{j}_\mu = (1/2)\bar{\chi}_L\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\chi_L \quad (9.142)$$

と、弱ハイパー荷カレント

$$j_\mu^Y = 2j_\mu^{em} - 2j_\mu^3 \quad (9.143)$$

を構築する。ここで、 j_μ^{em} は電流である

$$j_\mu^{em} = \sum_{i=1}^2 Q_i (\bar{u}_{iL}\gamma_\mu u_{iL} + \bar{u}_{iR}\gamma_\mu u_{iR}) \quad (9.144)$$

(Q_i を電荷として、二重項に入っている粒子について和を取る)*32。

9.7.3 電弱混合

さて、GWS 模型によると、三つのアイソスピンカレントは強さ g_W で弱アイソスピン三重項であるベクトルボソン \mathbf{W} と結合し、一方、弱ハイパー荷カレントは強さ $g'/2$ でアイソスピン一重項 B と結合する

$$-i \left[g_W \mathbf{j}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu + \frac{g'}{2} j_\mu^Y B^\mu \right] \quad (9.145)$$

(これら四つの粒子は、最終的には、弱い相互作用と電磁相互作用の媒介粒子である W^\pm , Z^0 , γ に対応しているが、これから見ていくように、ひとひねりすることが必要である)。ここで、太字は弱アイソスピン空間における 3 元ベクトルを表す。内積をあらわに書くと

$$\mathbf{j}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu = j_\mu^1 W^{\mu 1} + j_\mu^2 W^{\mu 2} + j_\mu^3 W^{\mu 3} \quad (9.146)$$

あるいは、荷電カレント $j_\mu^\pm = j_\mu^1 \pm ij_\mu^2$ を使い

$$\mathbf{j}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu = (1/\sqrt{2})j_\mu^+ W^{\mu+} + (1/\sqrt{2})j_\mu^- W^{\mu-} + j_\mu^3 W^{\mu 3} \quad (9.147)$$

*32 弱アイソスピン (とハイパー荷) と普通の (「強い」相互作用に関する) アイソスピンの違いが何なのかと思うかもしれない。とりわけ、軽いクォークについて考えてみると、その問題は明白になる。弱アイソスピン二重項は $\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$ である一方、強い相互作用によるアイソスピン二重項は $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$ だ。非常に似ているが……何か関係があるのだろうか。答えは否だ。結局のところ、(1) 弱アイソスピンはクォーク同様レプトン (3 世代すべて) にも適用でき、(2) 弱アイソスピンは左巻き成分だけを含み (すべての右巻き成分は一重項である、つまり、弱アイソスピンに関しては不変だ)、(3) 弱アイソスピン二重項はカピボ回転されたものである。平たくいうと、強い相互作用のアイソスピンと弱アイソスピンは、数学的に共通の構造をもち (これに関しては、普通のスピン 1/2 のように、他の多くの系でも同じである)、名前も似てはいるが (たぶん不運だった)、互いに何の関係もない。

となる。ここで、

$$W_\mu^\pm \equiv (1/\sqrt{2})(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (9.148)$$

は、 W^\pm 粒子の波動関数である。

W^\pm の結合は、式 (9.147) の W^\pm の係数からただちに読み取ることができる。たとえば、 $e^- \rightarrow \nu_e + W^-$ では、 $j_\mu^- = \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L = \bar{\nu} \gamma_\mu [(1 - \gamma^5)/2] e$ があるので、

$$-ig_w(1/\sqrt{2})j_\mu^- W^{\mu-} = -\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}[\bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e] W^{\mu-} \quad (9.149)$$

という項が出てくる。バーテックス因子は

$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \quad (9.150)$$

であり、これこそまさにわれわれの出発点である (式 (9.5))。

けれども、二つの中性状態 (W^3 と B) はグラシヨアの理論では「混ざり合い」、質量をもたない線形結合の組み合わせ (光子) と、それに直交する質量をもつ組み合わせ (Z^0) をつくる

$$\begin{aligned} A_\mu &= B_\mu \cos \theta_w + W_\mu^3 \sin \theta_w \\ Z_\mu &= -B_\mu \sin \theta_w + W_\mu^3 \cos \theta_w \end{aligned} \quad (9.151)$$

(これを見ると θ_w がなぜ「弱混合角」とよばれるのかわかるだろう)。物理的な場 (A^μ と Z^μ) で書くと、電弱相互作用の中性部分 (式 (9.145)) は以下のように取り出せる。

$$\begin{aligned} -i \left[g_w j_\mu^3 W^{\mu 3} + \frac{g'}{2} j_\mu^Y B^\mu \right] &= -i \left\{ \left[g_w \sin \theta_w j_\mu^3 + \frac{g'}{2} \cos \theta_w j_\mu^Y \right] A^\mu \right. \\ &\quad \left. + \left[g_w \cos \theta_w j_\mu^3 - \frac{g'}{2} \sin \theta_w j_\mu^Y \right] Z^\mu \right\} \end{aligned} \quad (9.152)$$

もちろん、電磁気結合についてはわかっていて、現代の言葉で書くとそれは

$$-ie j_\mu^{em} A^\mu \quad (9.153)$$

となる。一方、式 (9.143) から $j_\mu^{em} = j_\mu^3 + \frac{1}{2} j_\mu^Y$ である。電弱統一理論と、通常の QED の整合性から

$$g_w \sin \theta_w = g' \cos \theta_w = g_e \quad (9.154)$$

が要求される。あきらかに、弱い力と電磁気力の結合定数は独立ではない。

残っているのは、 Z^0 への結合だ。式 (9.143) と (9.152)、(9.154) を使うと、

$$-ig_z(j_\mu^3 - \sin^2 \theta_w j_\mu^{em})Z^\mu \quad (9.155)$$

を得る。ここで、

$$g_z = \frac{g_e}{\sin \theta_w \cos \theta_w} \quad (9.156)$$

である。式 (9.155) から、中性弱結合を取り出せる。たとえば、 $\nu_e \rightarrow \nu_e + Z^0$ では j_μ^3 の項だけが寄与する。式 (9.138) に戻ると

$$-i\frac{g_z}{2}(\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L)Z^\mu = -\frac{ig_z}{2}\left[\bar{\nu}\gamma_\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\nu\right]Z^\mu \quad (9.157)$$

であり、それゆえ、ベクトルと軸性ベクトル結合 (式 (9.90)) は $c_V^\nu = c_A^\nu = 1/2$ となる。表 9.1 の残り部分の計算については読者に委ねる (問題 9.28)*³³。

いくつかの大きな疑問が生じる。どのような仕組みによって、背後にある $SU(2)_L \otimes U(1)$ 電弱対称性が「破れた」のだろうか。なぜ、 B と W^3 状態は「混ざって」 Z^0 と光子になるのだろうか。もし仮に弱い相互作用と電磁気相互作用が根本的に一つの電弱力によるものだとしたら、弱い相互作用の媒介粒子 (W^\pm と Z^0) が非常に重い一方で、電磁気力の媒介粒子 (γ) が質量をもたないのはどうしてなのだろうか。これらの疑問については、次の章であきらかにしていく。

参 考 書

- [1] N. Cabibbo: Physical Review Letters, **10**, 531 (1963).
- [2] 弱い相互作用に関する理論のより詳細な計算については、古典的な論文 R. E. Marshak, Riazuddin and C. P. Ryan: Theory of Weak Interactions in Particle Physics (John Wiley & Sons, 1969). または、簡単な記事 (a) E. D. Commins: Weak Interactions (McGraw-Hill, 1973) を参照。クォーク模型における弱い相互作用の包括的レビューについては、以下を参照。
(b) J. F. Donoghue, E. Golowich and B. Holstein: Physics Reports, **131**, 319 (1986);
(c) E. D. Commins and P. H. Bucksbaum: Weak Interactions of Leptons and Quarks (Cambridge University Press, 1983).
- [3] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani: Physical Review, D **2**, 1585 (1970). 弱い相互作用の理論に関する他の基礎的な論文は、(a) C. H. Lai (ed): Gauge Theory of Weak and Electromagnetic Interactions (World Scientific, 1981).
- [4] M. Kobayashi and K. Maskawa: Progress in Theoretical Physics, **49**, 652 (1973).
- [5] 著者によって異なるパラメーターを使用する。ここでは Particle Physics の慣習に従う。

*³³ 弱混合角は GWS 模型では決まらないので、二つの独立な結合定数 (たとえば g_e と g_w , あるいは g_e と g_z) が残る。この観点からは、完全な統一理論ではなく、むしろ、弱い相互作用と電磁気相互作用をまとめた理論である。

- [6] Particle Physics Booklet (2006). CKM 行列の有用な議論については, T.-P. Cheng and L.-F. Li: Gauge Theory of Elementary Particle Physics (Oxford, 1984) Sect. 12.2.
- [7] S. A. Bludman: Nuovo Cimento, **9**, 443 (1958).
- [8] S. L. Glashow: Nuclear Physics, **22**, 579 (1961). 下記に転載されている. (a) C. H. Lai (ed): Gauge Theory of Weak and Electromagnetic Interactions (World Scientific, 1981).
- [9] S. Weinberg: Physical Review Letters, **19**, 1264 (1967); (a) A. Salam: Elementary Particle Theory, (eds N. Svartholm) (Almquist and Wiksell, 1968); C. H. Lai (ed): Gauge Theory of Weak and Electromagnetic Interactions (World Scientific, 1981) にも再掲. 以下も参照. (b) Weinberg's Nobel Prize lecture, Science, **210**, 1212 (1980) に再掲.
- [10] G. 't Hooft: Nuclear Physics, B **33**, 173 (1971); B **35**, 167 (1971). 以下にも再掲. (a) C. H. Lai (ed): Gauge Theory of Weak and Electromagnetic Interactions (World Scientific, 1981).
- [11] F. J. Hasert *et al.*: Physics Letters, B **45**, 138 (1973); Nuclear Physics, B **73**, 1 (1974).
- [12] 一方, 一連の深性非弾性ニュートリノ-陽子散乱実験 (CERN でも) は, 荷電, 中性弱相互作用の基本構造を支持するだけでなく, クォーク模型そのものを確認するのにも役立った. たとえば, D. H. Perkins: Introduction to High Energy Physics, 4th edn (Cambridge University Press, 2000) Sect. 8.7; (a) F. Halzen and A. D. Martin: Quarks and Leptons (John Wiley & Sons, 1984) Sects. 12.7, 12.10; (b) F. E. Close: An Introduction to Quarks and Partons (Academic, 1979) Sect. 11.3.
- [13] G. Arnisson *et al.*: Physics Letters, B **122**, 103 (1983); B **126**, 398 (1983). これらの発見のレビューについては, (a) E. Radermacher: Progress in Particle and Nuclear Physics, **14**, 231 (1985).
- [14] $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$ についてのデータは以下の論文から引用. P. Vilain *et al.*: Physics Letters, B **364**, 121 (1995); $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$ についてのデータは以下の論文から引用. (a) L. A. Ahrens *et al.*: Physical Review, D **41**, 3297 (1990). 初期のデータは, (b) P. Alibrant *et al.*: Physics Letters, B **74**, 422 (1978). これは GWS 模型とは矛盾していて当時驚かれたが, 間違っていたことが判明し, (c) N. Armenise *et al.*: Physics Letters, B **86**, 225 (1979) によって訂正された.
- [15] E. N. Fortson and L. Wilets: Advances in Atomic and Molecular Physics, **16**, 319 (1980); (a) C. Y. Prescott *et al.*: Physics Letters, B **77**, 347 (1978); B **84**, 524 (1979); (b) S. L. Wu: Physical Reports, **107**, 229 (1984); (c) C. S. Wood *et al.*: Science, **275**, 1759 (1997).
- [16] たとえば, H. Frauenfelder and E. M. Henley: Subatomic Physics, 2nd edn (Prentice-Hall, 1991) Sect. 5.7.
- [17] 1957年にシュウィンガーはこのような理論の根本的な基礎を築いた. J. Schwinger: Annals of Physics, **2**, 407 (1957). (a) C. H. Lai (ed): Gauge Theory of Weak and Electromagnetic Interactions (World Scientific, 1981) にも再掲.

問題

- 9.1 質量をもったスピン 1 の粒子の完全性関係を導出せよ (質量なしの類推として問題 7.25 を参照). [ヒント: \mathbf{p} の方向に z 軸を取る. まず三つの互いに直交する偏極ベクトル $(\epsilon_u^{(1)}, \epsilon_u^{(2)}, \epsilon_u^{(2)})$ をつくる. これは $p^\mu \epsilon_\mu = 0$ と $\epsilon_\mu \epsilon^\mu = -1$ を満たす.]

$$\left[\text{答え: } \sum_{s=1,2,3} \epsilon_\mu^{(s)} \epsilon_\nu^{(s)*} = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{(Mc)^2} \right] \quad (9.158)$$

- 9.2 以下のトレースを計算せよ.

$$\text{Tr}[\gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) (\not{p}_1 + m_1 c) \gamma^\nu (c_V - c_A \gamma^5) (\not{p}_2 + m_2 c)]$$

ここで c_V と c_A は任意の (実) 数である.

$$\left[\text{答え: } 4(c_V^2 + c_A^2) [p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - p_1 \cdot p_2 g^{\mu\nu}] + 4(c_V^2 - c_A^2) m_1 m_2 c^2 g^{\mu\nu} - 8i c_V c_A \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{1\lambda} p_{2\sigma} \right] \quad (9.159)$$

- 9.3 (a) $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$ の $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ を, より一般的な結合 $\gamma^\mu (1 + \epsilon \gamma^5)$ を用いて計算せよ. また, $\epsilon = -1$ のとき式 (9.11) になることを確認せよ.

$$\left[\text{答え: } \frac{1}{4} \left(\frac{g_w}{M_W c} \right)^4 [(1 - \epsilon^2)^2 (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (1 + 6\epsilon^2 + \epsilon^4)(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)] \right]$$

- (b) $m_e = m_\mu = 0$ とした場合の重心系での微分散乱断面積を求めよ. また, 全断面積も求めよ.
 (c) もしこの反応の正確な実験データがあるとしたら, どうやって ϵ を決めることができるか.

- 9.4 式 (9.30) が (9.29) と等価であることを示せ.

- 9.5 崩壊が純粋にレプトンにだけであると仮定して, 式 (9.35) の適切な変換を行うことによって, タウ粒子の寿命を決定せよ (ミュー粒子の質量は, m_τ と比較して無視することができることも仮定する). 実験値と比較せよ.

- 9.6 弱い相互作用が純粋なベクトル型 (式 (9.5) には γ^5 が無い) だと仮定する. それでも図 9.1 のグラフと同じかたちが得られるだろうか.

- 9.7 ミュー粒子崩壊での電子のエネルギーの平均値はいくらだろうか.

$$[\text{答え: } (7/20) m_\mu c^2]$$

- 9.8 $n \rightarrow p + W$ の結合に $\gamma^\mu (1 + \epsilon \gamma^5)$ を用いるが, レプトンには $\gamma^\mu (1 - \gamma^5)$ を用いる. 中性子のベータ崩壊のスピン平均化振幅を計算する. $\epsilon = -1$ のとき, 結果が式 (9.41) に還元されることを示せ.

$$\left[\text{答え: } \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{g_w}{M_W c} \right)^4 [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)(1 - \epsilon)^2 + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)(1 + \epsilon)^2 - (1 - \epsilon^2) m_p m_n c^2 (p_2 \cdot p_4)] \right]$$

- 9.9 (a) 式 (9.52) を導出せよ.
 (b) 式 (9.58) を導出せよ.

9.10 本文中で、中性子崩壊の電子エネルギーは約 $(m_n - m_p)c^2$ までの範囲にあるとした。しかし、これは正確ではない。なぜなら、陽子とニュートリノの運動エネルギーを無視したためである。では、どのような運動学的な配分が最大の電子エネルギーを与えるのか、エネルギーと運動量の保存を適用して、正確な最大電子エネルギーを決定せよ。[答え： $(m_n^2 - m_p^2 + m_e^2)c^2/2m_n$] 概算とはどのくらい離れているだろうか（パーセントで誤差を与えよ）。

9.11 (a) 式 (9.59) を積分して式 (9.60) を導出せよ。

(b) $m_e \ll \Delta m = (m_n - m_p)$ のときの概算値を求めよ。もはや m_e はゼロでよいことに注意せよ。

9.12 式 (9.62) を導出せよ。

9.13 中性子崩壊における W のド・ブロイ波長 ($\lambda = h/p$) の最小値を求め、中性子の直径 ($\sim 10^{-13}$ cm) と比較せよ。[答え： $|\mathbf{p}| = 1.18 \text{ MeV}/c$ の最大値は p と e が真逆方向に出現するときなので、最小値は $\lambda = 10^{-10}$ cm である。]

9.14 例題 7.8 と 8.5 節の方法を用いて π^- 崩壊を散乱過程として解析せよ。崩壊率を計算し、本文中の結果と比較することで、 $|\psi(0)|^2$ を用いて f_π の式を求めよ。クォークの質量はゼロとせよ。

$$\left[\text{答え} : f_\pi^2 = \frac{2\hbar^3}{3c} \frac{2m_\pi^2 + m_l^2}{m_\pi m_l^2} \cos^2 \theta_c |\psi(0)|^2 \right]$$

9.15 $m_c^2 \ll E$ のとき

$$\gamma^5 u \cong \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} u$$

であることを示せ。このとき、 u はスピノル粒子でディラック方程式を満たす (式 (7.35), (7.41))。

$$u = \begin{pmatrix} u_a \\ \frac{c(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{E + mc^2} u_A \end{pmatrix}$$

射影行列

$$P_\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$$

が³⁴、 u のヘリシティ ± 1 部分を抜き出すことを示せ。

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} (P_\pm u) = \pm (P_\pm u)$$

9.16 $K^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ と $K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ の崩壊率の比を計算し、観測されている分岐比と比較せよ。

9.17 以下の過程の崩壊率を計算せよ。(a) $\Sigma^0 \rightarrow \Sigma^+ + e + \bar{\nu}_e$, (b) $\Sigma^- \rightarrow \Lambda + e + \bar{\nu}_e$, (c) $\Xi^- \rightarrow \Xi^0 + e + \bar{\nu}_e$, (d) $\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$, (e) $\Sigma^- \rightarrow n + e + \bar{\nu}_e$, (f) $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ + e + \bar{\nu}_e$. 結合はすべて $\gamma^\mu (1 - \gamma^5)$ であると仮定する。つまり、強い相互作用による軸結合の補正を無視してよいが、カビボ因子を忘れないこと。また、実験データと比較せよ。

9.18 (a) CKM 行列がユニタリー ($V^{-1} = V^\dagger$) である限り^{*34}、 $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ を消す GIM 機構は三つの世代 (もしくはは任意の世代) で機能することを示せ。[注意： $u \rightarrow d + W^+$ は CKM 要素 V_{ud} をもつ。つまり $d \rightarrow u + W^-$ は因子 V_{ud}^* をもつ。]

(b) 3×3 の一般的なユニタリー行列はいくつの独立した実パラメーターをもっているだろうか。また、 $n \times n$ の場合ではどうだろうか。[ヒント：任意のユニタリー行列 (U) は $U = e^{iH}$ と書くことができる。このとき H はエルミート行列である。一般的なエルミート行列にい

^{*34} 実験的な確認については、問題 9.33 を参照すること。

くつの独立の実パラメーターがあるのかという問題と等価である.]

各クォークの波動関数の位相は自由に変えることができる (u の規格化は $|N|^2$ だけしか決めない. 問題 7.3 参照). だから, $2n$, 正確には $(2n-1)$ のパラメーターは任意である. なぜなら, すべてのクォークの波動関数の位相を同じだけ一斉に変えるのは V に何もしないのと同じだからだ. これで CKM 行列を実行列にすることができるだろうか (もし実ユニタリーなら, 直交である, $V^{-1} = V^T$).

- (c) 一般的な 3×3 の (実) 直交行列には, いくつの実パラメーターがあるだろうか. また, $n \times n$ ではどうだろうか.
- (d) それでは答えはどうか. CKM 行列を実数だけにできるだろうか. 二世代 ($n = 2$) だけならどうか.

9.19 CKM 行列 (式 (9.87)) が任意の (実) 数値 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta$ に対してユニタリーであることを示せ.

9.20 フェルミ定数 G_F (式 (9.38)) と弱混合角 θ_W (式 (9.93)) の実験値を用いて, W^\pm と Z^0 の質量を GWS 理論で「予想」せよ. また, 実験値と比較せよ.

9.21 例題 9.4 では, 電子ニュートリノではなくミューニュートリノを用いた. 実際のところ, $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$ ビームは ν_e と $\bar{\nu}_e$ よりもつくりやすい. さらに, $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$ は, $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$ や $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$ よりも単純であるという理論的な理由もある. これについて説明せよ.

9.22 (a) GWS 模型での $\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$ の微分断面積と全断面積を計算せよ. [答え: 式 (9.100) と同じである. ただし, c_{AcV} の符号が逆である.]

- (b) 比 $\sigma(\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-) / \sigma(\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-)$ を求めよ. このとき, $m_e = 0$ とおけるほど高エネルギーであるとする.

9.23 (a) $Z^0 \rightarrow f + \bar{f}$ の崩壊率を計算せよ. ここで, f は任意のクォークかレプトンである. f が (Z と比較して) 十分に軽く, 質量を無視できると仮定する (Z^0 の完全性の関係が必要である. 問題 9.1 を参照).

$$\left[\text{答え: } \Gamma(Z^0 \rightarrow f + \bar{f}) = \frac{g_z^2 M_Z c^2}{48\pi\hbar} (|c_V^f|^2 + |c_A^f|^2) \right]$$

- (b) これらが支配的な崩壊モードだと仮定して, クォーク・レプトンの各種類への分岐比を求めよ (クォークにはカラーが 3 種類あることを忘れないこと). また, この崩壊にトップクォークを含むべきだろうか. [答え: e, μ, τ はそれぞれ 3%; ν_e, ν_μ, ν_τ はそれぞれ 7%; u, c はそれぞれ 12%; d, s, b は 15% である.]

- (c) Z^0 の寿命を計算せよ. もし第 4 世代の (クォークとレプトン) が存在した場合, 定量的にどのように変わるだろうか (Z^0 寿命の正確な測定は, 質量が $45 \text{ GeV}/c^2$ 未満であるクォークとレプトンがいくつあるかを示していることに注意せよ).

9.24 Z^0 に媒介される過程における R (e^+e^- 散乱でのクォーク対生成とミュー粒子対生成の全比率) を見積もれ. 議論のためトップクォークを式 (9.109) に適応できるほど十分軽いと仮定する. また, カラーを忘れないこと.

9.25 式 (9.113) の比を $x \equiv 2E/M_Z c^2$ の関数としてグラフにせよ. $\Gamma_Z = 7.3(g_z^2/48\pi)(M_Z c^2/\hbar)$ (問題 9.23) を用いること.

9.26 (a) もし $u(p)$ が (運動量空間で) ディラック方程式 (7.49) を満たしているとする, u_L, u_R (表 9.2) は ($m = 0$ でなければ) 満たせないことを示せ.

- (b) 行列 $P_\pm \equiv (1/2)(1 \pm \gamma^5)$ の固有値と固有スピノルを求めよ.

- (c) (たとえば) P_+ とディラック演算子 $(\not{p} - mc)$ の同時固有状態のスピノルは存在できるだろうか. [答え: できない. これらの演算子は交換できないためである.]

9.27 軽いクォーク二重項 u, d' の弱アイソスピンカレント j_μ^\pm, j_μ^3 を計算せよ. また, 電磁気カレント (j_μ^{em}) と弱ハイパー電荷カレント (j_μ^Y) を構築せよ (答えは d' を使ってよい).

- 9.28 式 (9.155) から, 表 9.1 のベクトル結合と軸性ベクトル結合を求めよ.
- 9.29 問題 9.5 で $\tau \rightarrow e + \nu_\tau + \bar{\nu}_e$ と $\tau \rightarrow \mu + \nu_\tau + \bar{\nu}_\mu$ (本質的には同じ) の崩壊率 Γ を求めた. ハドロニックモード ($\tau \rightarrow d + \nu_\tau + \bar{u}$ と $\tau \rightarrow s + \nu_\tau + \bar{u}$) はどうだろうか. τ の寿命 (レプトニックモードとハドロニックモードを両方含んだ場合) を見積もれ. そして電子, ミュー粒子, ハドロンモードの分岐比を算出せよ. 実験値と比較せよ. [部分的な答え: $\Gamma_{\text{tot}} = 5 \Gamma$]
- 9.30 (a) チャームクォークの寿命を推定せよ (まず支配的なモードを決めて, ミュー粒子崩壊式 (9.35) に適切な修正を加える). [ヒント: 問題 9.29 を参照.]
- (b) (a) に基づいて, 軽いクォークを傍観者として扱う D 中間子 ($D^0 = c\bar{u}$ と $D^+ = c\bar{d}$) の寿命を見積もれ. また, さまざまなセミレプトニックモードやハドロニックモードの分岐比を計算せよ. 実験値と比較せよ.
- (c) 同様に, B 中間子 ($B^0 = b\bar{d}$ と $B^- = b\bar{u}$) の寿命を推定せよ. b クォークは可能な崩壊モードが多いことに注意して, 分岐比を求め, 実験値と比較せよ.
- (d) 式 (9.35) によると, 崩壊率は質量の 5 乗に比例する. ボトムクォークはチャームクォークのほぼ 4 倍の質量がある. なぜ, D 中間子は B 中間子より 1000 倍寿命が長くないのだろうか. 実際は, これらの寿命は同じぐらいである. しかし, これは偶然のようなものである. この理由を説明せよ.
- 9.31 トップクォークの寿命を計算せよ. ただし, $m_t \geq m_b + m_W$ であり, トップクォークは実 W ($t \rightarrow b + W^+$) に崩壊できる. 一方, 他のすべてのクォークは仮想 W を経由しなければならない. その結果として, この寿命は非常に短く, 束縛状態 (「トウルス」のある中間子やバリオン) を形成しない. b クォークを (t クォークや W と比較して) 質量がないものとして計算せよ. [答え: 4×10^{-25} 秒]

- 9.32 革命的な新しい弱い相互作用の [あなたの名前] 理論は, W がスピン 0 (1 ではない) で, 結合は, ベクトル・軸ベクトルの代わりに, スカラー・擬似スカラーである. 具体的には, W の伝播関数は

$$\frac{-i}{q^2 - (M_W c)^2} \approx \frac{i}{(M_W c)^2}$$

(式 (9.4) の置き換え), そしてバーテックス因子は

$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}(1 - \gamma^5)$$

(式 (9.5) の置き換え) である. この理論で「逆ミュー粒子崩壊」($\nu_\mu + e \rightarrow \mu + \nu_e$) を考える.

- (a) ファインマン図を描いて, 振幅 \mathcal{M} を求めよ.
- (b) スピン平均化した振幅 $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ を求めよ.
- (c) 重心系での微分散乱断面積を電子のエネルギー E と散乱角 θ を用いて求めよ. このとき, $E \gg m_\mu c^2 \gg m_e c^2$ と仮定して, ミュー粒子と電子の質量を安全に無視してよい (もちろんニュートリノの質量も).
- (d) 同様な条件のもと, 全断面積を計算せよ.
- (e) この過程の通常の場合の予測と比較することによって, 実験者が理論を最もよく確認できる (そして標準模型を破壊できる) 方法を説明せよ. [注意: あなたの新しい理論の弱結合定数 (g_w) が標準模型と同じ値である理由はないので, この数に依存するテストにはあまり説得力がない.]
- 9.33 ユニタリー行列の行 (および列) は正規直交である. これを利用すると, 行列要素の値が高精度で測定されつつあるので, CKM 模型の多数のテストが可能になる. たとえば, 第 1 列と第 3 列の直交性は (式 (9.86)),

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0$$

もしくは (真ん中の項で全体を割ると)

$$1 + z_1 + z_2 = 0 \quad \text{ここで} \quad z_1 \equiv \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}, \quad z_2 \equiv \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}$$

複素平面上では, $1, z_1, z_2$ は, 「ユニタリー三角形」とよばれる閉じたループを形成する. CKM 行列要素の最新値を調べて, $1, z_1, z_2$ をプロットせよ. それらは実際に閉じた三角形を形成しているだろうか.

- 9.34 逆ミュー粒子崩壊 (例題 9.1) の ν_μ のエネルギーしきい値を求めよ. 標的の電子は静止しているとする. ミュー粒子をつくるだけなのに, なぜこの答えがとても巨大になるのだろうか.