8.7. 外場による散乱

(電磁場を量子化, 光子の生成 消滅演算子で記述)

- "外部"の電磁場 $A_e^{\alpha}(x)$ による電子・陽電子の散乱

e.g.) 重い原子核の周囲に生じる静的 Coulomb場

⇓

QEDの S 行列展開 (8.84) $(-i \to ie,\ A \to A + A_e)$

e.g.) 静的な外場による電子の散乱 ((8.85), 外場をFourier変換した運動量空間のポテンシャルを導入)

、散乱への最低次の寄与：(8.84)の1次の項 (8.86)

	運動量	スピノル	
始 $\lvert i\rangle$	$p=(E,\mathbf{p})$	$u_r(\mathbf{p})$	$\lvert i\rangle = \lvert e^- \mathbf{p}\rangle = c_r^{+}(\mathbf{p})\lvert 0\rangle$
終 $\lvert f\rangle$,	$p'=(E',\mathbf{p}')$	$u_s(\mathbf{p}')$	$\lvert f\rangle = \lvert e^- \mathbf{p}'\rangle = c_s^{+}(\mathbf{p}')\lvert 0\rangle$

$\langle f | S_e^{(1)} | i \rangle$ ：量子化された場による電子の散乱と似た方法で評価

運動量移行

$$\langle f | S_e^{(1)} | i \rangle = ie \int d^4x \langle 0 | \left(\frac{m}{VE'}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}_s(\mathbf{p}') e^{ip'x} A_e(x) \left(\frac{m}{VE}\right)^{\frac{1}{2}} u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} | 0 \rangle$$

※外場の運動量を無視 (反跳くを無視, 弾性散乱) → P の δ 関数はエネルギーのみ,
運動量移行 $\mathbf{q} = \mathbf{p}'-\mathbf{p}$, $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \to$ 8.87, 88

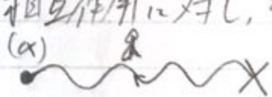
- これらを 7.3.節の Feynman規則への2つの変更として表現

(i) Feynmann振幅 $\mathcal{M}$ と $\langle f | S | i \rangle$ を関係づける式 (7.45) で
$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \to (2\pi)\delta(E_i - E_f)$ と書き換える.

(ii) Feynman規則 1~8 に, 外線についての規則 4 を補足する規則 9.

9. 荷電粒子と静的な外場 $A_e(\mathbf{x})$ との各相互作用に対し, 次の因子を充てる

$$A_{e\alpha}(\mathbf{q}) = \int d^3x\, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} A_{e\alpha}(\mathbf{x})$$



(8.90)

(vertexで粒子のエネルギー保存)

・任意の静的な外場について、$\mathcal{M}$から断面積を導出 (8.1と似ている)

遷移確率： $w = \frac{1}{T}\left|\langle f|S_e^{(1)}|i\rangle\right|^2$

$$= 2w\delta(E'-E)\left(\frac{m}{VE}\right)^2|\mathcal{M}|^2 \quad (T:\text{長いが有限})$$

wに状態密度をかけ、入射電子の流束密度で割って微分断面積
→ (8.91)

e.g.) Mott散乱 (重い原子核の周囲のCoulomb場による電子散乱)
↑点電荷近似

$$A_e^{\alpha}(x) = \left(\frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, \mathbf{0}\right)$$

$$A_e^{\alpha}(q) = \left(\frac{Ze}{|\mathbf{q}|^2}, \mathbf{0}\right) \rightarrow (8.91)\text{に代入} \quad (q:\text{運動量移行})$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{me}{2\pi}\right)^2\left|\bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^0\frac{Ze}{|\mathbf{q}|^2}u_r(\mathbf{p})\right|^2 \quad \left(\alpha = \frac{e^2}{4\pi}\right)$$

$$= \frac{(2m\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4}\left|\bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p})\right|^2 \quad \text{スピン和} \sum_s\text{, 平均化} \frac{1}{2}\sum_r$$

$$= \frac{(2m\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4}\frac{1}{2}\sum_{r,s}\left|\bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p})\right|^2 \quad (8.27)\text{より}$$

$$= \frac{(2m\alpha Z)^2}{2|\mathbf{q}|^4}\mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}+m}{2m}\gamma^0\frac{\not{p}'-m}{2m}\gamma^0\right] \rightarrow (8.93a)$$

散乱角θ、$|\mathbf{p}| = Ev$を導入すると、(8.94)より

$$= \frac{2(\alpha Z)^2}{16E^4v^4\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}\underbrace{\left(E^2+E^2v^2\cos\theta+E^2-E^2v^2\right)}_{= 2E^2\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)} \rightarrow (8.93b)$$

Coulomb場による相対的電子散乱 (Mott散乱)

$\xrightarrow{\text{非相対論極限}}$ $E^2 \sim m^2$、$|v| \ll 1$ (c)でRutherford散乱

・有限の体積範囲に原子核電荷が分布をもつ場合も修正でき、それに基づいて標的の電荷分布半径の自乗平均平方根を推定できる。

○ 偏極特性を捉えるよう拡張

・非相対論的なエネルギー領域：非相対論的QMより、
Coulomb相互作用と散乱振幅はスピン非依存 → スピン保存
(helicityについて：中間的な散乱角度θでは、スピノルの回転に関する性質よりヘリシティ正の確率が$\cos^2\frac{\theta}{2}$，負の確率が$\sin^2\frac{\theta}{2}$)

・非相対論極限：スピノル$u_r(p)$, $u_s(p')$にDirac−Pauliスピノル表示(Appendix (A.72), (A.73))
↳ r, sは空間において固定された座標軸方向の異なるスピン成分
↳
$$u_1(p)=\left(\frac{E+m}{2m}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{E+m}p^3\\\frac{1}{E+m}(p^1+ip_2)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad u_2(p)\to\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

このとき(8.93a)の行列要素について
$$\lim_{p,p'\to 0}\left(\bar{u}_s(p)\gamma^0 u_r(p)\right)=u_s^\dagger(0)\,u_r(0)=\delta_{sr}$$ よりスピンは保存

・相対論的エネルギー領域：電子の磁気能率が電子自身の静止座標系と相互作用 → 散乱がスピンに依存((8.93b)の速度依存な項も)

偏極特性を得るため8.2節ヘリシティ状態とヘリシティ射影演算子用いる

(8.93a)より、入射電子が正のヘリシティ($u_1(p)$)をもつ場合、確率は(8.96)に比例
(8.28), (8.29)の手続きにより、(8.97)に書き直せる(±は$s=1,2$, helicity反転の有無)

・相対論的極限$E=E'\gg m$ではヘリシティ射影演算子は(A.43)になる
↳ (8.97) → (8.98)に帰着
このとき、pとp'はEのオーダー ⇒ X_sへの主要な寄与はTrの内p, p'を両方含むもの、
X_sは$\left(\frac{E}{m}\right)^2$のオーダー ($X_1$ 即ちhelicityが反転しない場合)
X_2 ヘリシティ反転の場合、(8.98)についてTrの中でゼロにならない唯一の項はm^2に比例する項よりp, p'に依存せず、オーダーは1

⇒ ヘリシティ反転の振幅が相対的に0になりヘリシティ保存 (図8.7)

(中間的エネルギー領域については(8.97)の正確な評価が必要)

・ $16m^2 X_1 = \mathrm{Tr}\{(\not{p}+m)\gamma^0(1+\gamma^5)(\not{p}+m)\gamma^0(1+\gamma^5)\}$

・ $\mathrm{Tr}\{m\gamma^0(1+\gamma^5)m\gamma^0(1+\gamma^5)\}$

$= \mathrm{Tr}\{m^2(1 + \gamma^0\gamma^5\gamma^0 + \gamma^0\gamma^0\gamma^5 + \gamma^0\gamma^5\gamma^0\gamma^5)$ $\quad ((\gamma^0)^2 = 1)$

$[\gamma^5, \gamma^\alpha]_+ = 0$ より)

$= \mathrm{Tr}\{m^2(1 + \gamma^5 - \gamma^5 - 1)\} = 0$

・ $\mathrm{Tr}\{\not{p}\gamma^0(1+\gamma^5)m\gamma^0(1+\gamma^5)\} = 0$ (同様)

・ $\mathrm{Tr}\{m\gamma^0(1+\gamma^5)\not{p}\gamma^0(1+\gamma^5)\}$

$= \mathrm{Tr}\{m\not{p}\gamma^0(1+\gamma^5)\gamma^0(1+\gamma^5)\} = 0$ (同様)