10

ゲージ理論

この章では，素粒子のすべての相互作用を記述する「ゲージ理論」を紹介する．まず，古典力学のラグランジアンの定式化から始めて，場の理論のラグランジアン，局所ゲージ不変の原理，自発的対称性の破れの概念，そして（W と Z の質量を説明する）ヒッグス機構に進む．この内容は（ここまでの章とは対照的に）非常に概略で，ファインマン則のよりどころとなっている場の量子論の根本と関わりがある．しかし，断面積や寿命の計算の手助けにはならない．一方で，ここで議論されているアイデアが，現代の理論のほぼすべてを予言できる定式化の元となっている．この章を理解するためには，いくつかのラグランジアン力学が役立つが，それよりももっと本質的なのは，3 章の相対論的表記や，4 章の群論の概念や，6 章のファインマン則や，7 章のディラック方程式だ．

10.1　古典力学によるラグランジアンの定式化

ニュートンの運動の第二法則によると，質量 m の粒子に力 $\boldsymbol{F}$ が与えられると，

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{10.1}$$

で示される加速度 $\boldsymbol{a}$ を得る．もし力が保存力だと，それはスカラーポテンシャルエネルギー関数 U の傾きとして表現され，

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U \tag{10.2}$$

ニュートンの法則は

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\boldsymbol{\nabla} U \tag{10.3}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{v}$ は速度だ [1].

古典力学におけるもう一つの定式化は，「ラグランジアン」から始める．

$$L = T - U \tag{10.4}$$

ここで，T は粒子の運動エネルギーだ．

$$T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \tag{10.5}$$

ラグランジアンは，座標軸 q_i（すなわち，$q_1 = x$，$q_2 = y$，$q_3 = z$）と，それらの時間微分 $\dot{q}_i$（$\dot{q}_1 = v_x$，$\dot{q}_2 = v_y$，$\dot{q}_3 = v_z$）の関数である．ラグランジアンの定式化では，運動の基本法則はオイラー–ラグランジュ方程式だ [2].

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{10.6}$$

よって，デカルト座標系では

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial v_x} = mv_x \tag{10.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{10.8}$$

となり，($i = 1$ に対する) オイラー–ラグランジュ方程式が，式 (10.3) のかたちのニュートンの法則の x 成分を再現する．ゆえに，ラグランジアンの公式は，ニュートンのものと（少なくとも保存系に対しては）等価であるが，この後見ていくように理論的には確かに優れている（問題 10.1 も参照）．

10.2　相対論的場の理論におけるラグランジアン

粒子は，その本質からして，空間的に局在して存在するものである．古典的な粒子に対する力学で，われわれが興味があるのは典型的には粒子の位置を時間の関数 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ として計算することだ．一方では，場は空間のある領域を占めるものだ．場の理論での関心事は，一つ以上の時空に依存する関数 $\phi_i(x, y, z, t)$ を計算することだ．場の変数 ϕ_i は，たとえば，空間のそれぞれの点における温度だったり，電圧 V だったり，磁場 $\mathbf{B}$ の 3 成分だったりする．粒子力学では，座標軸 q_i とそれらの時間微分 $\dot{q}_i$ の関数であるラグランジアン L を導入した．場の理論では，場 ϕ_i とそれらの x，y，z，t 微分

$$\partial_\mu \phi_i \equiv \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu} \tag{10.9}$$

の関数であるラグランジアン $\mathscr{L}$（正確にはラグランジアン密度）から始める．古典的な場合は式 (10.6) のオイラー–ラグランジュ方程式の左辺は時間微分しか含まなかったが，相対性理論では空間座標と時間座標を平等に扱う必要があり，オイラー–ラグラ

ンジュ方程式の一般化は，可能な最も単純な方法では

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots) \tag{10.10}$$

となる．

例題 10.1 スカラー場（スピン 0）に対するクライン–ゴルドンのラグランジアン

1 個のスカラー場 ϕ と，そのラグランジアン

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2 \tag{10.11}$$

を考えてみよう．この場合

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \tag{10.12}$$

となる（もしこの表式に混乱するなら，ラグランジアンを「長く」書き下してみよう．

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\partial_0\phi\partial_0\phi - \partial_1\phi\partial_1\phi - \partial_2\phi\partial_2\phi - \partial_3\phi\partial_3\phi\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2$$

このかたちだと

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0\phi = \partial^0\phi, \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_1 \phi)} = -\partial_1\phi = \partial^1\phi,$$

などが明白だ）．一方，

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi$$

であるから，オイラー–ラグランジュ方程式は

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi = 0 \tag{10.13}$$

となる．これが，スピン 0，質量 m の粒子を（場の量子論において）記述するクライン–ゴルドン方程式（式 (7.9)）である．

例題 10.2 スピノル（スピン 1/2 の）場に対するディラックのラグランジアン

今度はスピノル場 ψ とそのラグランジアン

$$\mathscr{L} = i(\hbar c)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (mc^2)\bar{\psi}\psi \tag{10.14}$$

を考察してみよう．ψ と随伴スピノル $\bar{\psi}$ を独立な場の変数として扱う[*1]．$\bar{\psi}$ にオイラー–ラグランジュ方程式を適用すると，

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0, \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \psi$$

となることがわかり，よって，

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0 \tag{10.15}$$

である．これが，スピン 1/2，質量 m の粒子を（場の量子論で）記述するディラック方程式だ（式 (7.20)）．

もし，ψ にオイラー–ラグランジュ方程式を適用すると，

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\hbar c \bar{\psi}\gamma^\mu, \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi} = -mc^2 \bar{\psi}$$

となり，ゆえに，

$$i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\bar{\psi} = 0$$

である．これが，随伴ディラック方程式である（問題 7.15）．

例題 10.3　ベクトル場（スピン 1）に対するプロカのラグランジアン

最後にベクトル場 A^μ とラグランジアン

$$\mathscr{L} = \frac{-1}{16\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu \tag{10.16}$$

について考えてみよう．ここで，

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{-1}{4\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \tag{10.17}$$

（問題 10.2），かつ，

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu \tag{10.18}$$

なので，オイラー–ラグランジュ方程式により

[*1] ψ は複素スピノルなので，ψ の 4 成分それぞれに実部と虚部があり，ここでは実際には 8 個の独立な場が存在する（i は 1 から 8 まで取る）．しかし，オイラー–ラグランジュ方程式を適用するときは，これら 8 個のどの線形結合を使っても同じ結果になるので，ψ の 4 成分と $\bar{\psi}$ の 4 成分を使うことに決めた．

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \tag{10.19}$$

を得る．

これはプロカ方程式とよばれ，スピン 1，質量 m をもつ粒子を記述する．ちなみに，$(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ という組み合わせがこの理論ではたびたび出てくるので，以下の省略を導入すると便利である．

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{10.20}$$

すると，ラグランジアンは

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu \tag{10.21}$$

であり，場の方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \tag{10.22}$$

となる．もし，この表式によって電気力学を思い出したとしたら，それは決して偶然ではない．というのも，電磁場はまさしく質量ゼロのベクトル場だからだ．

式 (10.22) で $m = 0$ とすると，何にもない空間に対するマクスウェル方程式が出てくる[*2]．

これらの例の中のラグランジアンはどこからともなく出てきた（あるいは，むしろ，欲しい場の方程式を再現するためにでっち上げられた）．古典粒子力学では L は導出されたが（$L = T - U$），相対論的場の理論における $\mathscr{L}$ はいつも証明の要らない公理とされる．どこかから始めなければならないのだ．ある特定の系のラグランジアンは唯一無二ではない．いつも $\mathscr{L}$ に定数を掛けたり，定数を足したりすることができるし，さらにいうと，任意のベクトル関数の発散（$\partial_\mu M^\mu$，ただしここで M^μ は ϕ_i や $\partial_\mu \phi_i$ のいかなる関数でもよい）を加えることもできる．そのような項はオイラー–ラグランジュ方程式を適用するときに打ち消し合って，場の方程式に影響を与えない．そういう意味では，たとえば，クライン–ゴルドンのラグランジアン中の係数 1/2 は純粋に

[*2] この定式化では，A^μ が本質的な物理量で $F^{\mu\nu}$ はたんに便利な表記（式 (10.20)）だということに注意しよう．**E** と **B**（ゆえに $F^{\mu\nu}$）が本質的で，ポテンシャルはそれらから組み上げられていると考える古典電気学の視点とは逆なのだ．とりわけ，オイラー–ラグランジュ方程式に対して，「場」は A^μ であり $F^{\mu\nu}$ ではない．

習慣である[*3]．ひとまずそのことは忘れて，とにかく，われわれが導出してきたのは，スピン 0，スピン 1/2，スピン 1 に対するラグランジアンだ．だがこれまでに話をしてきたのは，力の源や相互作用のない自由場についてのみである．

例題 10.4　<u>ソース $\mathbf{J}^\mu$ がある場合の質量のないベクトル場に対するマクスウェルのラグランジアン</u>　以下を考えよう．

$$\mathscr{L} = \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} J^\mu A_\mu \tag{10.23}$$

ここで，$F^{\mu\nu}$ は（またも）$(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ を意味し，$\mathbf{J}^\mu$ はある特定の関数である．オイラー–ラグランジュ方程式により

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \tag{10.24}$$

を得る．これは（7.4 節で見つけたように）テンソル型のマクスウェル方程式で，電流 $\mathbf{J}^\mu$ で生成される電磁場を記述する．ちなみに，式 (10.24) から

$$\partial_\nu J^\nu = 0 \tag{10.25}$$

となる．つまり，マクスウェルのラグランジアン（式 (10.23)）の整合性を満たすために，電流が連続の式 (7.74) を満たさなければならないのだ．$\mathbf{J}^\mu$ としてたんに何でもよいから入れるというのは駄目で，電荷の保存則を守らなければならない．

10.3　局所ゲージ不変

ディラックのラグランジアン

$$\mathscr{L} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi$$

[*3] ラグランジアン L はエネルギーの次元をもち（式 (10.4)），ラグランジアン密度（$\mathscr{L}$）は単位体積あたりのエネルギーという次元をもつ．場がもつ次元は以下になる．

$$\phi\ \text{（スカラー場）}: \sqrt{ML}/T$$
$$\psi\ \text{（スピノル場）}: L^{-3/2}$$
$$A^\mu\ \text{（ベクトル場）}: \sqrt{ML}/T$$

これらは，ψ が（非相対論的極限で）シュレーディンガー波動方程式に入り，A^μ が（非量子論的極限で）マクスウェルのベクトルポテンシャルに入るように選ばれた．ところで，ローレンツ–ヘヴィサイド単位系では，プロカとマクスウェルのラグランジアンは慣習として 4π が掛けられている．

が変換

$$\psi \to e^{i\theta}\psi \qquad \text{(大局的位相変換)} \tag{10.26}$$

のもとで不変であることに注意しよう（ここで θ はどんな実数でもよい）．というのも，$\bar{\psi} \to e^{-i\theta}\bar{\psi}$ なので，$\bar{\psi}\psi$ の組み合わせで指数関数部分は打ち消し合う（非相対論的量子力学では，波動関数の全体の位相はもちろん任意である）．しかし，異なる時空点で位相が異なるとどうなるだろう．つまり，θ が x^μ の関数だったらどうなるだろうか．

$$\psi \to e^{i\theta(x)}\psi \qquad \text{(局所的位相変換)} \tag{10.27}$$

そのような「局所的な」位相変換のもとでラグランジアンは不変だろうか．答えは否だ．というのは，今度は θ の微分で余分な項を拾ってしまうのだ．

$$\partial_\mu(e^{i\theta}\psi) = i(\partial_\mu\theta)e^{i\theta}\psi + e^{i\theta}\partial_\mu\psi \tag{10.28}$$

なので，

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L} - \hbar c(\partial_\mu\theta)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{10.29}$$

となってしまう．そこから θ の係数 $-(q/\hbar c)$ を取り出し

$$\lambda(x) \equiv -\frac{\hbar c}{q}\theta(x) \tag{10.30}$$

とするのが便利だ．ここで q は粒子の電荷である．すると，λ を使って表すと

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L} + (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda \tag{10.31}$$

が，局所位相変換

$$\psi \to e^{-iq\lambda(x)/\hbar c}\psi \tag{10.32}$$

の結果となる．

これまでのところ，とりわけ新しいことも深遠なこともない．重大な局面は，「ラグラジアン全体が局所位相変換に対して不変であることを要求」したときにやってくる[*4]．自由場のディラックラグランジアン（式 (10.14)）は局所位相変換に対して不変

[*4] 大局的な不変性が局所的にも成立すべきだとする説得力のある議論を私は知らない．もし位相変換が何らかの意味で「本質的」だと信じるならば，空間的に離れた地点で独立な位相変換を実行できるはずだと考えるであろう（結局のところ，互いが音信不通である）．しかし，そう考えるのには疑問があると思う．それよりも，少なくともいまは，局所位相変換の不変性を物理学における新たな原理であるとするのがよい．

ではないので，式 (10.31) 中の余分な項を吸収するために何かを足す必要がある．とくに，

$$\mathscr{L} = [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi] - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu \tag{10.33}$$

としてみよう．ここで，A_μ は新たな場で（ψ の局所位相変換とともに）以下のルールに従って変換する．

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\lambda \tag{10.34}$$

この「新しく改善された」ラグランジアンは今度は局所不変になっている．式 (10.34) の $\partial_\mu\lambda$ が式 (10.31) の「余分な」項をちょうど吸収する．われわれが支払うべき対価は，式 (10.33) の最後の項を通して，ψ と結合する新たなベクトル場を導入することだ（問題 10.6）．しかし，式 (10.33) が話のすべてではない．ラグランジアン全体は場 A_μ に対する「自由」項（相互作用項以外の項）を含まなければならない．その場はベクトルなので，プロカラグランジアン（式 (10.21)）に目を向けてみる．

$$\mathscr{L} = \frac{-1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{m_A c}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu$$

しかし，ここには問題がある．というのは，$F^{\mu\nu} \equiv (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ が式 (10.34) のもとで不変である一方（読者自身で確認してほしい），$A^\nu A_\nu$ は不変ではない．あきらかに，新たに導入された場は質量ゼロでなくてはならず（$m_A = 0$），さもないと不変性が失われてしまう．

結論：ディラックのラグランジアンから始めて，局所位相変換において不変であることを要求すると，質量のないベクトル場（A_μ）を導入することが不可欠となり，ラグランジアンは全体で

$$\mathscr{L} = [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi] - \left[\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right] - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu \tag{10.35}$$

となる．想像通り，A^μ はまさに電磁ポテンシャルだ．A^μ に対する変換の法則（式 (10.34)）は，7 章で見つけたゲージ不変性（式 (7.81)）そのもので[*5]，式 (10.35) の後ろの 2 項がマクスウェルのラグランジアン（式 (10.23)）を再現し，電流密度は

$$J^\mu = cq(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \tag{10.36}$$

となる．ゆえに，自由場のディラックラグランジアンに局所位相不変を要求すると，電

[*5] 古典電気力学におけるゲージ不変性との関連性から，式 (10.34) と (10.26) は「ゲージ変換」とよばれ，A^μ は「ゲージ場」とよばれ，そして，全体の方針が「ゲージ理論」とよばれる．

気力学のすべてが生成されて，ディラック粒子による電流密度が指定される．

これは真に息をのむような成果だ．決定的に重要なのは，式 (10.33) に付け足された項だ．これをどうやって得たのか．大局的位相変換と局所的位相変換の違いは場（式 (10.28)）の微分を計算したときに生じる．

$$\partial_\mu \psi \to e^{-iq\lambda/\hbar c}\left[\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar c}(\partial_\mu \lambda)\right]\psi \tag{10.37}$$

単純な位相因子の代わりに，$\partial_\mu \lambda$ を含む余分な項を拾い上げげた．もし，元々の（自由場の）ラグランジアンですべての微分（∂_μ）をいわゆる「共変微分」

$$\mathscr{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu \tag{10.38}$$

に置き換えると（そしてすべての ∂^μ を $\mathscr{D}^\mu$ に），A^μ のゲージ変換（式 (10.34)）は式 (10.37) 中のゲージ不変を破る項を打ち消して

$$\mathscr{D}_\mu \psi \to e^{-iq\lambda/\hbar c}\mathscr{D}_\mu \psi \tag{10.39}$$

となり，$\mathscr{L}$ の不変性をよび戻す．∂_μ を $\mathscr{D}_\mu$ に置き換えることは，大局的に不変なラグランジアンを局所的に不変にするための単純で美しい方法だ．これを「最小結合法則」とよぶ*6．しかし，共変微分は，新たなベクトル場（A_μ）の導入と，それ自身の自由ラグランジアンを要求する．もし，自由ラグランジアンが局所ゲージ不変性を台なしにしないのであれば，ゲージ場を質量ゼロにしなければならない．これにより最終的な式 (10.35) が得られて，知っている人はそれを見てすぐにディラック場（電子と陽電子）がマクスウェル場（光子）と相互作用している量子電気力学のラグランジアンだとわかる．

局所ゲージ不変のアイデアは古く 1918 年のヘルマン・ワイルにさかのぼる [3]．しかし，その威力と一般性については，1970 年代初頭になるまで完全には理解されていなかった．われわれのスタート地点（式 (10.26) 中の大局的位相変換）は，ψ と 1×1 ユニタリー行列の積だとみなしてもよい

$$\psi \to U\psi, \qquad U^\dagger U = 1 \tag{10.40}$$

（ここでは $U = e^{i\theta}$ である）．このような行列の集合は $U(1)$ であり（表 4.2 を参照），

*6 最小結合法則は，局所ゲージ不変の原理よりもずっと古い．運動量（$p_\mu \to i\hbar\partial_\mu$）に関していうと $p_\mu \to p_\mu - i(q/c)A_\mu$ であり，電場が存在するときに荷電粒子の運動方程式を得るための古典電気力学でのやり方としてよく知られている．この観点では，ローレンツ力の法則の洗練された定式化を行っていることになる．現代の素粒子理論では，局所ゲージ不変を本質的であるととらえ，最小結合は局所ゲージ不変を成立させるための道具である．

それゆえ，その対称性のことは「$U(1)$ ゲージ不変」とよばれている．この用語はいまの場合だと大げさだ（1×1 行列は数なので，なぜそのように抜きださなければならないのか）．しかし，1954 年にヤンとミルズが同じ方法を $SU(2)$ に（大局的不変性が局所的にも成立するように）適用し [4]，その後，そのアイデアは $SU(3)$ にも拡張され，量子色力学を誕生させた．標準模型では，すべての根源的な相互作用がこのようにして生成される．

10.4　ヤン–ミルズ理論

今度は，二つのスピン 1/2 の場 ψ_1 と ψ_2 があると仮定しよう．どんな相互作用もないときのラグランジアンは

$$\mathscr{L} = [i\hbar c\bar{\psi}_1\gamma^\mu\partial_\mu\psi_1 - m_1c^2\bar{\psi}_1\psi_1] + [i\hbar c\bar{\psi}_2\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2 - m_2c^2\bar{\psi}_2\psi_2] \tag{10.41}$$

である．それは，たんに二つのディラックラグランジアンの和だ（この $\mathscr{L}$ にオイラー–ラグランジュ方程式を適用すると，ψ_1 と ψ_2 の両方が適切な質量をもったディラック方程式に従っていることがわかる）．しかし，ψ_1 と ψ_2 を 2 成分の列ベクトル

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{10.42}$$

に組み込んでしまうことによって，式 (10.41) をもっと簡単なかたちで書くことができる（もちろん，ψ_1 と ψ_2 自身は 4 成分のディラックスピノルで，もしかしたら $\psi_{\alpha,i}$ という二重の添字の方を読者は好むかもしれない．ここで，$\alpha = 1, 2$ は粒子を特定し，$i = 1, 2, 3, 4$ がスピノルの成分を表す．しかし，ディラック行列はもちろんスピノルの添字に作用するのだが，ここで気にすべきは粒子を特定する添字だけだ）．随伴スピノルは

$$\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \ \bar{\psi}_2) \tag{10.43}$$

であり，ラグランジアンは

$$\mathscr{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - c^2\bar{\psi}M\psi \tag{10.44}$$

となる．ここで，

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \tag{10.45}$$

は,「質量行列」だ.とくに,もしその二つの質量がたまたま同じなら,式 (10.44) は以下のようになる.

$$\mathscr{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc^2\bar{\psi}\psi \tag{10.46}$$

これは,1 粒子に対するディラックラグランジアンとまったく同じに見える.しかし,ψ はいまや 2 成分の列ベクトルであり,$\mathscr{L}$ は以前よりもより一般的で大域的な以下の不変性をもっている.

$$\psi \to U\psi \tag{10.47}$$

ここで,U は任意の 2×2 行列であり

$$U^{\dagger}U = 1 \tag{10.48}$$

を満たす.式 (10.47) のもとでの変換により

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}U^{\dagger} \tag{10.49}$$

となる.ゆえに,$\bar{\psi}\psi$ という組み合わせは不変である.さて,絶対値が 1 のいかなる複素数も $e^{i\theta}$ というかたちで書けるように,いかなるユニタリー行列も

$$U = e^{iH} \tag{10.50}$$

というかたちで書ける [5].ここで,H はエルミートである $(H^{\dagger} = H)$*7.さらに,最も一般的な 2×2 のエルミート行列は四つの実数 a_1, a_2, a_3, θ の 4 個で表現できる (問題 10.10).

$$H = \theta 1 + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a} \tag{10.51}$$

ここで,1 は 2×2 の単位行列,τ_1,τ_2,τ_3 はパウリ行列(式 (4.26)),そして,ドットの掛け算は $\tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 + \tau_3 a_3$ の簡略表記だ.よって,あらゆる 2×2 のユニタリー行列が積として表現できる.

---

*7 行列理論では,複素共役($*$)の自然な一般化は,エルミート共役,つまり転置共役だ.もちろん,1×1 行列(複素数)の場合では違いはないが,$n \times n$ 行列の場合,エルミート共役こそが通常の複素共役の最も便利な特徴を共有する.この意味で,実数($a = a^*$)に最も近い類似はエルミート行列($A = A^{\dagger}$)であり,絶対値 1 の数($a^* a = 1$)だとユニタリー行列($A^{\dagger} A = 1$)だ.

$$U = e^{i\theta} e^{i\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{a}} \tag{10.52}$$

位相変換（$e^{i\theta}$）の意味についてはすでに考察してきた．この節では，

$$\psi \to e^{i\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{a}}\psi \qquad (\text{大域的}SU(2)\ \text{変換}) \tag{10.53}$$

というかたちの変換に集中する．行列 $e^{i\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{a}}$ は行列式 1 をもつので（問題 4.22），$SU(2)$ 群に属する．10.3 節の用語を一般化すると，ラグランジアンは大域的 $SU(2)$ 変換のもとで不変といえる*8．ヤンとリーが行ったのは，この大域的不変性を局所不変性という状態に格上げしたことだった．

ひらめきと戦略はワイルのものと似ていたが，実行するのはもっと繊細で難しかった．実際，それがうまくいくのは非常に驚くべきことだ．最初のステップはパラメーター（$\mathbf{a}$）を x^μ の関数とすることだ（以前と同様に $\lambda(x) \equiv -(\hbar c/q)\mathbf{a}(x)$ と定義する．ここで，q は電荷の類推で結合定数だ）．

$$\psi \to S\psi, \quad \text{ここで} \quad S \equiv e^{-iq\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\lambda}(x)/\hbar c} \ (\text{局所}\ SU(2)\ \text{変換}) \tag{10.54}$$

いまのところ，$\mathscr{L}$ はこのような変換で不変ではない．というのも，微分が余分な項を拾ってしまうからだ．

$$\partial_\mu\psi \to S\partial_\mu\psi + (\partial_\mu S)\psi \tag{10.55}$$

ここでも救済策は，$\mathscr{L}$ を式 (10.38) でつくった「共変微分」で置き換えることだ．だが，式 (10.55) の構造を考慮に入れる必要がある．

$$\mathscr{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu \tag{10.56}$$

そして，ゲージ場 $\boldsymbol{A}_\mu$（今度は 3 成分だ）に以下の変換のルールを割り当てる．

$$\mathscr{D}_\mu\psi \to S(\mathscr{D}_\mu\psi) \tag{10.57}$$

すると，ラグランジアン（式 (10.46)）はあきらかに不変になる．

式 (10.57) から $\boldsymbol{A}_\mu$ の変換ルールを推測するのは簡単なことではない [6]．$\boldsymbol{A}'_\mu$ を

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}'_\mu = S(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu)S^{-1} + i\left(\frac{\hbar c}{q}\right)(\partial_\mu S)S^{-1} \tag{10.58}$$

---

*8 それは，より大きな群である $U(2)$ に対しても不変だ．しかし，式 (10.52) が意味しているのは，$U(2)$ のいかなる要素も $SU(2)$ の要素と適当な位相因子の積として書けるということで（群論の言葉を使うと $U(2) = U(1) \otimes SU(2)$），$U(1)$ 不変についてはすでに勉強してきたので，ここで唯一新しいのは $SU(2)$ 対称性だ．

とすると，$\boldsymbol{A}_\mu \to \boldsymbol{A}'_\mu$ となることを示すのは読者に任せたい（問題 10.11）．大部分は比較的簡単だ．しかし，第 1 項の S と S^{-1} は一緒にできない．$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu$ と交換しないからだ．S の勾配もたんに $-i(q\boldsymbol{\tau}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\lambda}/\hbar c)S$ とはならない．S が $\boldsymbol{\tau}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\lambda}$ と交換しないからだ．もし余力があれば，（問題 4.20 と 4.21 を使って）正確な結果を求めてもよいが，その答えはあまり理解を鮮明にするものではない．われわれの目的としては，$|\boldsymbol{\lambda}|$ が非常に小さい場合に限って，近似的な変換ルールがわかれば十分だ．そのためには，S を展開して，1 次の項だけを残せばよい．

$$S \cong 1 - \frac{iq}{\hbar c}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\lambda}, \qquad S^{-1} \cong 1 + \frac{iq}{\hbar c}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\lambda}, \qquad \partial_\mu S \cong -\frac{iq}{\hbar c}\boldsymbol{\tau}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\lambda} \tag{10.59}$$

この近似のもとでは，式 (10.58) は

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}'_\mu \cong \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu + \frac{iq}{\hbar c}[\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu, \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\lambda}] + \boldsymbol{\tau}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\lambda} \tag{10.60}$$

となり，それゆえ（交換関係を計算するために問題 4.20 を使うと）

$$\boldsymbol{A}\prime_\mu \cong \boldsymbol{A}_\mu + \partial_\mu\boldsymbol{\lambda} + \frac{2q}{\hbar c}(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{A}_\mu) \tag{10.61}$$

である．

結果として得られるラグランジアン

$$\mathscr{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\mathscr{D}_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi = [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi] - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\boldsymbol{\tau}\psi)\cdot\boldsymbol{A}_\mu \tag{10.62}$$

は，局所ゲージ変換で不変（式 (10.54) と (10.58)）であるが，三つの新たなゲージ場 $\boldsymbol{A}^\mu = (A_1^\mu, A_2^\mu, A_3^\mu)$ を導入しなければならない．そのゲージ場自体の自由ラグラジアンは以下のようになる

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{16\pi}F_1^{\mu\nu}F_{\mu\nu 1} - \frac{1}{16\pi}F_2^{\mu\nu}F_{\mu\nu 2} - \frac{1}{16\pi}F_3^{\mu\nu}F_{\mu\nu 3} = -\frac{1}{16\pi}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu} \tag{10.63}$$

（ここでも，3 元ベクトルの表記は粒子の種類を指定するのに使われている）．プロカの質量項

$$\frac{1}{8\pi}\left(\frac{m_A c}{\hbar}\right)^2\boldsymbol{A}^\nu\cdot\boldsymbol{A}_\nu \tag{10.64}$$

は，局所ゲージ不変性により禁止される．以前と同様に，ゲージ場は質量ゼロでなければならない．しかし今度は，以前の定義 $\boldsymbol{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu\boldsymbol{A}^\nu - \partial^\nu\boldsymbol{A}^\mu$ を変更しなければならない．この定義のままではゲージ場のラグランジアン（式 (10.63)）も不変にならら

ないからだ（問題 10.12）．代わりに以下のように定義する[*9]．

$$\boldsymbol{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \boldsymbol{A}^\nu - \partial^\nu \boldsymbol{A}^\mu - \frac{2q}{\hbar c}(\boldsymbol{A}^\mu \times \boldsymbol{A}^\nu) \tag{10.65}$$

無限小局所ゲージ変換で（式 (10.61)），

$$\boldsymbol{F}^{\mu\nu} \to \boldsymbol{F}^{\mu\nu} + \frac{2q}{\hbar c}(\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{F}^{\mu\nu}) \tag{10.66}$$

のように変換するので（問題 10.13），$\mathscr{L}_A$ は不変である（有限のゲージ変換でも不変になることの証明は，問題 10.14 を参照せよ）．

結論：式 (10.65) で定義された $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$ を用いると，ヤン–ミルズ場のラグランジアンは

$$\mathscr{L} = [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi] - \frac{1}{16\pi}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu} - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\boldsymbol{\tau}\psi)\cdot\boldsymbol{A}_\mu \tag{10.67}$$

で完成となる．それは，局所 $SU(2)$ ゲージ変換のもとで不変で（式 (10.54) と (10.58)），同じ質量をもつ二つのディラック場と質量ゼロの三つのゲージ場との相互作用を記述する．これらの結果すべては，大域的 $SU(2)$ 不変性をもっていた元の自由ラグランジアン（式 (10.46)）が局所的にも不変であるべし，という要請から得られる．電気力学の言葉を借用すると，以下のようにいえる．ディラック場が三つのカレント

$$\boldsymbol{J}^\mu \equiv cq(\bar{\psi}\gamma^\mu\boldsymbol{\tau}\psi) \tag{10.68}$$

を生成し，それがゲージ場の源として作用する．ゲージ場のみのラグランジアン

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{16\pi}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{c}\boldsymbol{J}^\mu\cdot\boldsymbol{A}_\mu \tag{10.69}$$

は，マクスウェルのラグランジアン（式 (10.23)）の名残があり，豊穣で興味深い古典場の理論を与える [7]（問題 10.15）．

ヤン–ミルズの理論はワイルと同じアイデア（つまり，大域的不変性が局所的にも保たれている）に基づいているが，それを実行する際には以下の二つの点でより精緻であった．(1) ゲージ場に対する局所的変換のルールと (2) A^μ を使って $F^{\mu\nu}$ を表現する点である．どちらの複雑さも，問題にしている対称群が非アーベル群（2×2 行列は交換しないが，一方で 1×1 はあきらかに交換する）だという事実に由来している．

[*9] 見た目と違ってこの定義は任意ではない．重要なのは，3 元ベクトル場があると，$(\mathbf{A}^\mu \times \mathbf{A}^\nu)$ というかたちの二つ目の反対称テンソルが存在し，その係数 $-2q/\hbar c$ は $\mathscr{L}_A$ を正確に不変にするために選ばれているということだ．結合定数 q をゼロにすると，それぞれのスピノル場に対する自由ディラックラグランジアンと，三つのゲージ場それぞれに対する（質量ゼロの）自由プロカラグランジアンが残ることに注意しよう．

その違いがよくわかるように，アーベル群の場合としてワイルの理論を，非アーベル群の場合としてヤン–ミルズの理論を見てみよう．現代の素粒子物理学では，多くの対称群が調査されてきた．これから残りの章で，それらのいくつかに出合うことになる．しかしながら，難しい作業はもう終わりだ．いったんヤン–ミルズ理論がわかれば，非アーベルゲージ理論をより高い対称群に拡張するのは単純な作業だ．

だが，興味深いことに，ヤン–ミルズ理論はそのままのかたちではほとんど役に立たないことがわかってしまった．結局のところ，質量が同じでスピンが1/2という二つの素粒子の存在を前提としてスタートしたが，われわれが知る限り，そのような対は自然界には存在しない．ヤンとミルズは，核子の系（陽子と中性子）を思い浮かべて，強い相互作用におけるハイゼンベルクのアイソスピン不変性に使うためのものとして，ある模型を考えた．1.29 MeV/c^2 というわずかな陽子と中性子の質量差を電磁気力の対称性の破れの帰結とみなそうとしたのだ．その理論が成功を収めるためには，質量のないアイソ三重項のベクトル（スピン 1）粒子が存在する必要があった．思いつく唯一の候補は ρ 中間子であったが，それは質量ゼロからかけ離れていて（$M_\rho = 770\,\mathrm{MeV}/c^2$），電磁気力の混入として説明できるような小さな乖離（かいり）ではなかった．有限の質量をもつゲージボソンを組み入れてヤン–ミルズ理論を救うための数多くの試みがなされた．それがやっと（ヒッグス機構によって）実を結ぶ頃には，とにもかくにも p，n，ρ が複合粒子であることや，アイソスピンがより大きなフレーバー対称性の成分のたんなる一部で，強い相互作用で根源的な役割を果たすにはあまりに劇的に破れていることが，明白だった．非アーベル・ゲージ理論がとうとう成功を収めたときには，強い相互作用における色の $SU(3)$ 対称性，弱い相互作用における（弱）アイソスピン・ハイパー荷の $SU(2)_L \otimes U(1)$ 対称性という文脈であった．一方，1954 年から 10 年以上もヤン–ミルズ模型は廃れていた．自然を正しく記述している美しいアイデアが使われなかったのだ．

10.5　色力学

標準模型によると，クォークのフレーバーそれぞれに，赤，青，緑の 3 色がある．クォークのフレーバーが違うと質量も違うが（表 4.4），ある特定のクォークに関しては，3 色どれも同じ質量をもっている．よって，ある特定のフレーバーのクォークの自由ラグランジアンは以下のようになる．

$$\mathscr{L} = [i\hbar c\bar{\psi}_r\gamma^\mu\partial_\mu\psi_r - mc^2\bar{\psi}_r\psi_r] + [i\hbar c\bar{\psi}_b\gamma^\mu\partial_\mu\psi_b - mc^2\bar{\psi}_b\psi_b] + [i\hbar c\bar{\psi}_g\gamma^\mu\partial_\mu\psi_g - mc^2\bar{\psi}_g\psi_g] \tag{10.70}$$

以前と同様，

$$\psi \equiv \begin{pmatrix}\psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g\end{pmatrix}, \qquad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_r \ \bar{\psi}_b \ \bar{\psi}_g) \tag{10.71}$$

を導入することにより，表記を簡略化できて

$$\mathscr{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi \tag{10.72}$$

となる．これは，ψ が今度は3成分の列ベクトルになっただけで（ベクトルのそれぞれの要素は4成分のディラックスピノルである），元のディラックラグランジアンとまったく同じに見える．ちょうど，一つの粒子のディラックラグランジアン（式(10.14)）が（大域的）$U(1)$ 位相不変性をもち，（同じ質量をもつ）二つの粒子のラグランジアン（式(10.41)）が $U(2)$ 不変性をもっているように，この（同じ質量をもつ）三つの粒子のラグランジアンは $U(3)$ 対称性を示す．つまり，

$$\psi \to U\psi \qquad (\bar{\psi} \to \bar{\psi}U^\dagger) \tag{10.73}$$

というかたちの変換のもとで不変である．ただしここで，U は任意の 3×3 ユニタリー行列で

$$U^\dagger U = 1 \tag{10.74}$$

である．

しかし，（式(10.50)を）思い出してほしい．いかなるユニタリー行列もエルミート行列の指数関数で表示できる．

$$U = e^{iH}, \qquad \text{ただし}\quad H^\dagger = H \tag{10.75}$$

さらに，いかなる 3×3 のエルミート行列も9個の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ と θ で表すことができる（問題10.16）．

$$H = \theta 1 + \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a} \tag{10.76}$$

ここで，1は 3×3 の単位行列で，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_8$ はゲルマン行列（式(8.34)）で，ドッ

トの掛け算はいまは 1 から 8 までの和を意味する．

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}\equiv\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_8a_8 \tag{10.77}$$

ゆえに，

$$U=e^{i\theta}e^{i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}} \tag{10.78}$$

である．われわれはすでに位相変換（$e^{i\theta}$）については見てきた．ここで新しいのは，第 2 項だ．行列 $e^{i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}}$ は行列式 1 をもち（問題 10.17 参照），$SU(3)$ 群に属する[*10]．だから，興味があるのは，大域的対称性を局所的にしようとしている $SU(3)$ 変換のもとでのラグランジアン（式 (10.72)）の不変性だ．

つまり，$\mathscr{L}$ を修正して，それが局所 $SU(3)$ ゲージ変換のもとで不変になるようにする．

$$\psi\to S\psi \quad ここで \quad S\equiv e^{-iq\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\phi}(x)/\hbar c} \tag{10.79}$$

（ここでもまた，$\boldsymbol{\phi}\equiv-(\hbar c/q)\boldsymbol{a}$ として，結合定数 q が QED における電荷のような役割を果たすようにした．）いつものように，秘訣は通常の微分 ∂_μ を「共変微分」$\mathscr{D}_\mu$

$$\mathscr{D}_\mu\equiv\partial_\mu+i\frac{q}{\hbar c}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{A}_\mu \tag{10.80}$$

に置き換え，ゲージ場 $\boldsymbol{A}_\mu$（8 個あることに注意せよ）に以下の変換ルールをもたせることだ．

$$\mathscr{D}_\mu\psi\to S(\mathscr{D}_\mu\psi) \tag{10.81}$$

ここでも（式 (10.58) を参照），これは

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{A}'_\mu=S(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{A}_\mu)S^{-1}+i\left(\frac{\hbar c}{q}\right)(\partial_\mu S)S^{-1} \tag{10.82}$$

を伴う．無限小変換の場合は，式 (10.61) と同一の式を与える．

$$\boldsymbol{A}'_\mu\cong\boldsymbol{A}_\mu+\partial_\mu\phi+\frac{2q}{\hbar c}(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{A}_\mu) \tag{10.83}$$

しかし，今度は，掛け算の表記は以下の簡略化である．

$$(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_i=\sum_{j,k=1}^{8}f_{ijk}B_jC_k \tag{10.84}$$

[*10] 群論の言葉では，$U(3)=U(1)\otimes SU(3)$ だ．

ここで，f_{ijk} は $SU(3)$ の構造定数（式 (8.35)）で，$SU(2)$ の場合の ϵ_{ijk} に相当する（問題 10.18）．

修正されたラグランジアン

$$\mathscr{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu \mathscr{D}_\mu \psi - mc^2\bar{\psi}\psi = [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2\bar{\psi}\psi] - (q\bar{\psi}\gamma^\mu \boldsymbol{\lambda}\psi)\cdot \boldsymbol{A}_\mu \tag{10.85}$$

は，局所 $SU(3)$ ゲージ変換（式 (10.79) と (10.82)）のもとで不変だが，いつものように，その対価としてゲージ場 $\boldsymbol{A}_\mu$（今度は 8 個だ）を導入する．素粒子物理学の言葉になおすと，ちょうど，ワイルの理論における $U(1)$ ゲージ場が光子を記述しているように，これらは 8 個のグルーオンに対応する[*11]．ラグランジアンを完成させるには，グルーオンの自由ラグランジアンを付け加えなければならない．

$$\mathscr{L}_{\text{gluons}} = -\frac{1}{16\pi}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \tag{10.86}$$

ここで，ヤン–ミルズの場合と同様に

$$\boldsymbol{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \boldsymbol{A}^\nu - \partial^\nu \boldsymbol{A}^\mu - \frac{2q}{\hbar c}(\boldsymbol{A}^\mu \times \boldsymbol{A}^\nu) \tag{10.87}$$

である（$SU(3)$ の「掛け算」は式 (10.84) で定義した）．

結論：色力学における完全なラグランジアンは

$$\mathscr{L} = [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2\bar{\psi}\psi] - \frac{1}{16\pi}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot \boldsymbol{F}_{\mu\nu} - (q\bar{\psi}\gamma^\mu \boldsymbol{\lambda}\psi)\cdot \boldsymbol{A}_\mu \tag{10.88}$$

である．$\mathscr{L}$ は局所 $SU(3)$ ゲージ変換に対して不変で，8 個の質量ゼロのベクトル場（グルーオン）と相互作用する 3 個の等質量のディラック場（ある特定のクォークにおける 3 色）を記述する．それは，元のラグランジアン（式 (10.70)）の大域的 $SU(3)$ 対称性が局所的にも保たれるべし，という要請から導き出される．ディラック場は 8 個の色カレント

$$\boldsymbol{J}^\mu \equiv cq(\bar{\psi}\gamma^\mu \lambda\psi) \tag{10.89}$$

を構築する．電流が電磁場の源の役割を果たしたのと同じように，このカレントが色の場（$\boldsymbol{A}_\mu$）の源の役割を果たす．ここで記述した理論はヤン–ミルズのものと構造的にそっくりだ．しかし，この場合，自然界で起きる現象，すなわち強い相互作用の正しい記述になっているとわれわれは信じている（もちろん，式 (10.88) において ψ の複

[*11] すべてのクォークに同じ結合をする「9 番目のグルーオン」が実験的に排除されていることを思い出そう（問題 8.11）．

製 6 個が必要で，それぞれが適切な質量をもち，クォーク 6 フレーバーを記述する).

10.6 ファインマン則

これまで，われわれが扱ってきたラグランジアンは，量子場だけでなく古典場も記述できた．実際，マクスウェルのラグランジアンは，いかなる古典電気力学の教科書にも載っている．古典的場の理論からそれに対応する場の量子論に到達するために，ラグランジアンや場の方程式を修正する必要はないが，むしろ，場の変数を再解釈する必要がある．場は「量子化」され，粒子はそれに付随する場の量子として現れる．すなわち，光子は電磁場 A_μ の量子で，クォークはディラック場の量子で，グルーオンは 8 個の $SU(3)$ ゲージ場の量子で，$W^\pm$ や Z^0 はプロカ場の量子だ．量子化の手続き自体は難解なもので，ここではそれに関して深入りしない [8]．われわれの目的において重要なのは，それぞれのラグランジアンがある特定のファインマン則の書き方を指示しているということだ．ということは，われわれにとって必要なのは，あるラグランジアンによって指示されるファインマン則をどのように得るのかという手順である．

手始めに，$\mathscr{L}$ は 2 種類の項，それぞれの場に対する自由ラグランジアンとさまざまな相互作用項（$\mathscr{L}_{\text{int}}$）からなっていることに注意しよう．前者は，スピン 0 ならクライン–ゴルドンだし，スピン 1/2 ならディラックだし，スピン 1 ならプロカだし，より高次なスピンの理論ではよりエキゾチックな何かになる．いずれにせよ，局所ゲージ対称性その他の方法によって，伝播関数やバーテックス因子を決める．

自由ラグランジアン $\Rightarrow$ 伝播関数
相互作用項 $\Rightarrow$ バーテックス因子

最初に，伝播関数について考えてみよう．

自由ラグランジアンにオイラー–ラグランジュ方程式を適用すると，自由場の方程式（式 (10.13)，(10.15)，(10.22)）を得る．

$$\left[\partial^\mu\partial_\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\phi = 0 \qquad \text{（スピン 0 に対するクライン–ゴルドン方程式）}$$

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\right]\psi = 0 \qquad \text{（スピン 1/2 に対するディラック方程式）}$$

$$\left[\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu\right] = 0 \qquad \text{（スピン 1 に対するプロカ方程式）}$$

対応する「運動量空間」での方程式は，通常の処方箋 $p_\mu \leftrightarrow i\hbar\partial_\mu$ で得られる．

$$[p^2 - (mc)^2]\phi = 0 \qquad (\text{スピン } 0) \tag{10.90}$$

$$[\not{p} - (mc)]\psi = 0 \qquad (\text{スピン } 1/2) \tag{10.91}$$

$$[(-p^2 + (mc)^2)g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu]A^\nu = 0 \qquad (\text{スピン } 1) \tag{10.92}$$

伝播関数は単純に大括弧の中の因子の逆数（に i を乗じる）だ．

$$\frac{i}{p^2 - (mc)^2} \qquad (\text{スピン } 0) \tag{10.93}$$

$$\frac{i}{\not{p} - mc} = i\frac{(\not{p} + mc)}{p^2 - (mc)^2} \qquad (\text{スピン } 1/2) \tag{10.94}$$

$$\frac{-i}{p^2 - (mc)^2}\left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(mc)^2}\right] \qquad (\text{スピン } 1) \tag{10.95}$$

2 番目の場合，この因子は 4×4 の行列で，その逆行列が欲しいということに注意しよう．3 番目の場合は，その因子は 2 階のテンソル（$T_{\mu\nu}$）で，$T_{\mu\nu}(T^{-1})^{\lambda\nu} = \delta^\nu_\mu$ となるような逆テンソル $(T^{-1})_{\mu\nu}$ が欲しい（問題 10.19）．これらは，まさに 6 章，7 章，9 章で扱った伝播関数だ[*12]．プロカ伝播関数（式 (10.95)）で $m \to 0$ とはあきらかにできないので，光子の伝播関数を求めるためには，自由場の方程式（式 (10.22)）に戻らなければならない．

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0 \qquad (\text{質量ゼロでスピン } 1) \tag{10.96}$$

以前に注意を促したように，この式では A^μ は一意的に決まらない．ローレンツ条件（式 (7.82)）

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

を課すと，（式 (10.96) は）

$$\partial^2 A^\nu = 0 \tag{10.97}$$

となる．これは，運動量空間では

$$(-p^2 g_{\mu\nu})A^\nu = 0 \tag{10.98}$$

と書ける．よって，光子の伝播関数は

[*12] 実際のところ，この方法で決めることができるのは，伝播関数掛ける定数だ．というのは，場の方程式はいつもそのような因子が掛けられているからだ．これらの方程式の「正準」形式では，mc あるいは $(mc)^2$ という係数は ± 1 として，符号は $\mathscr{L}$ の質量項と整合するようにしている．他の表式を使うと，わずかに違ったファインマン則にたどり着くが，もちろん，計算結果の反応振幅は変えない．

$$-i\frac{g_{\mu\nu}}{p^2} \qquad \text{（質量ゼロでスピン 1）} \tag{10.99}$$

となる．

バーテックス因子を求めるには，まず，運動量空間（$i\hbar\partial_\mu \to p_\mu$）で $i\mathscr{L}_{\mathrm{int}}$ を書き下して，反応に寄与する場が何かを吟味する．これらによって，相互作用の定性的な構造を決めることができる．たとえば，QED のラグランジアン（式 (10.35)）の場合，

$$i\mathscr{L}_{\mathrm{int}} = -i(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu \tag{10.100}$$

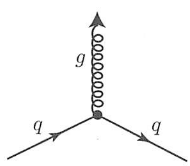
であり，含まれている場は三つある（$\bar{\psi}$，ψ，A_μ）．これが，入ってくるフェルミオン，出て行くフェルミオン，そして光子の三つの線によりつくられるバーテックスを定義する．バーテックス因子自体を求めるには，たんに場を記述する変数を擦り落としてやればよい

$$-i\sqrt{\frac{4\pi}{\hbar c}}q\gamma^\mu = ig_e\gamma^\mu \qquad \text{（QED のバーテックス因子）} \tag{10.101}$$

（光子の場合，実際に擦り落とすのは $\sqrt{\hbar c/4\pi}A_\mu$ だ．余分な因子は CGS 単位系を使っているからで，われわれの目的に対しては，少々厄介なものだ）．同じことが色力学にもいえる（式 (10.88)）．クォーク–グルーオン結合

$$\mathscr{L}_{\mathrm{int}} = -(q\bar{\psi}\gamma^\mu\boldsymbol{\lambda}\psi)\cdot\boldsymbol{A}_\mu \tag{10.102}$$

は，以下のかたちのバーテックスを与える．バーテックス因子は



$$-i\frac{g_s}{2}\gamma^\mu\boldsymbol{\lambda} \tag{10.103}$$

となる（強い力の結合定数は伝統的に因子 2 を伴って定義される．$g_S \equiv 2\sqrt{4\pi/\hbar cq}$，ここで q はラグランジアンに現れる「強荷」である）．しかし，$\mathscr{L}$ にある $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ という項から出てくるグルーオン–グルーオン結合も存在する．というのも，$\mathbf{F}^{\mu\nu}$ は相互作用のない場合の項 $\partial^\mu\boldsymbol{A}^\nu - \partial^\nu\boldsymbol{A}^\mu$ だけでなく，$-2q/\hbar c(\boldsymbol{A}^\mu\times\boldsymbol{A}^\nu)$（式 (10.87)）という相互作用項を含むからだ．それを書き下すと

$$\mathscr{L}_{\mathrm{int}} = \left(\frac{q}{8\pi\hbar c}\right)[(\partial^\mu \boldsymbol{A}^\nu - \partial^\nu \boldsymbol{A}^\mu)\cdot(\boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{A}_\nu) + (\boldsymbol{A}^\mu \times \boldsymbol{A}^\nu)\cdot(\partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu)] - \frac{q^2}{4\pi(\hbar c)^2}(\boldsymbol{A}^\mu \times \boldsymbol{A}^\nu)\cdot(\boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{A}_\nu) \tag{10.104}$$

となる．最初の項は $\boldsymbol{A}^\mu$ の因子を三つもっていて，三つのグルーオンがつくるバーテックス（式 (8.43)）を表している．第 2 項は，四つの $\boldsymbol{A}^\mu$ 因子をもっていて，四つのグルーオンがつくるバーテックス（式 (8.44)）を与える（ラグランジアンからファインマン則を導き出すための練習には，問題 10.20 と 10.21 を参照せよ）．

10.7　質量項

局所ゲージ不変性という原理によって，強い相互作用と電磁相互作用を非常にうまく記述できる．まず第一に，それによって，結合を決める仕組みがわかる（「昔は」$\mathscr{L}_{\mathrm{int}}$ の構築は場当たり的な推測であった）．さらに，トフーフトたちが 1970 年代初頭に証明したように [9]，ゲージ理論はくりこみ可能だ．しかし，ゲージ場が質量ゼロでなければならないという事実によって，弱い相互作用に対する適用は停滞した．プロカラグランジアン中の質量項は局所ゲージ不変になっておらず，光子やグルーオンが質量ゼロである一方，$W^\pm$ や Z^0 がまったくもって質量ゼロではないということを思い出そう．そこで，疑問が生じた．質量をもつゲージ場を収容してゲージ理論を救うことができるのか．答えはイエスだ．しかし，自発的対称性の破れとヒッグス機構を利用するその方法はすごく狡猾（こうかつ）で，ラグランジアン中の質量項をどのように同定するかについて非常に注意深く考えることから始めなければならない．

たとえば，スカラー場 ϕ に関する以下のラグランジアンが与えられているとしよう．

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + e^{-(\alpha\phi)^2} \tag{10.105}$$

ここで，α は（実数の）定数だ．どこに質量項があるだろうか．一見，それらしいものはなく，これは質量ゼロの場だと結論づけるかもしれない．しかし，それは間違いだ．というのは，そこにある指数関数を展開すると，ラグランジアンは

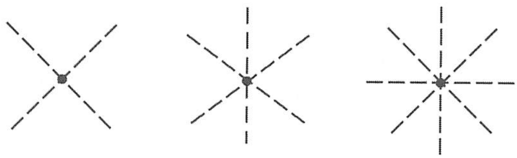
$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + 1 - \alpha^2\phi^2 + \frac{1}{2}\alpha^4\phi^4 - \frac{1}{6}\alpha^6\phi^6 + \cdots \tag{10.106}$$

というかたちを取る．1 は気にしなくてよいが（$\mathscr{L}$ 中の定数項は場の方程式に何の影響も与えない），その次の 2 項は $\alpha^2 = (1/2)(mc/\hbar)^2$ とすると，クライン–ゴルドンラグランジアン（式 (10.11)）中の質量項にそっくりだ．あきらかに，このラグランジ

アンは

$$m = \sqrt{2}\alpha\hbar/c \tag{10.107}$$

という質量をもつ粒子を記述する．高次の項は



などのかたちを取る結合を表現する．これはもちろん現実的な理論のはずがない．ここで見せたかったのは，ラグランジアン中の質量項がどのように「隠れているか」という例だ．それをあきらかにするために，$\mathscr{L}$ を ϕ のべき乗に展開し，ϕ^2 に比例する項を取り出した（一般に，ϕ，ψ，A_μ，あるいはそれ以外のなんであれ，質量項は場の 2 次の項だ）．

しかし，ここには深遠，かつ微妙な問題が隠れている．それを以下のラグランジアンを使って説明する．

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4 \tag{10.108}$$

ここで，μ と λ は（実数の）定数である．第 2 項が質量のように（そして，第 3 項が相互作用項のように）見える．しかし，ちょっと待って！　符号が反対だ（式 (10.11) と比較して）．もしそれが質量項ならば m が虚数になってしまいナンセンスだ．では，このラグランジアンをどのように解釈すべきなのだろうか*13．この質問に答えるには，ファインマンの処方箋がまさに摂動の手続きであり，基底状態（「真空」）から始めて，その状態からの変動を場として取り扱っているということを理解しなければならない．これまでに考えてきたラグランジアンでは，基底状態，すなわち最小のエネル

*13 ラグランジアンを入力として，そのラグランジアンが表現する宇宙をつくり出す，そのような巨大なコンピューター制御の工場を神がもっていると想像してみると楽しい．たいてい，神のコンピューター工場に難しい問題はなく，たとえば，式 (10.35) のマクスウェルラグランジアンを与えれば，電子と陽電子と光子が相互作用する電磁気的な宇宙をすぐにつくり出す．たまには，少し時間がかかる．たとえば，式 (10.105) のラグランジアンだと「隠れた」質量項を解読するまでの間，最初，コンピューター工場は混乱する．そして，たまには，エラーメッセージを返す．「このラグランジアンは生成可能な宇宙を記述していません．文法の間違い，あるいは符号が間違っていないかを確認してください．」たとえば，もし λ の項を付けずに式 (10.108) のラグランジアンを入力すると，そういうメッセージが返ってくるだろう．

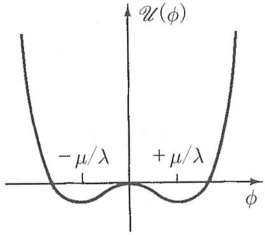


図 10.1　$\mathscr{U}(\phi)$ のグラフ（式 (10.110)）

ギーをもつ場の配位はいつも $\phi = 0$ という自明なものであった．しかし，式 (10.108) のラグランジアンでは，$\phi = 0$ が基底状態ではない．真の基底状態を決めるためには，$\mathscr{L}$ を「運動」項（$(1/2)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$）引く「ポテンシャル」項（式 (10.4) の古典物理のラグランジアンをヒントにした）と書き，

$$\mathscr{L} = \mathscr{T} - \mathscr{U} \tag{10.109}$$

そして，$\mathscr{U}$ の最小値を探す．いまの場合，

$$\mathscr{U}(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4 \tag{10.110}$$

であり，最小値を取るのは

$$\phi = \pm\mu/\lambda \tag{10.111}$$

のときだ（図 10.1）．ファインマンの計算法はこれら基底状態のどちらかからのずれとして定式化されなければならない．そこで，以下のように定義される新たな場の変数 η を導入する．

$$\eta \equiv \phi \pm \frac{\mu}{\lambda} \tag{10.112}$$

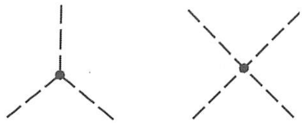
η の関数としてみると，ラグランジアンは

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \mu^2\eta^2 \pm \mu\lambda\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4 + \frac{1}{4}(\mu^2/\lambda)^2 \tag{10.113}$$

となる．今度は第 2 項が正しい符号をもった質量項で，（式 (10.11) と比べると）粒子の質量が

$$m = \sqrt{2}\mu\hbar/c \tag{10.114}$$

であることがわかる．一方で，第 3 項と第 4 項は



というかたちをした結合を表現している（最後の項は定数なので，意味をもたない）．

これら二つのラグランジアン（式 (10.108) と (10.113)）は物理的に完全に同じ系を表現しているということを強調しておく．われわれがやったことは表記を変えた（式 (10.112)）にすぎない．しかし，最初のものはファインマンの計算法に適していない（専門的には，不安定点での展開なので，ϕ の摂動展開が収束しない）．2 番目の式でのみ，質量とバーテックス因子を読み取ることができるのだ．

結論：ラグランジアンの質量項を同定するためには，まずは基底状態がどこか（$\mathscr{U}$ が最小となる場の配位）を見定め，その最小からのずれ η の関数として $\mathscr{L}$ を再表記する．η のべき乗展開をすると，η^2 の項の係数として質量を得る．

10.8　自発的対称性の破れ

われわれが考察してきた例は他の重要な現象も提示している．自発的対称性の破れだ．元のラグランジアン（式 (10.108)）は ϕ に関して偶だ．つまり，$\phi \to -\phi$ としても変わらない．しかし，再構成したラグランジアン（式 (10.113)）は η に関して偶になっていない．対称性が「破れて」いる．なぜこのようなことが起きたのだろうか．それは，真空（二つの基底状態のうちどちらを選んだとしても）がラグランジアンの対称性を共有していないからだ（すべての基底状態を集めればもちろん対称だが，ファインマンの定式化には，真空のどれか一つを使わなければならず，それが対称性を壊してしまう）．これを「自発的」対称性の破れとよぶ．なぜなら，外的要因が働いていないからだ（外的要因の例は重力だ．重力は部屋の 3 次元対称性を破って「上」と「下」を「左」と「右」とはまったく違うものにしている）．逆にいうと，その系の本当の対称性は，ある特定の（非対称な）基底状態を任意に選ぶことで「隠されて」しまうのだ．たくさんの物理現象で自発的対称性の破れの例がある．たとえば，細いプラスチックの細い板（たとえば，短い定規）を考えてみよう．もしその両端を押し縮めたら，その棒はしなって湾曲するだろう．しかし，それは右と同じように左にも曲がるだろう．その両方が系の基底状態で，どちらを選んでも左右の対称性を破る（図 10.2）．

いま考察した自発的対称性の破れは，二つの基底状態をもつ離散的な対称性だ．連

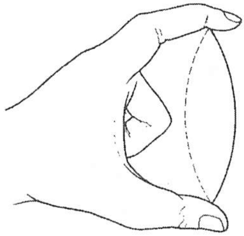


図 10.2　プラスチックの細い板の自発的対称性の破れ

続的な対称性を考えると，もっと興味深いことが起こる（図 10.2 のプラスチックの細い板をプラスチックの棒，たとえば，編棒に置き換えてみよう．すると，その棒は，たんに左あるいは右だけではなくあらゆる方向に曲がることができる*14）．連続的な対称性を自発的に破るラグランジアンを構築するのはたやすい．たとえば，

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2) + \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2+\phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda^2(\phi_1^2+\phi_2^2)^2 \tag{10.115}$$

である．これは，二つの場 ϕ_1 と ϕ_2 があることを除けば，式 (10.108) と同じで，$\mathscr{L}$ がそれらの 2 乗和だけを含むので，ϕ_1 と ϕ_2 空間における回転のもとで対称だ*15．

今度は，「ポテンシャルエネルギー」を表現する関数は

$$\mathscr{U} = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2+\phi_2^2) + \frac{1}{4}\lambda^2(\phi_1^2+\phi_2^2)^2 \tag{10.116}$$

であり，最小値は，半径 μ/λ の円に沿ったところにある（図 10.3）．

$$\phi_{1_{\min}}^2 + \phi_{2_{\min}}^2 = \mu^2/\lambda^2 \tag{10.117}$$

ファインマンの計算法に従うと，ある特定の基底状態（「真空」）の周りで展開しなければならず，ここでは

$$\phi_{1_{\min}} = \mu/\lambda, \qquad \phi_{2_{\min}} = 0 \tag{10.118}$$

を選ぶ．以前と同様に，新たな場 η と ξ を導入し，それらはこの基底状態からの変動だ．

$$\eta \equiv \phi_1 - \mu/\lambda, \qquad \xi \equiv \phi_2 \tag{10.119}$$

*14 より洗練された例は強磁性体だ．基底状態ではすべてのスピンが同じ方向を向いているが，その方向を決めたのは過去の偶然だ．理論は対称だが，ある与えらえた鉄の切れ端は特定の方向を選んでいて，それは（「自発的に」）対称性を破っている．

*15 群論的には，それは $SO(2)$ 変換のもとで不変だ．つまり，$\phi_1 \to \phi_1\cos\theta + \phi_2\sin\theta$ と $\phi_2 \to -\phi_1\sin\theta + \phi_2\cos\theta$ のいかなる「回転角」θ に対しても不変である（問題 4.6 を参照）．

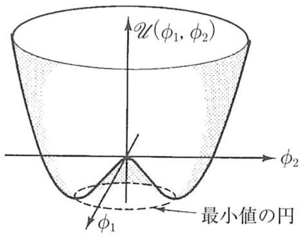


図 10.3 ポテンシャル関数（式 (10.116)）

ラグランジアンをこれらの新しい変数の関数として書き直すと

$$\mathscr{L} = \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2\right] + \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi)\right] \\ - \left[\mu\lambda(\eta^3 + \eta\xi^2) + \frac{\lambda^2}{4}(\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2\xi^2)\right] + \frac{\mu^4}{4\lambda^2} \tag{10.120}$$

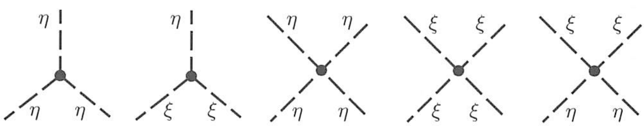
を見出す（問題 10.22）．最初の項は場 η の自由クライン–ゴルドンラグランジアン（式 (10.11)）で，あきらかに質量

$$m_\eta = \sqrt{2}\,\mu\hbar/c \tag{10.121}$$

をもっている（式 (10.114) と同様だ）．第 2 項は場 ξ の自由ラグランジアンで，あきらかに質量をもっていない．

$$m_\xi = 0 \tag{10.122}$$

第 3 項は 5 個の結合を定義する（最後の定数はもちろん意味をもたない）．



このかたちでは，ラグランジアンはまったく対称に見えない．式 (10.115) の対称性はある特定の真空状態を選んだことによって破れた（あるいは，むしろ「隠された」）のだ．

ここで気をつけるべき重要な点は，場の一つ（ξ）は自動的に質量ゼロになることだ．これは偶然ではない．連続の大域的対称性が自発的に破れると，一つ以上の質量をも

たないスカラー（スピン 0）粒子（それを「ゴールドストンボソン」*16 とよぶ）がつねに現れることが示される（ゴールドストン定理 [10]）*17．さて，これは大問題だ．われわれは，弱い相互作用のゲージ場の質量を説明するために，自発的対称性の破れという仕組みが使えると願ってきたが，そうすると質量ゼロのスカラーの導入につながることがわかってしまった．しかし，われわれが知っている素粒子の名簿にはそんなものはない*18．だが，大丈夫だ．この話には最後に驚くべきどんでん返しがある．自発的対称性の破れというアイデアを局所ゲージ不変性に適用すると，それが起こる．

10.9　ヒッグス機構

10.8 節で見てきたラグランジアンは，二つの実場 ϕ_1 と ϕ_2 を合わせて一つの複素場にすると，もっとすっきりと書き直すことができる．

$$\phi \equiv \phi_1 + i\phi_2 \tag{10.123}$$

なので，

$$\phi^*\phi = \phi_1^2 + \phi_2^2 \tag{10.124}$$

である．この表記では（たんに表記だけである），ラグランジアン（式 (10.115)）は

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^*\phi) - \frac{1}{4}\lambda^2(\phi^*\phi)^2 \tag{10.125}$$

となって，回転対称性である $SO(2)$ が自発的に破れて，$U(1)$ 位相変換のもとでの不変になる．

$$\phi \to e^{i\theta}\phi \tag{10.126}$$

いまはスピノルではなくスカラーについてであることを除くと，これこそまさに 10.3 節で考察した対称性にほかならない．この系を局所ゲージ変換

$$\phi \to e^{i\theta(x)}\phi \tag{10.127}$$

*16 訳注：近年は南部–ゴールドストンボソン，同様に南部–ゴールドストン定理とよぶことが多い．

*17 直感的には，これは ξ 方向への動きには抵抗がないという事実に関係している．曲がった編棒をぐるぐる回すとそれは軸を中心に自由に回転する一方で，半径方向への動きは棒の復元力のため振動することになる．

*18 そういう粒子が検出を逃れていたとは想像しがたい．重い粒子ならいつでも可能だ．それを生成するためのエネルギーがたんに足りなかったのだろう．しかし，質量ゼロの粒子は「消失」エネルギーや運動量というかたちでだけかもしれないが，間違いなくどこかに現れていたはずである．

のもとで対称にするには，いつものように質量をもたないゲージ場 A_μ を導入し，式 (10.125) の微分を共変微分（式 (10.38)）

$$\mathscr{D}_\mu = \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu \tag{10.128}$$

に置き換えればよい．以上から

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu - \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\phi^*\right]\left[\left(\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c}A^\mu\right)\phi\right] \\ + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^*\phi) - \frac{1}{4}\lambda^2(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{10.129}$$

となる．

いまから 10.8 節でやった手順をたんにもう一回くり返して，それらを局所不変なラグランジアン（式 (10.129)）に適用する．新たな場

$$\eta \equiv \phi_1 - \mu/\lambda, \qquad \xi \equiv \phi_2 \tag{10.130}$$

を定義すると（式 (10.119) と比較せよ），ラグランジアンは以下になる（問題 10.25）．

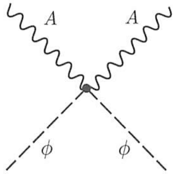
$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \mu^2\eta^2\right] + \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)(\partial^\mu\xi)\right] \\ &+ \left[-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu\right] \\ &+ \left\{\frac{q}{\hbar c}[\eta(\partial_\mu\xi) - \xi(\partial_\mu\eta)]A^\mu + \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2\eta(A_\mu A^\mu)\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2(\xi^2+\eta^2)(A_\mu A^\mu) - \lambda\mu(\eta^3 + \eta\xi^2) - \frac{1}{4}\lambda^2(\eta^4 + 2\eta^2\xi^2 + \xi^4)\right\} \\ &+ \left(\frac{\mu}{\lambda}\frac{q}{\hbar c}\right)(\partial_\mu\xi)A^\mu + \left(\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2\end{aligned} \tag{10.131}$$

1 行目は以前（式 (10.120)）と同じで，質量 $\sqrt{2}\mu\hbar/c$ のスカラー粒子（η）と質量ゼロのゴールドストンボソン（ξ）を表している．2 行目は自由ゲージ場 A_μ を記述しているが，素晴らしいことに，質量を獲得している（式 (10.121) のプロカのラグランジアンと比べてみよ）．

$$m_A = 2\sqrt{\pi}\left(\frac{q\mu}{\lambda c^2}\right) \tag{10.132}$$

中括弧内の項は ξ, η, そして A_μ のさまざまな結合を指定している（問題 10.26）．A_μ の質量がどこから来たのかを調べてみるのは面白い．元のラグランジアン（式 (10.129)）は $\phi^*\phi A_\mu A^\mu$ という項を含んでいて，自発的対称性の破れがないときは，以下の結合

を表現している．しかし，基底状態が「中心からずれた」ところに移動すると，ϕ_1 場

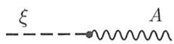


が定数を拾って（式 (10.130)），この部分がプロカの質量項としてラグランジアンに現れる．

しかしながら，まだ不必要なゴールドストンボソン（ξ）が存在する．さらに，見た目の怪しい物理量

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\frac{q}{\hbar c}\right)(\partial_\mu \xi)A^\mu \tag{10.133}$$

が $\mathscr{L}$ にはある．これはどう取り扱かったらよいのだろうか．もしそれを相互作用とみなすと，それは以下のかたちのバーテックスになり，



そこでは，ξ が A_μ に変化している．二つの別々の場に双線形になっているそのような項が意味するのは，理論中の基本粒子を間違って同定してしまったということだ（問題 10.23）．どちらの困難も $\xi = \phi_2$ の場に関与しているので，どちらも，$\mathscr{L}$（式 (10.129) の元々のかたち）の局所ゲージ不変性を利用して，この場を消し去る変換をすることで解決できる．式 (10.126) を実部と虚部について書き下すと，

$$\begin{aligned}\phi \;\rightarrow\; \phi' &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\phi_1 + i\phi_2)\\ &= (\phi_1\cos\theta - \phi_2\sin\theta) + i(\phi_1\sin\theta + \phi_2\cos\theta)\end{aligned} \tag{10.134}$$

となる．

$$\theta = -\tan^{-1}(\phi_2/\phi_1) \tag{10.135}$$

と選べば，ϕ' が実数になり，つまり，$\phi_2' = 0$ だ．ゲージ場 A_μ もそれに従って変換するが（式 (10.34)），ラグランジアンは新たな場を使い，古い場で書かれていたときと同じかたちで書かれる．(それこそが，$\mathscr{L}$ が不変であることを意味している)．唯一の違いは，今度は ξ がゼロだということだ．この特定のゲージでは，ラグランジアン

（式 (10.131)）は

$$\mathscr{L} = \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \mu^2\eta^2\right] + \left[-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu\right] + \left\{\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2 \eta(A_\mu A^\mu) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2 \eta^2(A_\mu A^\mu) - \lambda\mu\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4\right\} + \left(\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2 \tag{10.136}$$

になる．ゲージをうまく取ることで，$\mathscr{L}$ の中のゴールドストンボソンと，あってはならない項を取り除いた．残ったのは，一つの質量をもつスカラー場 η（「ヒッグス」粒子）と質量をもつゲージ場 A_μ である．

以下をよく理解してほしい．式 (10.129) と (10.136) のラグランジアンはまったく同じ物理システムを記述している．われわれがやったことは，便利なゲージ（式 (10.135)）を選んで，ある特定の基底状態（式 (10.130)）からのずれとして場を書き直しただけである．明白だった対称性を犠牲にして，物理量が何かはっきりわかる表記を採用し，それによってファインマン則をより直接的に取り出すことができるようになった．しかし，それは依然として同じラグランジアンだ．これについて考えるためのわかりやすい方法がある．質量をもたないベクトル場には二つの自由度（横偏極）がある．A_μ が質量を獲得すると，3 番目の自由度（縦偏極）も加わる．この余分な自由度はどこから来たのだろうか．

答え：理論から消え去ったゴールドストンボソンからである．ゲージ場はゴールドストンボソンを「食べて」，それによって質量と 3 番目の偏極状態の両方を得たのだ[*19]．これが有名なヒッグス機構で，局所ゲージ不変性と自発的対称性の破れの結婚によって生まれた素晴らしい子孫だ [11]．

標準模型によると，ヒッグス機構が弱い相互作用のゲージボソン（$W^\pm$ と Z^0）に質量を与えている．詳細はまだ推論の段階だ[*20]．ヒッグス粒子は実験的に未発見で（現存する加速器で生成するにはたぶん重すぎるのだ），ヒッグス「ポテンシャル」$\mathscr{U}$ もまだわかっていない（$\mathscr{U} = -(1/2)\mu^2(\phi^*\phi) + (1/4)\lambda^2(\phi^*\phi)^2$ はたんに議論のために使った）[*21]．もしかすると，実際にはたくさんの種類のヒッグス粒子があるかもしれ

[*19] ある特定のゲージを採用する必要があるわけではない．しかし，そうしないと理論が物理的には存在しない「幽霊」粒子を含んでしまうので，最初から明示的に取り除いてしまう方がすっきりとする．

[*20] 訳注：2012 年に LHC でヒッグス粒子は発見されて，$W^\pm$ と Z^0 の質量の起源がヒッグス機構であることはほぼ実証された．ただし，ヒッグスポテンシャルのかたちはまだ測定されていない．

[*21] 実際のところ，理論がくりこみ可能であるためには，ポテンシャルは場の 4 次（まで）でなければならない．

ないし，複合粒子かもしれない．しかし，それは気にしなくてよい．大切なのは原理的にゲージ場に質量を授ける方法を見つけたということだ*22．それが，強い相互作用と電磁気力だけでなく，弱い相互作用まで含めて，基本的な相互作用すべてが局所ゲージ理論によって記述できるという保証になっているのだ [12].

参考書

[1] 古典力学におけるラグランジアンの定式化についての入門としては，以下を参照．J. R. Taylor: Classical Mechanics (University Science Books, 2005); (a) J. B. Marion and S. T. Thornton: Classical Dynamics of Particles and Systems, 4th edn (Harcourt, 1995).

[2] オイラー–ラグランジュ方程式は，結局，最小作用の原理から導き出せる．以下を参照．C. P. Poole, J. L. Sapko and H. Goldstein: Classical Mechanics, 3rd edn (Addison-Wesley, 2002); (a) C. Lanczos: The Variational Principles of Mechanics (Dover, 1986).

[3] H. Weyl: Annals of Physics, **59**, 101 (1919)．以下も役立つ．(a) H. Al-Kuwari and M. O. Taha: American Journal of Physics, **59**, 4 (1991); (b) K. Moriyasu: An Elementary Primer for Gauge Theory (World Scientific, 1983).

[4] C. N. Yang and R. L. Mills: Physics Review, **96**, 191 (1954)．歴史的な解説としては以下を参照．(a) R. Mills: American Journal of Physics, **57**, 493 (1989); (b) G.'t Hooft: Fifty Years of Yang-Mills Theory (World Scientific, 2005).

[5] たとえば，C. Chevalley: Theory of Lie Groups (Princeton University Press, 1946).

[6] 未公開の研究ノート N. A. Wheeler: 'Classical Chromodynamics' and 'Bare Bones of the Classical Theory of Gauge Fields' (Reed College, 1981) には，局所ゲージ理論がきわめて明瞭に記述されている．

[7] A. Actor: Reviews of Modern Physics, **51**, 461 (1979).

[8] 詳細は，序章の参考文献などにある場の量子論の論文に載っている．

[9] G.'t Hooft: Nuclear Physics, B **33**, 173 (1971); B **35**, 167 (1971). 以下にも再掲．(a) C. H. Lai (ed): Gauge Theory of Weak and Electromagnetic Interactions (World Scientific, 1981).

[10] J. Goldstone: Nuovo Cimento, **19**, 154 (1961); J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg: Physics Review, **127**, 965 (1962).

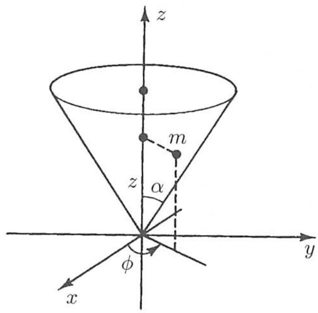
[11] P. W. Higgs: Physics Letters, **12**, 132 (1964); F. Englert and R. Brout: Physical Review Letters, **13**, 321 (1964).

[12] グラショー，ワインバーグ，サラムの電弱理論のヒッグス機構の詳しい応用については，たとえば，F. Halzen and A. D. Martin: Quarks and Leptons (John Wiley & Sons, 1984) Sect. 15 を参照．

*22 標準模型では，ヒッグス粒子がクォークとレプトンの質量の起源にもなっている．それらは初めは質量ゼロであるが，ヒッグス粒子との湯川結合（問題 10.21 参照）があると仮定されている．ヒッグス場が自発的対称性の破れによって「ずらされる」（式 (10.130)）と，湯川結合は二つに分かれて，片方は真の相互作用になり，もう片方が場 ψ の質量項になる．これはうまいアイデアだが，フェルミオンの質量を計算する手助けにはならない．湯川結合定数自体がわかっていないからだ．ヒッグス粒子が実際に発見されて初めて（もし発見されれば），これらすべてを実証することができる．12 章を参照せよ．

問　題

10.1 ラグランジアンによる定式化の一つの利点は，特定の座標系に依存しないことである．式 (10.6) の q は，デカルト座標，極座標，粒子の位置を指定するために使用できる他の任意の変数のどれでもよい．たとえば，下図のように，軸を上に向けて取り付けられた円錐の内側の面に無摩擦で摺動（しょうどう）する粒子の動きを解析したいとする．



(a) T と U を，z，θ，α（始状態の円錐の角度），m（粒子の質量），g（重力加速度）を用いて表せ．

(b) ラグランジアンを構成して，オイラー–ラグランジュ方程式を適応し，$z(t)$，$\psi(t)$ に対する微分方程式を求めよ．

(c) $L = (m\tan^2\alpha)z^2\phi$ が運動の定数であることを示せ．量は何か．物理量に対応するか．

(d) (c) の結果を用いて z の式から ψ を消去せよ．（$z(t)$ の 2 階微分方程式が残るだろう．問題をさらに追求したい場合は，エネルギー保存則を頼りに z の 1 次方程式を得るのが最も簡単である．）

10.2 式 (10.17) を導出せよ．

10.3 式 (10.19) からスタートして，$\partial_\mu A^\mu = 0$ を示せ．そして A_μ の各成分がクライン–ゴルドン方程式 $\Box A^\nu + (mc/\hbar)^2 A^\nu = 0$ を満たすことを示せ．

10.4 ディラックラグランジアン（式 (10.14)）は ψ と $\bar{\psi}$ を非対称に取り扱う．対称に取り扱うために修正されたラグランジアン

$$\mathscr{L} = \frac{i\hbar c}{2}[\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi] - (mc^2)\bar{\psi}\psi$$

を用いる人もいる．この $\mathscr{L}$ にオイラー–ラグランジュ方程式を適応せよ．そして，それがディラック方程式（式 (10.15)）とその随伴になることを示せ．

10.5 複素場のクライン–ゴルドンラグランジアンは，

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}(mc/\hbar)^2\phi^*\phi$$

である．ϕ と ϕ^* を独立な場の変数として扱い，それぞれの場の方程式を導出し，それらの方程式が無矛盾であることを示せ（すなわち，片方の複素共役が残りの片方になる）．

10.6 オイラー–ラグランジュ方程式を式 (10.33) に適用することで，電磁気結合をもつディラック方程式を導け．

10.7 ディラックカレント（式 (10.36)）が，連続の方程式（式 (10.25)）を満たすことを示せ．

10.8 複素クライン–ゴルドンラグランジアン（問題 10.5）は大域的ゲージ変換 $\phi \to e^{i\theta}\phi$ のもとで不変である．局所ゲージ不変性を課して，完全なゲージ不変ラグランジアンを構築し，カレント密度 J^μ を求めよ．ϕ に対するオイラー–ラグランジュ方程式を用いて，このカレントが連続の式 (10.25) を満たすことを示せ．[注意：カレントは式 (10.24) で定義され，式 (10.23) ではない．前者は後者から（普通に）得られるが，J^μ が A^μ にあらわに依存するときはそうではない．この（まれな）状況では，A^μ に比例した $\mathscr{L}$ の項を選択するだけではよくない．むしろ，オイラー–ラグランジュ方程式を使って $\partial F^{\mu\nu}$ を決定し，そこからカレントを得る必要がある.]

10.9 **(a)** 場の変数 (ϕ_i) が微小大域的変換 $\delta\phi_i$ をすることを想定する．ラグランジアン $\mathscr{L}(\phi_i, \partial_\mu\phi_i)$ が以下の量だけ変化することを示せ．

$$\delta\mathscr{L} = \partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i\right\}$$

とくに，ラグランジアンがこの変換のもとで不変であるとき，$\delta\mathscr{L} = 0$ であり，かつ中括弧の中が保存カレントになる（すなわち，連続の方程式に従う）．より正確には，もし変換 $\delta\phi_i$ がパラメーター $\delta\theta$ で特定される場合，ネーターカレントは

$$J^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\frac{\delta\phi_i}{\delta\theta}$$

となる（特定の状況においては，全体に掛かる定数まで，便宜上このまま使われる）．これが，ネーターの定理 [3] の本質であり，ラグランジアンの対称性と保存則を関連づけている．

(b) ネーターの定理をディラックラグランジアン（式 (10.14)）に適用させて，大域的位相不変に対応する保存カレントを構築せよ（式 (10.26)）．電気カレント（式 (10.36)）と比較せよ．

(c) 同様に，問題 (10.8) の複素クライン–ゴルドンラグランジアンにネーターの定理を適用せよ．

10.10 式 (10.51) を導出せよ．

10.11 式 (10.54) から (10.56) を用いて，式 (10.57) から式 (10.58) を導け．

10.12 ヤン–ミルズ理論での

$$\boldsymbol{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \boldsymbol{A}^\nu - \partial^\nu \boldsymbol{A}^\mu$$

の定義を考える．

(a) 微小ゲージ変換（式 (10.61)）のもとでの $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$ の変換則を求めよ．

(b) この場合の，$\mathscr{L}_A$（式 (10.63)）の微小変換則を求めよ．このラグランジアンは不変だろうか．

[答え：(a) $$\boldsymbol{F}^{\mu\nu} \to \boldsymbol{F}^{\mu\nu} + \frac{2g}{\hbar c}[\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{F}^{\mu\nu} + \boldsymbol{A}^\mu\times\partial^\nu\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{A}^\nu\times\partial^\mu\boldsymbol{\lambda}] \tag{10.137}$$

(b) $$\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu} \to \boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu} + \frac{8g}{\hbar c}(\boldsymbol{A}_\nu\times\boldsymbol{F}^{\mu\nu})\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\lambda} \tag{10.138}$$]

10.13 式 (10.61) と (10.65) から式 (10.66) を導出せよ．

10.14 以下の手順で，ゲージ場のラグランジアン（式 (10.63)）が有限局所ゲージ変換のもとで不変であることを証明せよ．

(a) 式 (10.58) と (10.65) を用いて

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{F}^{\mu\nu\prime} = S(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{F}^{\mu\nu})S^{-1}$$

となることを示せ．[$\partial_\mu(S^{-1}S) = 0 \Rightarrow (\partial_\mu S^{-1})S = -S^{-1}(\partial_\mu \mathrm{S})$ に注目.]

(b) したがって，

$$\mathrm{Tr}[(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{F}^{\mu\nu})(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu})]$$

が不変であることを示せ．

(c) 問題 4.20 (c) を用いて，(b) のトレースが $2\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ となることを示せ．

10.15 オイラー–ラグランジュ方程式を式 (10.69) のラグランジアンに適用する．通常の組み合わせ（式 (7.71)，(7.72)，(7.79)）を用いて，古典的なヤン–ミルズ理論としての「マクスウェル方程式」を導け．［三つの電荷密度，三つの電流密度，三つのスカラーポテンシャル，三つのベクトルポテンシャル，三つの「電場」，三つの「磁場」がこの理論にあることに注目.］（電気力学とは異なり，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の発散と回転は必然的にポテンシャルを含む.）

10.16 任意の 3×3 のエルミート行列は，単位行列と八つのゲルマン行列（式 (10.76)）の線形結合で書けることを示せ．

10.17 **(a)** 任意の行列 A について $\det(e^A)=e^{\mathrm{Tr}(A)}$ が成り立つことを示せ．［ヒント：まず対角行列を調べる．次に任意の対角化可能な行列（$S^{-1}AS=D$，D は対角行列で，S は何かの行列）に拡張して，$\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(D)$，かつ $S^{-1}e^AS=e^D$ であることを，それゆえ $\det(e^A)=\det(e^D)$ であることを示す．もちろんすべての行列が対角化できるわけではない．しかし，どの行列もジョルダン標準形（$S^{-1}AS=J$，このとき，J は対角成分と対角線のすぐ隣にあるいくつかの 1 からできた行列）で表すことができる．そこから始めよ．

(b) $e^{i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}}$（式 (10.78)）の行列式が 1 であることを示せ．

10.18 式 (10.81) からスタートして，式 (10.82) と (10.83) を導出せよ．

10.19 プロカ伝播関数（式 (10.95) が，本文でいうところの式 (10.92) のテンソルの逆数であることを確認せよ．

10.20 ABC 理論（6 章）のラグランジアンを構築せよ．

10.21 以下の湯川ラグランジアンの物理的解釈を与えよ．

$$\mathscr{L}=\left[i\hbar c\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi-m_1c^2\bar\psi\psi\right]+\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)-\frac{1}{2}\left(\frac{m_2c}{\hbar}\right)^2\phi^2\right]-\alpha_Y\bar\psi\psi\phi \tag{10.139}$$

粒子のスピンと質量とは何か．それらの伝播関数は何か．それらの相互作用についてファインマン図を描き，バーテックスの因子を決めよ．

10.22 式 (10.120) を導出せよ．

10.23 式 (10.119) の代わりに

$$\psi_1\equiv(\eta+\xi)/\sqrt{2},\qquad \psi_2\equiv(\eta-\xi)/\sqrt{2}$$

を基本的な場に取る．ψ_1，ψ_2 についてのラグランジアン（式 (10.120)）を求めよ．
［コメント：一見，二つの質量場があり，ゴールドストンの定理から逃れられそうに思える．残念ながら，$-\mu_2\psi_1\psi_2$ というかたちの項もある．もしこれを相互作用として解釈すると，ψ_1 が ψ_2 になり，逆も同様である．これは，どちらも独立した自由粒子として存在しないことを意味する．むしろこの表現は，質量行列（式 (10.45)）の非対角項として解釈されるべきであり，理論における基本的な場を誤って識別したことを示している．物理的な場は M が対角であり，一方から他方への直接遷移が生じないものである．4.4.3 項で，このような状況に遭遇した．$K_0\leftrightarrow\bar K_0$ を見つけたので，これらは物理的な粒子状態ではない．その代わりに，質量行列が対角であるという観点から，線形結合 K_1 および K_2 が「真の」粒子である.］

10.24 式 (10.115) からの議論を三つの場（ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3）に一般化する．三つの粒子の質量はいくつか．またこの場合いくつのゴールドストンボソンが存在するだろうか．

10.25 式 (10.129)，(10.130) からスタートして，式 (10.131) を導出せよ．

10.26 式 (10.131) の中括弧内のすべての相互作用の基本バーテックスを書け．また，式 (10.136) で残っているものを丸で囲め．