3

相対論的運動学

本章では，相対論的運動学の基本原理，表記，そして用語についてのまとめを行う．ここで扱う題材は，6 章から 10 章を理解するために絶対に不可欠なものだ（しかし，4 章と 5 章には必要ないので，先に 4 章と 5 章を読んでもよい）．ここでの説明は，これだけで十分理解可能であるが，読者が特殊相対論にすでに触れたことがあると強く仮定している．もしまだ触れたことがなければ，先に進む前にいったん休止して，どんな初級者向けの物理の教科書でもよいので，適切な章を読むべきだ．もしすでに相対論に馴染み深いとしたら，この章はやさしいまとめにすぎないが，とりあえず読んでほしい．というのは，表記のいくつかについては真新しいものかもしれないので．

3.1 ローレンツ変換

特殊相対論によると [1]，一定速度で運動している系における物理法則は，静止系でのそれと同様に適用できる．これが意味しているのは，困ったことに（静止している系があったとしても）どの系が静止しているのか，誰もわからないということだ．つまり，他の系がどんな速度なのかを知る手だてがない．なので，たぶん，最初からやり直した方がよいのだ．

特殊相対論によると [1]，物理法則はいかなる慣性系でも同じように適用可能である．慣性系とは，ニュートンの第一法則（慣性の法則）が適用される系で，物体は何らかの力を与えられない限り等速直線運動をする[*1]．いかなる二つの慣性系も互いに対して等速度運動していること，そして，逆に，ある慣性系に対して等速度で動いているいかなる系も慣性系であることは，容易にわかる．

それでは，S' が S に対して一定速度 $\boldsymbol{v}$（その大きさ v）で動いている（ということは，S は S' に対して $-\boldsymbol{v}$ で動いている）二つの系 S と S' を想像してみよう．運動は，共通の座標系 x/x' 軸に沿っていて（図 3.1），それぞれの系の時刻については，

[*1] 均一な重力場の元で自由落下している系が「慣性」系なのかどうかを考えてしまうとしたら，あなたは，いま必要な知識よりも多くのことを知りすぎている．いまは重力は考えないことにしよう．

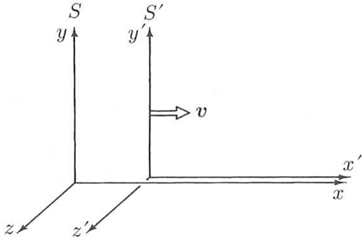

図 3.1　慣性系 S と S'

それぞれの座標原点二つが重なった瞬間をゼロとする（つまり，$x = x' = 0$ のとき，$t = t' = 0$）．そしていま，S における時刻 t，位置 (x, y, z) である事象が発生したとしよう．S' 系において，この同事象の時空座標 (x', y', z') と t' はどうなるだろうか．その答えはローレンツ変換によって与えられる．

$$\begin{array}{llll} \text{i.} & x' = \gamma(x - vt) & \text{ii.} & y' = y \\ \text{iii.} & z' = z & \text{iv.} & t' = \gamma\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right) \end{array} \tag{3.1}$$

ここで γ は

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.2}$$

である．S' から S に戻るための逆変換は，たんに v の符号を変えるだけである（問題 3.1）．

$$\begin{array}{llll} \text{i}'. & x = \gamma(x' + vt') & \text{ii}'. & y = y' \\ \text{iii}'. & z = z' & \text{iv}'. & t = \gamma\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right) \end{array} \tag{3.3}$$

ローレンツ変換にはすぐにわかるいくつもの重要な帰結があり，そのうち最も重要なものについて簡単に触れよう．

1. 同時の相対性：S において同時刻に別々の場所で二つの事象が発生すると，それらは S' では同時ではない．具体的には，もし $t_A = t_B$ だと

$$t'_A = t'_B + \frac{\gamma v}{c^2}(x_B - x_A) \tag{3.4}$$

   になる（問題 3.2）．一つの慣性系で同時の事象でも別の慣性系では同時ではない．

2. ローレンツ収縮：S' で x' 軸に沿って棒が静止して横たわっているとしよう．片方の端は座標原点で（$x' = 0$），もう一方の端は L' とする（なので，S' 系における

その棒の長さは L' である）．それを S 系で測るとどれくらいの長さだろうか．棒は S に対して動いているので，同時刻，たとえば $t=0$ で，棒の両端の位置を測るには慎重にならなければならない．その瞬間，左の端は $x=0$ で，右の端は式 (i) によると，$x=L'/\gamma$ である．ゆえに，その棒の S 系における長さは $L=L'/\gamma$ である．ここで，γ がいつも 1 以上であることに注意せよ．その事実から，動いている物体の長さは，静止している系での長さに比べて因子 γ だけ短くなる．ローレンツ収縮は動いている方向に沿ってのみ適用されることに注意しよう．垂直方向の長さは影響を受けない．

3. 時間の遅れ：S' 系の原点に位置する時計が時間間隔 T' で時を刻むことを考える．簡単のためにたとえば，$t'=0$ から $t'=T'$ まで動いたとしよう．この時間間隔を S で測るとどれくらいだろうか．その時計は $x'=0$ では，$t=0$ のときに動き始めて，$t'=T'$ で止まるので，（式 (iv$'$) によると）$t=\gamma T'$ となる．あきらかに，S 系での時間間隔 $T=\gamma T'$ は，同じ因子 γ だけ長くなっている．あるいは，裏返せば，動いている系に乗っている時計の進みが遅くなる．

　素粒子物理学と間接的にのみ関連するローレンツ収縮と違って，時間の遅れは実験室でよく起こっている．というのは，ある意味，あらゆる不安定粒子は内蔵の時計をもっているのだ．それがどういうものであれ，その粒子に時間切れを教える．そして，これら内部時計は，粒子が動いているときは実際にゆっくりと動く．つまり，動いている粒子は止まっているときよりも（因子 γ だけ）長生きする（表に載っている寿命は，もちろん，粒子が静止しているときのものだ）*2．実際，大気上層で生成された宇宙線ミュー粒子は，時間の遅れがなければ地表まで届かないだろう（問題 3.4）．

4. 速度の足し算：粒子が，S' に対して速度 u' で x 方向に動いているとしよう．S に対するその速度 u はどれだけだろうか．その粒子は，時間 $\Delta t=\gamma[\Delta t'+(v/c^2)\Delta x']$ で距離 $\Delta x=\gamma(\Delta x'+v\Delta t')$ だけ進むので，

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\Delta x'+v\Delta t'}{\Delta t'+(v/c^2)\Delta x'}=\frac{(\Delta x'/\Delta t')+v}{1+(v/c^2)(\Delta x'/\Delta t')}$$

となる．しかし，$\Delta x/\Delta t=u$，かつ $\Delta x'/\Delta t'=u'$ なので，

*2 実際のところ，個々の粒子の崩壊はランダムな過程だ．われわれが「寿命」というときは，本当は，それぞれの粒子種の寿命の平均のことをいっている．正しくは，粒子の寿命が長くなったというのは，動いている粒子集団の寿命の平均が長くなったということである．

$$u = \frac{u' + v}{1 + (u'v/c^2)} \tag{3.5}$$

になる．もし $u' = c$ なら，$u = c$ でもあることに注意せよ．光速はあらゆる慣性系で等しい．

ある特定の状況では，どの数にプライムが付くのか，速度にはどっちの符号を付けるのか，ときどき混乱が生じる．そこで，私は個人的には三つのルールを思い出す．動いている棒は（因子 γ だけ）短い．動いている時計は（因子 γ だけ）ゆっくりだ．なので，方程式の両辺のどちらかに，これらの結果が得られるように γ（γ が 1 より大きいことを思い出そう）を付ける．そして，

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + (v_{AB}v_{BC}/c^2)} \tag{3.6}$$

を得る．ここで（たとえば）v_{AB} は B に対する A の速度を意味する．上式の分子は古典論の結果だ（いわゆる「ガリレオの速度の加算則」）．分母は，アインシュタインの補正で，速度が c に近くない限り，非常に 1 に近い．

3.2　4 元ベクトル

ここで，利便性のためにいくつかの単純化した表記法を紹介しておく．時空に関する 4 元ベクトル x^μ，ただし $\mu = 0, 1, 2, 3$，を以下のように定義する．

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{3.7}$$

x^μ で表すと，ローレンツ変換がより対称的な形で見える．

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1'} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned} \tag{3.8}$$

ただし，

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \tag{3.9}$$

である．さらにコンパクトにすると，

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (\mu = 0,\, 1,\, 2,\, 3) \tag{3.10}$$

となる．ここでの係数 Λ^{μ}_{ν} は，以下の行列 Λ の行列要素と考えてもよい

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

(つまり，$\Lambda^0_0 = \Lambda^1_1 = \gamma$，$\Lambda^1_0 = \Lambda^0_1 = -\gamma\beta$，$\Lambda^2_2 = \Lambda^3_3 = 1$，そして，それ以外はすべて 0 である)．たくさんの Σ を書くのを避けるために，アインシュタインの「和の表記法」に従う．それによると，ギリシャ文字でくり返された指標（一つが上付きで，もう一つが下付きのもの）については，0 から 3 まで足し上げる．こうすると，式 (3.10) は，とうとう*3

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{3.12}$$

と表される．この整然とした表記法には，x 方向に沿っていないローレンツ変換についても同じ形式で書けるという長所がある．実際，S と S' の座標軸は，平行でなくても構わない．自然と Λ 行列は複雑になるが，それでも式 (3.12) はそのまま使える（一方で，式 (3.11) を使っても一般性を失うことはない．というのは，平行な座標軸をどのように選ぶかについてはつねに自由度があり，$\boldsymbol{v}$ の方向に沿って x 軸を取ることができる)．

ある事象において個々の座標が変化したとしても，式 (3.12) に従って S 系から S' 系に動くとき，ある特定の組み合わせは不変に保たれる（問題 3.8)．

$$I \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2 \tag{3.13}$$

そのような，どの慣性系でも同じ値をもつ物理量をローレンツ不変とよぶ（同様の意味合いで，物理量 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ は回転のもとで不変である)．さて，この不変量

*3 このような表現で，足し算に使われているギリシャ文字 ν は，もちろん，任意である．式の両辺で一致していなければならないが，「ぶら下がっている」指標 μ についても同じことがいえる．よって，式 (3.12) は，$x^{\kappa'} = \Lambda^{\kappa}_{\lambda} x^{\lambda}$ と書いてもよい．どちらの表現でも以下の四つの方程式を表している．

$$x^{0'} = \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1 + \Lambda^0_2 x^2 + \Lambda^0_3 x^3, \quad x^{1'} = \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1 + \Lambda^1_2 x^2 + \Lambda^1_3 x^3$$
$$x^{2'} = \Lambda^2_0 x^0 + \Lambda^2_1 x^1 + \Lambda^2_2 x^2 + \Lambda^2_3 x^3, \quad x^{3'} = \Lambda^3_0 x^0 + \Lambda^3_1 x^1 + \Lambda^3_2 x^2 + \Lambda^3_3 x^3$$

を $\sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x^\mu$ という和のかたちで書きたいが，運悪く厄介なことに三つのマイナスの符号がある．これらを消し去らないよう，計量 $g_{\mu\nu}$ を導入する．その成分は以下の行列 $\boldsymbol{g}$ で表される（すなわち，$g_{00} = 1$，$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ で，残りすべてはゼロである）*4．

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

$g_{\mu\nu}$ を使うと，ローレンツ不変な I は二重和として書ける．

$$I = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \tag{3.15}$$

さらに先に進んで，共変 4 元ベクトル x_μ（指標が下付き）を以下のように定義する

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu \tag{3.16}$$

（すなわち，$x_0 = x^0$ で，$x_1 = -x^1$，$x_2 = -x^2$，$x_3 = -x^3$）．違いを強調するために，「元の」4 元ベクトル x^μ（上付き）を反変 4 元ベクトルとよぶ．すると，ローレンツ不変量 I は最もすっきりとしたかたちで

$$I = x_\mu x^\mu \tag{3.17}$$

と書ける（あるいは，$x^\mu x_\mu$）．三つの面倒なマイナスの符号を残すためだけにしては，これらすべては間違いなく複雑怪奇でやりすぎな表記に見えるが，いったん慣れてしまうと実際には非常に単純だ（さらに，非デカルト座標系と，一般相対論で表れてくる曲がった空間をうまく一般化する．どちらも，いまここでは関係ないが）．

時空の位置を表す 4 元ベクトル x^μ は，すべての 4 元ベクトルの原型だ．一つの慣性系から別の慣性系に移るとき x^μ と同様の変換をする 4 元ベクトル a^μ を同じ係数 Λ^μ_ν を使って定義する．すなわち

$$a^{\mu'} = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \tag{3.18}$$

*4 ここで注意しなければならないのは，その計量を逆の符号 $(-1, 1, 1, 1)$ で定義する物理学者もいることだ．もし I がローレンツ不変なら $-I$ もローレンツ不変なので大きな問題ではないのだが，慣れていない符号には目を光らせなければならない．幸運なことに，今日ではほとんどの物理学者が式 (3.14) の表記を使っている．

である．そのような（反変）4元ベクトルそれぞれに対して，たんに空間成分の符号をひっくり返して得られる共変4元ベクトルを関係づける．より形式的に書くと

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu \tag{3.19}$$

となる．もちろん，符号を逆にすることで共変から反変に戻れる．

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \tag{3.20}$$

ここで，$g^{\mu\nu}$ は，詳しくいうと行列 $\boldsymbol{g}^{-1}$ の成分である（しかし，われわれの計量は逆行列と同じなので，$g^{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}$ は同じである）．二つのいかなる4元ベクトル a^μ と b^μ が与えられても，物理量

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \tag{3.21}$$

は，ローレンツ不変になる（いかなる慣性系でも同じ数になる）．これを今後，a と b とのスカラー積とよぶことにする．これは，二つの3元ベクトルの内積の4元ベクトル版のようなものである（4元ベクトルで外積に対応するものはない）*5．

もし指標を書くのに疲れてしまうなら，ドットによる表記法を使うのでも構わない．

$$a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu \tag{3.22}$$

しかし，これだと，4元のスカラー量と，二つの3元ベクトルの普通の内積とを区別する必要に迫られるだろう．最良の方法は，すべての3元ベクトルの上には綿密に注意深く矢印をつけていくことだ（たぶん速度 $\boldsymbol{v}$ を除いて，というのは，速度は4元ベクトルの一部になっていないので，不定性の対象にならない）．この教科書では，3元ベクトルに対しては太字を使う．すなわち

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \tag{3.23}$$

a^μ 自身のスカラー積に対しても a^2 という表記を使う*6．

---

*5 一番近いのは $a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu$ だが，これは4元ベクトルではなく2階のテンソルになってしまう（この先を参照）．

*6 一見，これは危険な不定性をもった表記だ．というのも，a^2 は a^μ の2番目の空間成分にもなり得るからだ．しかし実際のところ，個々の成分について取り扱うことはめったにないので，これで問題は起きない（もし本当に成分についていうときは，明示的にそのようにいった方がよい）．もっと深刻なのは，a^2 と a^μ の3元ベクトル部分の大きさの2乗との間の混乱だ．起こり得るあらゆる誤解を避けるために，個人的には $\boldsymbol{a}^2 \equiv \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ のように後者には太字を使う．しかしながら，これは標準的な表記法ではなく，もし別のやり方を好むならそれでよい．だが，a^2 と $\boldsymbol{a}^2$ を区別する明確な方法を早く見つけることを強くすすめる．さもないと，大きなトラブルに見舞われるだろう．

$$a^2 \equiv a \cdot a = (a^0)^2 - \boldsymbol{a}^2 \tag{3.24}$$

しかし，a^2 が必ずしも正ではないことには注意が必要だ．実際，あらゆる 4 元ベクトルを a^2 の符号によって分類することができる．

$$\begin{aligned}
&\text{もし}\ a^2 > 0\ \text{だと，} && a^\mu\ \text{は時間的とよばれる} \\
&\text{もし}\ a^2 < 0\ \text{だと，} && a^\mu\ \text{は空間的とよばれる} \\
&\text{もし}\ a^2 = 0\ \text{だと，} && a^\mu\ \text{は光子的とよばれる}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

ベクトルからテンソルへは一足飛びに行ける．二つの指標をもつ 2 階のテンソル $s^{\mu\nu}$ は，$4^2 = 16$ 個の成分をもち，Λ の因子二つで以下のように変換し，

$$s^{\mu\nu\prime} = \Lambda^\mu_\kappa \Lambda^\nu_\sigma s^{\kappa\sigma} \tag{3.26}$$

3 階のテンソルである $t^{\mu\nu\lambda}$ は，$4^3 = 64$ 個の成分をもち，Λ の因子三つで変換し，

$$t^{\mu\nu\lambda\prime} = \Lambda^\mu_\kappa \Lambda^\nu_\sigma \Lambda^\lambda_\tau t^{\kappa\sigma\tau} \tag{3.27}$$

などと続く．この階層性においては，ベクトルは 1 階のテンソルで，（不変）スカラーは 0 階のテンソルとなる．共変で「混じり合った」テンソルを，添字を下げることでつくれる（それぞれの空間に対応する添字にマイナスを付けるという代償を払って）．たとえば，

$$s^\mu_\nu = g_{\nu\lambda} s^{\mu\lambda}; \quad s_{\mu\nu} = g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} s^{\kappa\lambda} \tag{3.28}$$

などである．二つのテンソルの積自身もテンソルであることに注意せよ．$(a^\mu b^\nu)$ は 2 階のテンソルで，$(a^\mu t^{\nu\lambda\sigma})$ は 4 階のテンソルなどとなる．最後に，上付きと下付きの添字を足し上げることで，いかなる $n+2$ 階のテンソルからでも「縮約した」n 階のテンソルを得ることができる．よって，s^μ_μ はスカラーで，$t^{\mu\nu}_\nu$ はベクトルで，$a_\mu t^{\mu\nu\lambda}$ は 2 階のテンソルとなる．

3.3　エネルギーと運動量

あなたが高速道路をドライブしているとしよう．そして，議論のため，仮に光速に近い速さで走っているとしよう．すると，二つの別々の「時間」に注目したくなるかもしれない．もしサンフランシスコでの約束に間に合うかどうか心配しているとした

ら，道路脇に表示されている，それ自身が運動をしていない時計を見るべきだ．しかし，もし何か食べるための休憩時間をいつにするべきか気にしているなら，あなたの手首にある腕時計を見るのが適切だ．相対論によると，運動している時計（いまの場合，あなたの腕時計）が（地面に「じっとしている」時計に比べて相対的に）ゆっくりと動くのと同様，あなたの心拍，代謝，演説，思考など，あらゆるものがゆっくりと動く．具体的には，「地上の」時間が無限小時間 dt だけ進む間に，あなた自身の（固有の）時間はより少ない量 $d\tau$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \tag{3.29}$$

だけ進む．通常の速度ではもちろん γ があまりにも 1 に近いので，dt と $d\tau$ は，基本的に等しい．しかし，素粒子物理学では，実験室系での時間（壁にかかっている時計が示す時間）と粒子固有の時間（粒子の腕時計に表示される時間）との違いは決定的に重要だ．式 (3.29) を使うことで，一つの系から別の系に移ることはつねに可能だが，実際的には，つねに固有時間を使うのが最も便利だ．なぜなら，τ はローレンツ不変，つまり，あらゆる観測者が粒子の時計を読み取ることができ，複数の時計がばらばらの時を刻んでいるとしても，いかなる瞬間どの観測者から見てもその時計の表示は一致している．

われわれが粒子の（実験室に対する）「速度」について語るとき，それはもちろん（実験室系で測定した）飛行距離を（実験室系で測定した）飛行時間で割ったものである．

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \tag{3.30}$$

しかし，上でいま説明した観点から，（再び実験室系で測定した）飛行距離を固有時間で割った，固有速度 η を導入するのが便利だ*7.

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} \tag{3.31}$$

式 (3.29) によると，その二つの速度は因子 γ によって関係づけられる．

*7 距離が実験室系で測定されている一方で，時間が粒子系で測定されているという点において，固有速度はごちゃまぜな物理量だ．そういう意味で，形容詞として「固有の」という言葉を付けることに反対し，この言葉は，あらゆる物理量が粒子系において測定されたときに使われるべきだと主張する人々もいる．もちろん，粒子自身の系では，粒子はまったく動かない．その速度もゼロだ．もしここで使った用語がうっとうしいなら，η を「4 元速度」とよぼう．固有速度は計算するのがより楽な物理量だが，通常の速度も観測者が飛行している粒子を見ているという観点からはより自然な物理量だということを付け加えざるを得ない．

$$\boldsymbol{\eta} = \gamma \boldsymbol{v} \tag{3.32}$$

しかし，$\boldsymbol{\eta}$ を扱う方がはるかにやさしい．というのは，もし実験室系 S から動いている系 S' に移りたければ，式 (3.30) の分子と分母の両方をローレンツ変換しなければならない．つまり，扱いにくい式 (3.5) の速度の加算則にたどり着く．その一方で，すでに見たように，$d\tau$ はローレンツ不変なので，式 (3.31) では分子だけをローレンツ変換すればよい．事実，固有速度は 4 元ベクトル

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{3.33}$$

の一部で，その第 0 成分は

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{(1/\gamma)dt} = \gamma c \tag{3.34}$$

である．よって，

$$\eta^\mu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) \tag{3.35}$$

となる．ちなみに，$\eta_\mu \eta^\mu$ はローレンツ不変になるべきで，

$$\eta_\mu \eta^\mu = \gamma^2(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2 \tag{3.36}$$

となっている．これらは，これ以上にローレンツ不変になることはできない！

古典的には，運動量は質量と速度の積だ．この関係を相対論でも引き継ぎたいが，疑問が生じる．通常の速度と固有速度のどちらの速度を使うべきなのだろうか．古典的な考え方ではヒントをつかむことはできない．なぜなら，非相対論的な極限ではその二つは等しいからだ．ある意味，たんなる定義の問題ではある．しかし，通常の速度は悪い選択である一方で，固有速度が良い選択になる，微妙だが説得力のある理由がある．ポイントは以下だ．もし運動量を $m\boldsymbol{v}$ と定義してしまうと，運動量保存則が相対性原理と矛盾してしまう（ある一つの慣性系で保存すると，別の系では保存しなくなる）．しかし，運動量を $m\boldsymbol{\eta}$ と定義すると，運動量保存則が相対性原理と矛盾しなくなる（もし一つの慣性系で運動量が保存すると，他のあらゆる慣性系で自動的に保存する）．この証明は問題 3.12 として読者にやってもらおう．ただし，これが運動量の保存を保証しているわけではないことに注意せよ．保存しているかどうかは，実験によって決めるべき問題だ．しかし，運動量保存を相対論的領域に拡張することを望むなら，運動量は $m\boldsymbol{v}$ ではなく，$m\boldsymbol{\eta}$ と定義するのが完全に望ましいといえる．

トリッキーな議論なので，もしついてこられなかったなら，前の段落をもう一度読んでみることをすすめる．結論としては，相対論では運動量は質量と固有速度の積で定義されるということだ．

$$\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{\eta} \tag{3.37}$$

固有速度は4元ベクトルの一部なので，運動量も4元ベクトルとなる．

$$p^\mu = m\eta^\mu \tag{3.38}$$

p^μ の空間成分が（相対論的な）3元運動量ベクトルになる．

$$\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.39}$$

その一方で，「時間的な」成分は

$$p^0 = \gamma mc \tag{3.40}$$

となる．この後すぐにあきらかになるが，相対論的なエネルギー E を

$$E \equiv \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.41}$$

と定義する．すると，p^μ の第0成分は E/c になる．よって，エネルギーと運動量が一緒になり一つの4元ベクトル，つまりエネルギー運動量4元ベクトル（あるいは，4元運動量）を構成する．

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) \tag{3.42}$$

ちなみに，式 (3.36) と (3.38) から

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}^2 = m^2c^2 \tag{3.43}$$

もまたローレンツ不変になっている．

相対論的な運動量（式 (3.37)）は，非相対論的な領域（$v \ll c$）では，古典論での表式と一致する．しかし，同じことが相対論的エネルギーにもいえるわけではない（式 (3.41)）．この物理量がなぜ「エネルギー」とよばれるのか理解するために，その式をテイラー展開してみる．

$$E = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \cdots \tag{3.44}$$

第2項が古典論での運動エネルギーに対応する一方，第1項（mc^2）が定数であることに注意せよ．そうすると，古典力学ではエネルギーの変化だけが物理的な意味をもち，おとがめなしに定数を加えてもよいことを思い出すかもしれない．この意味においては，相対論的な定式も $v \ll c$ の極限である古典論に一致する．そこでは，展開された式の高次の項は無視できる．$v=0$ でも残る定数項は静止エネルギーとよばれる．

$$R \equiv mc^2 \tag{3.45}$$

そして，粒子の運動によるものと解釈できる残りのエネルギーが相対論的な運動エネルギーである[*8]．

$$T \equiv mc^2(\gamma-1) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \cdots \tag{3.46}$$

古典力学では，質量のない粒子は存在しない．もし存在すると，運動量（$m\boldsymbol{v}$）がゼロで，運動エネルギー（$(1/2)mv^2$）がゼロ，そして，$F=ma$ なので力も受けない．よって（ニュートンの第三法則によって）他のいかなる物にも力を与えない．それはまさに力学上の幽霊だ．一瞬同じことが相対論でもいえると思うかもしれないが，注意深く以下の式

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{3.47}$$

を眺めると，抜け道があるのに気づく．$m=0$ のとき分子はゼロだ．しかし，$v=c$ だと分母も消えて，これらの式は不定（0/0）になる．なので，粒子がつねに光速で飛行しているならば，$m=0$ が許されることになる．この場合，式 (3.47) は E と $\boldsymbol{p}$ を定義する役目を失うが，式 (3.43) はそれでも成立する．

$$v=c, \quad E=|\boldsymbol{p}|c \quad \text{（質量のない粒子に対して）} \tag{3.48}$$

個人的にはこの「議論」は冗談だと思う．だが，質量のない粒子（光子）が自然界に存在していることがもし知られていなかったら，光子は光速で飛ぶし，そのエネルギーと運動量は式 (3.48) で関係づけられる．なので，その抜け道を真剣に受けとめなければならない．もし，式 (3.47) が $\boldsymbol{p}$ と E を定義しないのなら，質量のない粒子の運動量と

[*8]「相対論的質量」について，ずっと言及してこなかったことに注意してほしい．それは有用な働きのない余分な物理量だ．もし，それに出くわしたとしたら，その定義は $m_{\mathrm{rel}} \equiv \gamma m$ である．だがこれは，まったくもって不要だ．というのは，E と係数 c^2 しか違わないからだ．m_{rel} についていわれていることは，E についていってるにすぎない．たとえば「相対論的質量の保存」は，係数 c^2 が割られてなくなっているだけでエネルギー保存と何ら変わりない．

エネルギーは何が決めるのか，と尋ねたくなるかもしれない．質量でもなく（仮定によりそれはゼロだ），スピードでもない（つねに c だ）．では，2 eV と 3 eV の光子では何が違うのか．相対論は答えを提供しないが，興味深いことに量子力学がプランクの式

$$E = h\nu \tag{3.49}$$

から答えを与えられる．振動数がエネルギーと運動量を決めるのだ．2 eV の光子は赤で，3 eV は紫だ！

3.4 衝 突

これまでのところ，相対論的エネルギーと運動量は定義以外の何物でもなく，物理はこれらの物理量が保存しているという経験則のもとで成立している．相対論では，古典力学同様，最もすっきりとした保存則の応用は衝突に対してである．まずは，対象物 A が B に当たり（エアホッケーのテーブルの上のパックを想像するとよい）C と D を生成するという古典的な描像を想像してみよう（図 3.2）．もちろん C と D は A と B と同じものでもよいし，塗料（でも何でもよい）が A から剥がれ落ちて B にくっつき，結果として終状態の質量は初期状態と違ってもよい（しかし，ドラマの登場人物は A, B, C そして D だけだという強い仮定がある．もし何らかの残骸 W がその現場に残っていると，より複雑な過程 $A + B \to C + D + W$ について議論していることになってしまう）．衝突とは，非常に短時間に起こるという特徴をもち，重力や飛跡に沿った摩擦力などの外力の影響はないものとする．古典力学的には，そのような過程において質量と運動量はつねに保存するが，運動エネルギーは保存したりしなかったりする．

3.4.1 古典的衝突

1. 質量は保存する．$m_A + m_B = m_C + m_D$

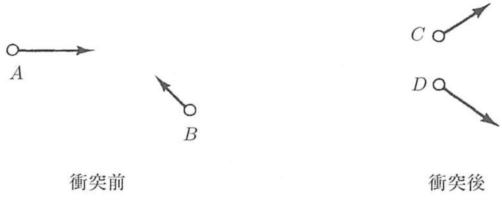

図 3.2 $A + B \to C + D$ という衝突

2. 運動量は保存する．$\boldsymbol{p}_A + \boldsymbol{p}_B = \boldsymbol{p}_C + \boldsymbol{p}_D$
3. 運動エネルギーは保存するかもしれないし，保存しないかもしれない．

衝突を，運動エネルギーが減少する「粘性」(典型的には運動エネルギーが熱に変換される）タイプ，運動エネルギーが増加する「爆発」(たとえば，A は車のフロントバンパーに押し縮められたばねをもっていて，衝突によって留め具が外された結果，スプリングに蓄えられていたエネルギーが運動エネルギーに変換されるのを想像しよう）タイプ，そして運動エネルギーが保存する「弾性」タイプ，という三つに分類しようと思う．

(a) 粘性（運動エネルギーは減少）：$T_A + T_B > T_C + T_D$
(b) 爆発（運動エネルギーは増加）：$T_A + T_B < T_C + T_D$
(c) 弾性（運動エネルギーは保存）：$T_A + T_B = T_C + T_D$

(a) の極端な場合，二つの粒子がくっついて $A + B \to C$ のように，終状態では本当に一つの物体になってしまう．(b) の極端な場合，一つの物体が $A \to C + D$ と二つに分裂する（素粒子物理学の言葉では，A が $C + D$ に崩壊する）．

3.4.2　相対論的衝突

相対論的な衝突においては，エネルギーと運動量はつねに保存する．いい換えると，エネルギー運動量 4 元ベクトルのすべての成分が保存する．古典的な場合と同様に，運動エネルギーは保存するかもしれないし，保存しないかもしれない．

1. エネルギーは保存する：$E_A + E_B = E_C + E_D$
2. 運動量は保存する：$\boldsymbol{p}_A + \boldsymbol{p}_B = \boldsymbol{p}_C + \boldsymbol{p}_D$
3. 運動エネルギーは保存するかもしれないし，保存しないかもしれない．

(最初の二つはまとめて一つに書ける：$p^\mu_A + p^\mu_B = p^\mu_C + p^\mu_D$)

そしてまた，運動エネルギーが減少するか，増加するか，同じかによって，衝突を粘性，爆発，弾性に分類できる．全エネルギー（＝静止エネルギー＋運動エネルギー）はつねに保存することから，静止エネルギーは（よって質量も)，粘性衝突では増加し，爆発衝突では減少し，弾性衝突では変わらない．

(a) 粘性（運動エネルギーは減少）：静止エネルギーと質量が増加
(b) 爆発（運動エネルギーは増加）：静止エネルギーと質量が減少

(c) 弾性（運動エネルギーは保存）：静止エネルギーと質量は保存

弾性散乱以外では，質量は保存しないことに注意せよ[*9]．たとえば，$\pi^0 \to \gamma + \gamma$ 崩壊では，初期状態の質量は $135\,\mathrm{MeV}/c^2$ だが，終状態の質量はゼロだ．ここでは，静止エネルギーが運動エネルギーに変換されたのだ（大衆紙の不見識な言葉では「質量がエネルギーに変換された」となり，次元の整合性への無頓着さが多くの人を腹立たせる）．逆もまた真で，質量が保存しているならその衝突は弾性だ．素粒子物理学でこれが起こるのは，たとえば，電子–陽子散乱（$e + p \to e + p$）のように，同じ粒子が入って同じ粒子が出てくる場合に限られる[*10]．

古典論的解析と相対論的解析の間には構造的な類似はあるものの，非弾性散乱の解釈には際立った違いがある．古典論の場合，エネルギーは保存し，運動エネルギーから何らかの「内部的」なもの（熱エネルギーやばねのエネルギーなど）に変換するというし，その逆もまた真である．相対論的解析の場合は，エネルギーは運動エネルギーから静止エネルギーに変わった，あるいは，その逆だという．これらは，どうしたら論理的に無矛盾なのだろうか．結局のところ，相対論的力学は，$v \ll c$ の極限では古典力学になるはずである．つまり，「内部的」なかたちを取るエネルギーのすべては，物体の静止エネルギーに反映される，というのが答えだ．熱い芋は冷たい芋よりも重く，縮んだばねは伸びたばねよりも重いのだ．巨視的なスケールでは，静止エネルギーは内部エネルギーに比べて圧倒的に大きいので，これらの質量差は日常生活では完全に無視されるし，原子レベルでもきわめて小さい．原子核そして素粒子物理の世界だけは，典型的な内部エネルギーが典型的な静止エネルギーと同じくらいの大きさになる．それでも，原理的には，重さを測るときはいつでも，物体を構成しているものの静止エネルギー（質量）だけでなく，それらの運動エネルギーと相互作用によるエネルギーすべてを測っているのだ．

3.5 応用例

相対論的運動学の問題を解くことは，科学であると同時に芸術だ．そこに含まれている物理は必要最低限で，エネルギー保存と運動量保存だけなのだが，代数はなかな

[*9] 昔の用語では，相対論的質量は保存し，静止質量は保存しないといった．

[*10] 原理的には，もし2組の粒子の質量和が等しければ（A，B と C，D），反応 $A + B \to C + D$ を「弾性」だと考えてよいはずだが，実際には，そのような偶然の一致はないので，素粒子物理学者は，入って来たのと同じ粒子が出て行くときに「弾性」という言葉を使う．

か手強い．与えられた問題を解くのに2行で済むか，7ページかかってしまうかは，問題を解くための道具立てやトリックに対してどれだけ腕前があって慣れているかに大きく依存する．ここで，いくつかの例題に取り組むことを提案し，その取り組みの過程で，読者にも有用な手間を省くための工夫を紹介していく [2].

例題 3.1　それぞれ質量 m をもった二つの粘土の塊が速さ $(3/5)c$ で正面衝突し（図3.3），くっついて一塊になる．最終的に形成された塊の質量 M はどれくらいか．

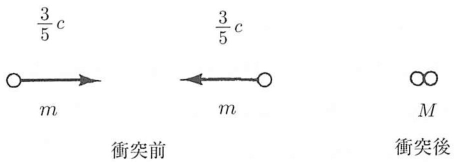

図 3.3　質量の等しい粒子の粘性散乱

答え：エネルギー保存から $E_1 + E_2 = E_M$ が成立する．また，運動量保存から $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_M$ が成立する．この場合，運動量保存はあきらかで $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$ となるので，終状態の塊は静止している（初めからこれはあきらかであった）．初期状態のエネルギーは等しいので，エネルギー保存により下式が成り立つ．

$$Mc^2 = 2E_m = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-(3/5)^2}} = \frac{5}{4}(2mc^2)$$

結論：$M = (5/2)m$ である．これは初期状態の質量和よりも大きいことに注意せよ．粘性散乱においては，運動エネルギーが静止エネルギーに変換されるので，質量は増加する．

例題 3.2　静止している質量 M の粒子が，それぞれ質量 m の二つの粒子に崩壊する（図 3.4）．崩壊してできた粒子はどれだけの速さで離れていくか．

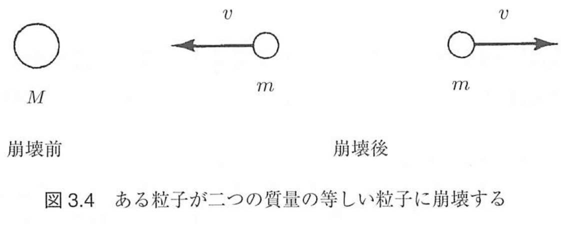

図 3.4　ある粒子が二つの質量の等しい粒子に崩壊する

答え：これはもちろん例題 3.1 の逆の過程だ．運動量保存により，二つの塊が同じ速さで反対向きに飛ぶことがわかる．エネルギー保存により

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \text{よって} \quad v = c\sqrt{1-(2m/M)^2}$$

が要求される．この答えは，M が $2m$ を超えないと無意味だ．最低でも，終状態の静止エネルギーを補うだけの静止エネルギーが初期状態になければならない（余分はどれだけでもよい．それは運動エネルギーとして使われるので）．$M = 2m$ が $M \to 2m$ という過程のしきい値である，という．たとえば，重水素は陽子と中性子に崩壊するためのしきい値以下である（$m_d = 1875.6\,\mathrm{MeV}/c^2$ で，$m_p + m_n = 1877.9\,\mathrm{MeV}/c^2$）．それゆえ安定なのだ．初期状態と終状態のエネルギー差に相当するエネルギーを系に注入して初めて重水素を引き裂くことが可能になる（もし p と n の束縛状態がそれぞれの和よりも軽いのが気にかかるなら，すべての内部エネルギーと同様に，静止質量に反映されているはずの重水素の束縛エネルギーが負であることに注意しよう．実際，あらゆる束縛状態の束縛エネルギーは負でなければならない．もし複合粒子が構成粒子の質量和よりも重ければ，すぐに崩壊してしまう）．

例題 3.3　静止しているパイ中間子がミュー粒子とニュートリノに崩壊する（図 3.5）．ミュー粒子の速さはどれくらいか．

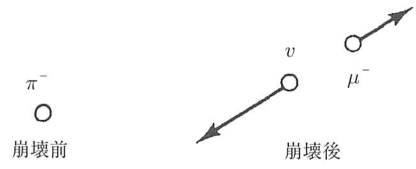

図 3.5　荷電パイ中間子の崩壊

答え：エネルギー保存が $E_\pi = E_\mu + E_\nu$ を要求する．運動量保存から $\boldsymbol{p}_\pi = \boldsymbol{p}_\mu + \boldsymbol{p}_\nu$ だが，$\boldsymbol{p}_\pi = 0$ なので，$\boldsymbol{p}_\mu = -\boldsymbol{p}_\nu$ になる．よって，ミュー粒子とニュートリノは反対向きに同じ大きさの運動量をもって飛ぶことになる．先に進むには，粒子のエネルギーを運動量に関係づける式が必要になる．式 (3.43) がこれにあたる[*11]．

[*11] 式 (3.39) を速度について解き，その結果を式 (3.41) に入れようと思うかもしれないが，それは非常にまずいやり方だ．一般的に，相対論的取り扱いでは速度は扱いづらい変数である．式 (3.43) を使えば，E と $\boldsymbol{p}$ の間を直接行ったり来たりできる．

提案 1　運動量がわかっているときに粒子のエネルギーを求めるには (あるいはその逆),

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2 c^2 = m^2 c^4 \tag{3.50}$$

というローレンツ不変な関係を使う.

いまの問題では,

$$E_\pi = m_\pi c^2$$
$$E_\mu = c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + \boldsymbol{p}_\mu^2}$$
$$E_\nu = |\boldsymbol{p}_\nu| c = |\boldsymbol{p}_\mu| c$$

となる. これらをエネルギー保存の式に代入すると,

$$m_\pi c^2 = c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + \boldsymbol{p}_\mu^2} + |\boldsymbol{p}_\mu| c$$

つまり

$$(m_\pi c - |\boldsymbol{p}_\mu|)^2 = m_\mu^2 c^2 + \boldsymbol{p}_\mu^2$$

を得る. これを $|\boldsymbol{p}_\mu|$ について解くと,

$$|\boldsymbol{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c$$

となる. 一方で, ミュー粒子のエネルギーは (式 (3.50) から)

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2$$

である.

いったん, 粒子のエネルギーと運動量がわかってしまえば, その速度を求めるのはやさしい. もし $E = \gamma m c^2$, かつ $\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$ ならば, 後者を前者で割ると

$$\boldsymbol{p}/E = \boldsymbol{v}/c^2$$

を得る.

提案 2　もし粒子のエネルギーと運動量がわかっていて速度を求めたいなら, 以下の式を使う.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} c^2 / E \tag{3.51}$$

よって，われわれの問題の答えは

$$v_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c$$

となる．実際に質量の値を入れてみると，$v_\mu = 0.271c$ を得る．

この計算におかしなところは一つもない．保存則を脇道にそれず系統立てて利用している．しかし，ここで4元ベクトルを使うと，ミュー粒子のエネルギーと運動量をずっと素早く求めることができるということを示したい（4元ベクトルの上付きの添字に μ を使うべきだが，粒子としての μ と時空間の添字である μ とを混同してほしくないので，ここでは，そして，この先でもしばしば，時空間の添字は省略し，スカラー積についてはドットを使う）．エネルギーと運動量の保存は

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu \quad \text{あるいは} \quad p_\nu = p_\pi - p_\mu$$

を要求する．両辺それぞれで，自身とのスカラー積を取ると，

$$p_\nu^2 = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2p_\pi \cdot p_\mu$$

を得る．しかし，

$$p_\nu^2 = 0; \quad p_\pi^2 = m_\pi^2 c^2, \quad p_\mu^2 = m_\mu^2 c^2 \quad \text{そして} \quad p_\pi \cdot p_\mu = \frac{E_\pi}{c}\frac{E_\mu}{c} = m_\pi E_\mu$$

なので

$$0 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu$$

となり，E_μ はすぐにわかる．

同様に，

$$p_\mu = p_\pi - p_\nu$$

の両辺を2乗すると

$$m_\mu^2 c^2 = m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi E_\nu$$

を得る．しかし，$E_\nu = |\boldsymbol{p}_\nu| c = |\boldsymbol{p}_\mu| c$ なので，

$$2m_\pi |\boldsymbol{p}_\mu| = (m_\pi^2 - m_\mu^2)c$$

であり，それにより $|\boldsymbol{p}_\mu|$ がわかる．いまの場合，問題が単純だったので4元ベクトル

を使うことで省略できた仕事量はわずかであったが，より複雑な問題に対してはその恩恵は莫大になり得る．

提案 3　4 元ベクトルを使い，ローレンツ不変な内積を利用せよ．いかなる（実）粒子に対しても $p^2 = m^2c^2$（式 (3.43)）が成立することを思い出そう．

この種の問題に取り組むときにローレンツ不変量を使うことがそんなにも強力である理由の一つは，適用したいどんな慣性系でもその関係を使ってよい点だ．実験室系が最も単純な系ではないことはよくある．たとえば，典型的な散乱実験では，ビームは動かない標的に打ち込まれる．興味をひく反応は，たとえば，$p + p \to$ 何か，というものかもしれない．しかし，実験室系では物事が非対称となる．というのは，一つの陽子は動いていて，もう一方は止まっているからだ．二つの陽子がそれぞれ同じ速さで近づいてくる系で見た方が，運動学的にはずっと単純になる．このような系では（3 元ベクトルの）運動量の総和がゼロになるので，この系のことを重心（CM）系とよぶ．

例題 3.4　カリフォルニア大学バークレー校のベバトロンは，$p + p \to p + p + p + \bar{p}$ 反応によって反陽子をつくろうというアイデアで建設された．つまり，高エネルギーの陽子を静止している陽子にぶつけて（元々存在していた粒子に加えて）陽子反陽子対をつくろうというものだ．この反応が起こるためのエネルギーのしきい値（入射陽子の最小エネルギー）はどれだけか．

質問：この反応は実験室系では図 3.6(a) のように，重心系では図 3.6(b) のように見える．さて，しきい値の条件は何だろうか．

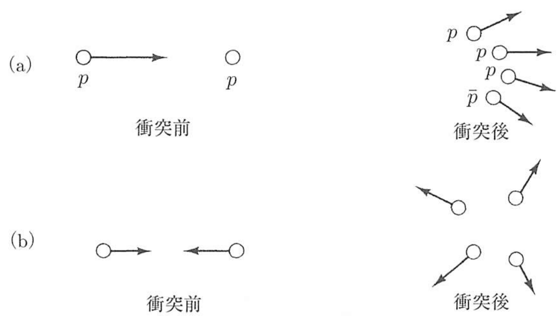

図 3.6　$p + p \to p + p + p + \bar{p}$ 反応．(a) 実験室系の場合，(b) 重心系の場合

答え：たんに，その二つの余分の粒子をつくるに足るエネルギーだ．実験室系では，この状況をどのように定式化すればよいのか理解するのは難しい．しかし重心系では簡単だ．運動エネルギーとして「無駄になる」エネルギーがないように，終状態の四つの粒子は静止していなければならない（もちろん，実験室系では，運動量保存により終状態に動きがなければならないので，この状況は達成し得ない）．

p^μ_{tot} を実験室でのエネルギー運動量 4 元ベクトルの総和だとしよう．これは保存するので，衝突前で評価しようが衝突後に評価しようが関係ない．衝突前だとすると，

$$p^\mu_{\mathrm{tot}} = \left(\frac{E + mc^2}{c}, |\boldsymbol{p}|, 0, 0\right)$$

となる．ただしここで，E と $\boldsymbol{p}$ は入射陽子のエネルギーと運動量で，m は陽子の質量である．さらに $p^\mu_{\mathrm{tot}}{}'$ を重心系におけるエネルギー運動量 4 元ベクトルの総和だとしよう．これも衝突前でも衝突後でも関係ない．今度は衝突後にする．（しきい値では）四つの粒子すべてが静止しているので，

$$p^\mu_{\mathrm{tot}}{}' = (4mc, 0, 0, 0)$$

となる．あきらかに $p^\mu_{\mathrm{tot}} \neq p^\mu_{\mathrm{tot}}{}'$ であるが，ローレンツ不変量である $p_{\mu\mathrm{tot}} p^\mu_{\mathrm{tot}}$ と $p'_{\mu\mathrm{tot}} p^\mu_{\mathrm{tot}}{}'$ は等しいので，

$$\left(\frac{E}{c} + mc\right)^2 - \boldsymbol{p}^2 = (4mc)^2$$

となる．標準的なローレンツ不変の関係（式 (3.50)）を使って $\boldsymbol{p}^2$ を消去し，E について解くと

$$E = 7mc^2$$

を得る．あきらかに，この反応を起こすためには，入射する陽子は，最低，静止エネルギーの 6 倍の運動エネルギーをもたなければならない（そして実際，反陽子が初めて発見されたのは，加速器のエネルギーが約 6000 MeV に達したときであった）．

たぶん，ここが保存量と不変量との違いを強調するよいタイミングだ．エネルギーは保存する（衝突後の値は衝突前と同じだ）．しかし，不変ではない．質量は不変だ（いかなる慣性系でも同じだ）．しかし，保存はしない．不変であり保存する物理量もあるが（たとえば電荷），多くはそうではない（たとえば速さ）．例題 3.4 で示したように，保存量と不変量をうまく利用することで，面倒な代数の多くをやらなくて済む．

また，いくつかの問題では重心系で解析する方がはるかにやさしいということを証明したが，一方で，実験室系の方がより単純なときもある．

提案 4　もし実験室系で問題が厄介だったら，重心系で考えてみよ．

二つの同一粒子の衝突よりも複雑なものを取り扱うときも，やはり，($\boldsymbol{p}_{\text{tot}} = 0$ である）重心系は有用な系だ．というのも，この系では運動量保存があきらかで，事象の前後で運動量ゼロだ．しかし，つねに重心系が存在するのか読者は疑問に思うかもしれない．いい換えると，質量 m_1，m_2，m_3，$\cdots$，と速度 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$，$\cdots$，をもつ無数の粒子があったとき，それらの (3 元ベクトル）運動量の総和がゼロになるような慣性系は必ず存在するのだろうか．答えはイエスだ．そのような系の速度を求め，その速度が c 未満であることにより，それを証明する．実験室系 (S) におけるエネルギーと運動量の総和は

$$E_{\text{tot}} = \sum_i \gamma_i m_i c^2, \qquad \boldsymbol{p}_{\text{tot}} = \sum_i \gamma m_i \boldsymbol{v}_i \tag{3.52}$$

である．p^{μ}_{tot} は 4 元ベクトルなので，速さ v で $\boldsymbol{p}_{\text{tot}}$ の方向に動いている系 S' での運動量を求めるために，ローレンツ変換を使うことができ，

$$|\boldsymbol{p}'_{\text{tot}}| = \gamma\left(\boldsymbol{p}_{\text{tot}} - \beta\frac{E_{\text{tot}}}{c}\right)$$

となる．とくに，v が

$$\frac{v}{c} = \frac{|\boldsymbol{p}_{\text{tot}}|c}{E_{\text{tot}}} = \frac{|\sum_i \gamma m_i \boldsymbol{v}_i|}{\sum_i \gamma m_i c}$$

となるように選ぶと，上記の運動量はゼロになる．さて，複数の 3 元ベクトルの和の大きさは，それぞれの大きさの和を越えることはできないので（この幾何学的にあきらかな事実は「三角不等式」として知られている），

$$\frac{v}{c} \leq \frac{\sum \gamma_i m_i (v_i/c)}{\sum \gamma_i m_i}$$

であり，$v_i < c$ なので，$v < c$ であることが確実である[*12]．よって，重心系はつねに存在し，その系の実験室系に対する相対速度は

[*12] 証明するための作戦として，粒子のうち少なくとも一つは質量をもつことを仮定している．もし粒子すべてに質量がないと，$v = c$ になってしまい，重心系が存在しない．たとえば，単独の光子に対しては重心系は存在しない．

図 3.7 実験の二つの配置. (a) 衝突型, (b) 固定標的

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{\boldsymbol{p}_{\mathrm{tot}} c^2}{E_{\mathrm{tot}}} \tag{3.53}$$

で与えられる.

$p\bar{p}$ 対を生成するには陽子の静止エネルギーの 6 倍の入射運動エネルギーが必要だという, 例題 3.4 の答えを振り返ると奇妙に感じるかもしれない. 結局のところ, 新たな静止エネルギーとして $2mc^2$ しか生成されていない. この例は, 静止標的での散乱の非効率を如実に示している. 運動量保存により, たくさんのエネルギーが終状態の運動エネルギーとして浪費されてしまうのだ. 動いている二つの陽子を互いにぶつけて, 実験室系を重心系にしてしまうことができたと考えてみよう. すると, それぞれの陽子には mc^2 の運動エネルギーがあれば十分で, 固定標的実験で必要なエネルギーの 1/6 で済む. これを実現するために, 1970 年代初頭に衝突型加速器 (コライダー) が開発された (図 3.7). 今日では, 高エネルギー物理用の新しい加速器のほぼすべてがコライダーである.

例題 3.5 それぞれ質量 m, 運動エネルギー T の二つの同種粒子が正面衝突する場合を考えよう. それらの相対論的な運動エネルギー T' (すなわち, 片方の粒子の静止系における, もう一方の粒子の運動エネルギー) はどれだけか.

答え: いろいろなやり方がある. 簡単なのは, 重心系と実験室系における 4 元ベクトルを書き下し,

$$p^{\mu}_{\mathrm{tot}} = \left(\frac{2E}{c}, \mathbf{0}\right), \qquad p^{\mu}_{\mathrm{tot}}{}' = \left(\frac{E' + mc^2}{c}, \boldsymbol{p}'\right)$$

$(p_{\mathrm{tot}})^2 = (p_{\mathrm{tot}}{}')^2$ と置くと

$$\left(\frac{2E}{c}\right)^2 = \left(\frac{E' + mc^2}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p}'^2$$

を得る. 式 (3.50) を使い $\boldsymbol{p}'$ を消去すると

$$2E^2 = mc^2(E' + mc^2)$$

となり, その答えを $T = E - mc^2$ と $T' = E' - mc^2$ で表すと

$$T' = 4T\left(1 + \frac{T}{2mc^2}\right) \tag{3.54}$$

を得る．古典的な解である $T' = 4T$ に，$T \ll mc^2$ の極限で一致する（古典的には，B の静止系では A は 2 倍の速度をもち，よって，重心系で見るよりも 4 倍多い運動エネルギーをもつ）．さて，係数 4 は確かに利益だが，（第 2 項から得る）相対論的な利益の方がはるかに大きい．実験室系での運動エネルギー 1 GeV の電子同士を衝突させると，相対論的な運動エネルギーは 4000 GeV にもなる！

参　考　書

[1] 特殊相対性理論には多くの優れた教科書がある．とくにすすめるのは，J. H. Smith: Introduction to Special Relativity (Dover, 1996). 魅力的な（しかし，非正統的な）アプローチであれば，(a) E. F. Taylor and J. A. Wheeler: Spacetime Physics, 2nd edn. (Freeman, 1992).

[2] もっと突き詰めるなら，標準的な参考文献は R. Hagedorn: Relativistic Kinematics (Benjamin, 1964).

問　題

3.1　式 (3.1) を x'，y'，z'，t' を用いて x，y，z，t について解け．それが式 (3.3) になっていることを確認せよ．

3.2　**(a)** 式 (3.4) を導出せよ．

(b) 地上の時計（系 S）によると，街灯 A と B（4 km 離れている）は，正確に午後 8 時に点灯した．光速の 3/5 の速さで A から B に向かって移動する列車（系 S'）から見ると，どちらが先に点灯するだろうか．また，どれくらい後（秒単位）で，もう片方のライトが点灯しただろうか．［注意：相対性理論では，観測者が実際に見たもの（列車のどこにいたかに依存する）ではなく，光が観測者に届くまでの時間を補正した後，S' が何を観察したかについて考える.］

3.3　**(a)** 体積はどのように変換されるだろうか（静止系 S' で体積が V' の箱を考えると，速度 v で移動している系 S から見るときの体積はどうなるだろうか）．

(b) 密度 ρ はどのように変換されるだろうか（静止系 S' で単位体積あたり ρ' 個の分子があるとき，系 S から見たら，単位体積あたり何個の分子があるだろうか）．

3.4　宇宙線のミュー粒子は大気の高い場所（たとえば，8000 m）で生成される．そして光速に非常に近い速度（たとえば，$0.998\,c$）で移動する．

(a) ミュー粒子の寿命が（2.2×10^{-6} 秒）与えられているとき，相対性理論を考慮しない場合，ミュー粒子は崩壊する前にどのくらいの距離を動けるだろうか．ミュー粒子は地表まで届くだろうか．

(b) 相対性理論を考慮した場合，前問はどうなるだろうか（時間の遅れのために，ミュー粒子は長く生き，遠くまで到達する）．

(c) パイ中間子も大気の高いところで生成される，順序としては，（宇宙からの）陽子と（大気中の）陽子の衝突 $\to p + p +$ パイオン となる．パイ中間子はこのときミュー粒子に崩壊する．$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$；$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$．しかし，パイ中間子の寿命は非常に短い（$2.6 \times 10^{-8}$

秒)．パイ中間子の速度を同じ（0.998 c）だと仮定した場合，地表に届くだろうか．

3.5　単一のビームエネルギーをもつミュー粒子の半分が最初の 600 m で崩壊する．どれくらいの速さだろうか．

3.6　無法者が $(3/4)c$ になる車で逃走し，警官は速度 $(1/2)c$ にしかならない追跡車から弾丸を発射した．弾丸の銃口速度（銃に対する速度）は $(1/3)c$ であるとすると，弾丸は目標に到達するだろうか．

(a) 相対性理論を考慮しない場合ではどうか．

(b) 相対性理論ではどうか．

3.7　式 (3.12) を反転する行列 M：$x^\mu = M^\mu_\nu x'^\nu$ を（式 (3.3) を用いて）求めよ．M は Λ の逆行列であり，$\Lambda M = 1$ となることを示せ．

3.8　（式 (3.13) の）量 I がローレンツ変換（式 (3.8)）のもとで不変であることを示せ．

3.9　与えられた二つの 4 元ベクトル $a^\mu = (3, 4, 1, 2)$ と $b^\mu = (5, 0, 3, 4)$ を用いて a_μ，b_μ，$\boldsymbol{a}^2$，$\boldsymbol{b}^2$，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$，$\mathrm{a}^2$，$b^2$，$a \cdot b$ を求めよ．また，a^μ と b^μ は時間的ベクトル，空間的ベクトル，もしくは光子的ベクトルのどれだろうか．

3.10　添字を交換しても同じ（$s^{\nu\mu} = s^{\mu\nu}$）であった場合，この 2 階のテンソルは対称という．交換すると符号が変わるもの（$a^{\nu\mu} = -a^{\mu\nu}$）を反対称という．

(a) 対称なテンソルにはいくつの独立した成分が存在するだろうか（$s^{12} = s^{21}$ なので，これらは一つの独立成分として数える）．

(b) 反対称テンソルにはいくつの独立した成分が存在するだろうか．

(c) 対称性はローレンツ変換のもとで保存されている．すなわち，$s^{\mu\nu}$ が対称ならば $s^{\mu\nu\prime}$ も対称であることを示せ．反対称の場合はどうだろうか．

(d) $s^{\mu\nu}$ が対称であれば $s_{\mu\nu}$ も対称であることを示せ．$a^{\mu\nu}$ が反対称の場合 $a_{\mu\nu}$ も反対称であることを示せ．

(e) $s^{\mu\nu}$ が対称で，$a^{\mu\nu}$ が反対称性とした場合，$s^{\mu\nu}a_{\mu\nu} = 0$ が成り立つことを証明せよ．

(f) 任意の 2 階のテンソル（$t^{\mu\nu}$）が反対称テンソル（$a^{\mu\nu}$）と対称テンソル（$s^{\mu\nu}$）の和で表すことができることを示せ．$t^{\mu\nu}$ を与えて，$s^{\mu\nu}$ と $a^{\mu\nu}$ を明示的に構成すること．

3.11　x 方向に速度 $(3/5)c$ で移動する粒子がある．固有速度 η^μ を求めよ（4 成分すべて）．

3.12　粒子 A（4 元運動量 p^μ_A）と粒子 B（4 元運動量 p^μ_B）が衝突し，粒子 C（p^μ_C）と粒子 D（p^μ_D）が生成される場合を考える．（相対論的）エネルギーと運動量は，系 S において保存されると仮定する（$p^\mu_A + p^\mu_B = p^\mu_C + p^\mu_D$）．ローレンツ変換（式 (3.12)）を用いた系 S' でも，エネルギーと運動量は保存されるか確かめよ．

3.13　質量 m をもつ（実）粒子の p^μ は，時間的ベクトル，空間的ベクトル，光子的ベクトルのどれか．また，質量のない粒子，仮想粒子ではどうか．

3.14　高温の芋は低温なものよりどれほど重いだろうか（kg で表せ）．

3.15　速度 v のパイ中間子はミュー粒子とニュートリノに崩壊する（$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$）．もしニュートリノが元々のパイ中間子の方向から 90° ずれた角度に出現したとすると，ミュー粒子はどの角度に放出されるだろうか．[答え：$\tan\theta = (1 - m^2_\mu/m^2_\pi)/(2\beta\gamma^2)$]

3.16　粒子 A（エネルギー E）を粒子 B（静止している）にぶつけると，粒子 $C_1, C_2, \cdots$ が生成される：$A + B \to C_1 + C_2 + \cdots + C_n$．種々の粒子の質量を用いて，この反応のしきい値（つまり，最低エネルギー E）を求めよ．

$$\left[答え：\frac{M^2 - m_A^2 - m_B^2}{2m_B}c^2, \qquad M \equiv m_1 + m_2 + \cdots + m_n\right]$$

3.17 問題3.16の結果を用いて，以下の反応のエネルギーしきい値を求めよ．ここで，標的の陽子は静止していると仮定する[*13]．

(a) $p + p \to p + p + \pi^0$
(b) $p + p \to p + p + \pi^+ + \pi^-$
(c) $\pi^- + p \to p + \bar{p} + n$
(d) $\pi^- + p \to K^0 + \Sigma^0$
(e) $p + p \to p + \Sigma^+ + K^0$

3.18 初めて人工的につくられた Ω^-（図1.9）は固定された水素原子に高エネルギーの陽子を照射して K^+K^- 対を生成することによって得られた（$p + p \to p + p + K^+ + K^-$）．$K^-$ は次に別の静止陽子と $K^- + p \to \Omega^- + K^0 + K^+$ のように反応する．このような過程で Ω^- をつくるために必要な（入射陽子の）最小の運動エネルギーの値を求めよ（ゲルマンは，この実験が実現可能かどうか計算したに違いない）．

3.19 静止した粒子 A が粒子 B と C に崩壊したとする（$A \to B + C$）．

(a) 各々の粒子の質量を用いて放出する粒子のエネルギーを求めよ．

$$\left[答え：E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A}c^2\right]$$

(b) 放出する粒子の運動量の大きさを求めよ．

$$\left[\begin{array}{l}答え：|\boldsymbol{p}_B| = |\boldsymbol{p}_C| = \dfrac{\sqrt{\lambda(m_A^2, m_B^2, m_C^2)}}{2m_A c} \\ ここでは\ \lambda\ は，いわゆる三角形関数である \\ \lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz\end{array}\right]$$

(c) $\lambda(a^2, b^2, c^2) = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c)$ という係数に注意せよ．$|\boldsymbol{p}_B|$ は $m_A = m_B + m_C$ のときゼロになり，$m_A < (m_B + m_C)$ のとき虚数になる．このことを説明せよ．

3.20 問題3.19の結果を用いて，以下の反応の各々の崩壊生成物の重心エネルギーを求めよ（脚注 *13 を参照）．

(a) $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$
(b) $\pi^0 \to \gamma + \gamma$
(c) $K^+ \to \pi^+ + \pi^0$
(d) $\Lambda \to p + \pi^-$
(e) $\Omega^- \to \Lambda + K^-$

3.21 静止したパイ中間子はミュー粒子とニュートリノに崩壊する（$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$）．平均して，ミュー粒子は崩壊するまでに（真空中で）どれだけ移動できるか．［答え：$d = [(m_\pi^2 - m_\mu^2)/(2m_\pi m_\mu)]c\tau = 186\,\mathrm{m}$］

3.22 静止した粒子 A は三つ以上の粒子に崩壊する．$A \to B + C + D + \cdots$．

(a) 各々の粒子の質量を用いて，このような崩壊で粒子 B がもてる最大エネルギーと最低エネルギーを決定せよ．

[*13] 注意：Particle Physics Booklet（その他のほとんどの情報源）の粒子の質量は MeV で示されている．たとえば，ミュー粒子の質量は 105.658 MeV である．これらが意味することは，もちろん，ミュー粒子の静止エネルギーは $m_\mu c^2 = 105.658\,\mathrm{MeV}$，または $m_\mu = 105.658\,\mathrm{MeV}/c^2$ である．どの値を入れる前にも質量を静止エネルギーに変換するのが安全だ．この場合では，たとえば，分母と分子に c^2 を掛けることで $E_{\min} = [(Mc^2)^2 - (m_A c^2)^2 - (m_B c^2)^2]/2(m_B c^2)$ が得られる．

(b) ミュー粒子の崩壊 $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ により生成される電子の最大エネルギーと最小エネルギーを求めよ．

3.23 (a) 速度 u の粒子が静止している同じ粒子に近づいているとする．これを重心系で見た場合の各粒子の速度 (v) を求めよ（古典的であれば，当然，速度はたんに $u/2$ となる）．
[答え：$(c^2/u)(1-\sqrt{1-u^2/c^2})$]

(b) $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ を $\gamma' \equiv 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ を用いて表せ．[答え：$\sqrt{(\gamma'+1)/2}$]

(c) (b) の結果を用いて重心系の各粒子の運動エネルギーを求めよ．そして式 (3.54) を再導出せよ．

3.24 $A+B \to A+C_1+C_2+\cdots$（粒子 A が粒子 B を散乱させて粒子 C_1, $C_2, \cdots$ を生成する）のようなタイプの反応は実験室系（B は静止）および重心系 ($\boldsymbol{p}_{\mathrm{tot}}=0$) に加えて有用な別の慣性系が存在する．それは「ブライト」系，あるいは「れんがの壁」系とよばれ，A がれんがの壁で跳ね返るように，その勢いが反転する ($\boldsymbol{p}_{\mathrm{after}}=-\boldsymbol{p}_{\mathrm{before}}$) 系である．弾性散乱 $(A+B \to A+B)$ の場合を考える．重心系で粒子 A がエネルギー E を運び，角度 θ で散乱する場合，ブライト系でエネルギーはどのくらいか．また，重心系に対するブライト系の速度（大きさと方向）を求めよ．

3.25 二体散乱 $A+B \to C+D$ について，マンデルスタム変数を導入すると扱いやすくなる．

$$s \equiv (p_A+p_B)^2/c^2$$
$$t \equiv (p_A-p_C)^2/c^2$$
$$u \equiv (p_A-p_D)^2/c^2$$

(a) $s+t+u=m_A^2+m_B^2+m_C^2+m_D^2$ を示せ．マンデルスタム変数の理論的美点は，それらがローレンツ不変量であり，任意の慣性系において同じ値であることだ．しかし実験的には，より扱いやすいパラメーターはエネルギーと散乱角である．

(b) A の重心エネルギーをマンデルスタム変数 s, t, u と質量を用いて計算せよ．[答え：$E_A^{\mathrm{CM}}=(s+m_A^2-m_B^2)c^2/2\sqrt{s}$]

(c) A の実験室系のエネルギー (B は静止) を求めよ．[答え：$E_A^{\mathrm{lab}}=(s-m_A^2-m_B^2)c^2/2m_B$]

(d) 全体の重心系エネルギーを求めよ．($E_{\mathrm{tot}}=E_A+E_B=E_C+E_D$) [答え：$E_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{CM}}=\sqrt{s}\,c^2$]

3.26 同じ粒子の弾性散乱 $(A+A \to A+A)$ のマンデルスタム変数（問題 3.25）は

$$s=4(\boldsymbol{p}^2+m^2c^2)/c^2$$
$$t=-2\boldsymbol{p}^2(1-\cos\theta)/c^2$$
$$u=-2\boldsymbol{p}^2(1+\cos\theta)/c^2$$

となることを示せ．このとき $\boldsymbol{p}$ は重心系での入射粒子の運動量で θ は散乱角である．

3.27 コンプトン散乱の運動を計算する．波長 λ の光子が質量 m の荷電粒子と弾性的に衝突する．光子が角度 θ で散乱する場合, 散乱された光子の波長 λ' を求めよ．[答え：$\lambda'=\lambda+(h/mc)(1-\cos\theta)$]