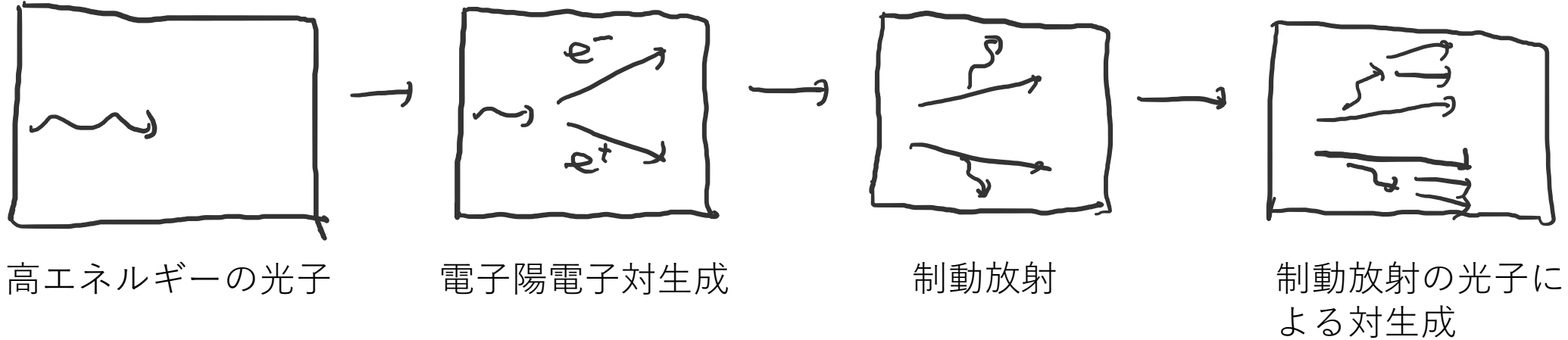


2.7.4 Electron-Photon Showers

高エネルギーの光子による電子・陽電子の対生成と制動放射によって電子・光子シャワーと呼ばれる現象が発生する。

媒質中において、



この過程を繰り返すことで電子・陽電子が滝のように流れていく。

この過程は電子・陽電子がもつエネルギーがcritical energyより小さくなるまで続く。
Critical energyとは、原子との衝突によって失うエネルギーと放射によって失うエネルギーが同じになるところ。

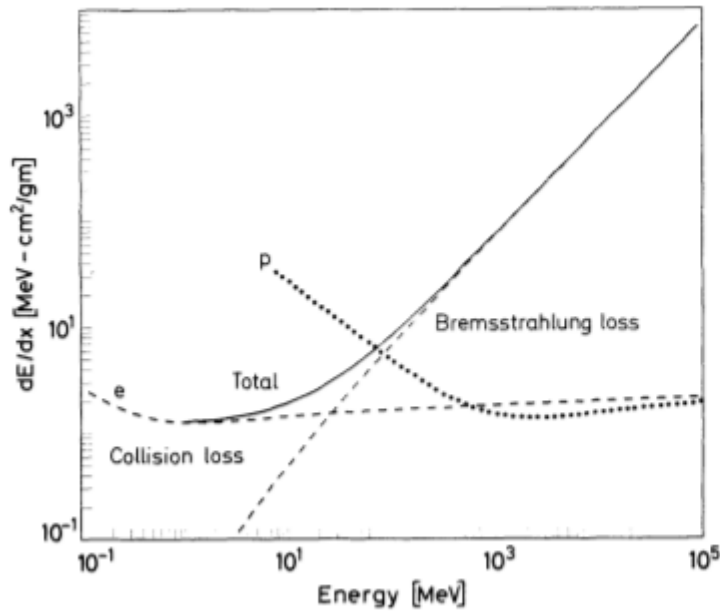


Fig. 2.10. Radiation loss vs. collision loss for electrons in copper. For comparison, the dE/dx for protons is also shown

Table 2.2. Critical energies of some materials

Material	Critical energy [MeV]
Pb	9.51
Al	51.0
Fe	27.4
Cu	24.8
Air (STP)	102
Lucite	100
Polystyrene	109
NaI	17.4
Anthracene	105
H ₂ O	92

このcritical energyを下回ると、電子や陽電子は制動放射よりも原子衝突でエネルギーを落とすことになる。

電子が原子に衝突するとき、原子の（持つ電子の）エネルギー準位を励起（あるいは電離）することでエネルギーを落とす。さらに励起された原子が基底状態に戻る際にエネルギーを光子として放射する。

つまり、原子衝突の結果として出てくる光子のエネルギーは原子の準位の差の分のエネルギー。これはだいたいX線領域であり、電子・陽電子を対生成できるエネルギー(1022keV)に比べれば小さい。

このため、電子（陽電子）の持つエネルギーがcritical energyを下回ると電子・陽電子シャワーは止まってしまう。

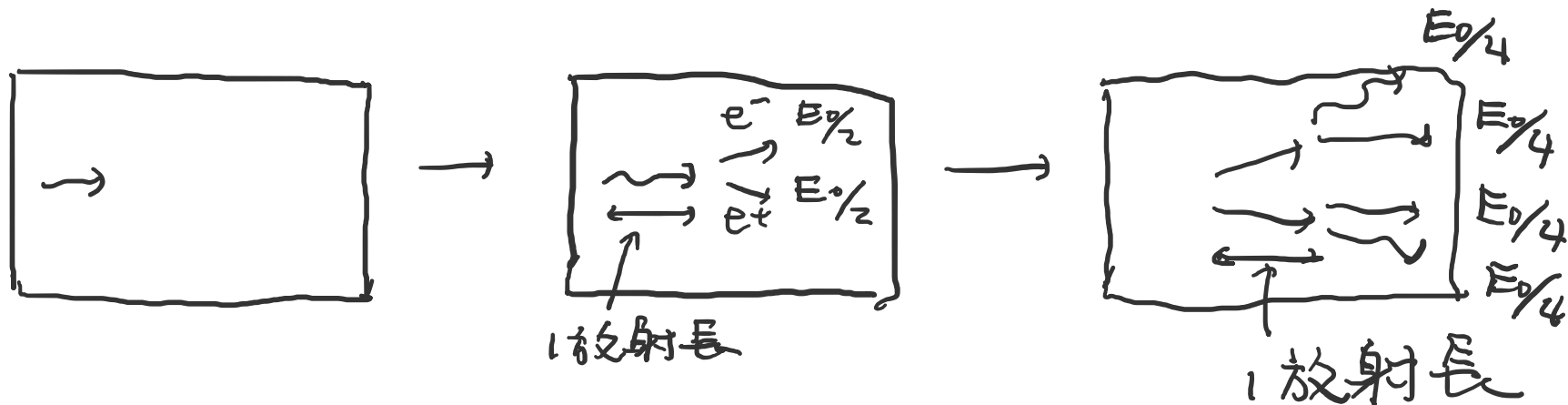
このシャワー現象はもちろん統計的な現象であるが、簡単のために単純化したモデルで考える。

まずはじめに十分大きなエネルギー E_0 を持った光子を考える。

光子が電子・陽電子の対生成を起こすまでの平均自由行程は、放射長（電子が放射による損失でエネルギーが $1/e$ になるまでの距離）にほとんど等しい（前小節の結果）。

このため、1放射長単位進んだ時に光子は電子・陽電子の対生成を起こしている。
さらに2放射長単位進んだ時には、電子（陽電子）は生成されたときに持っていたエネルギー（ $E_0/2$ ）の半分程度を制動放射によって光子として失う。

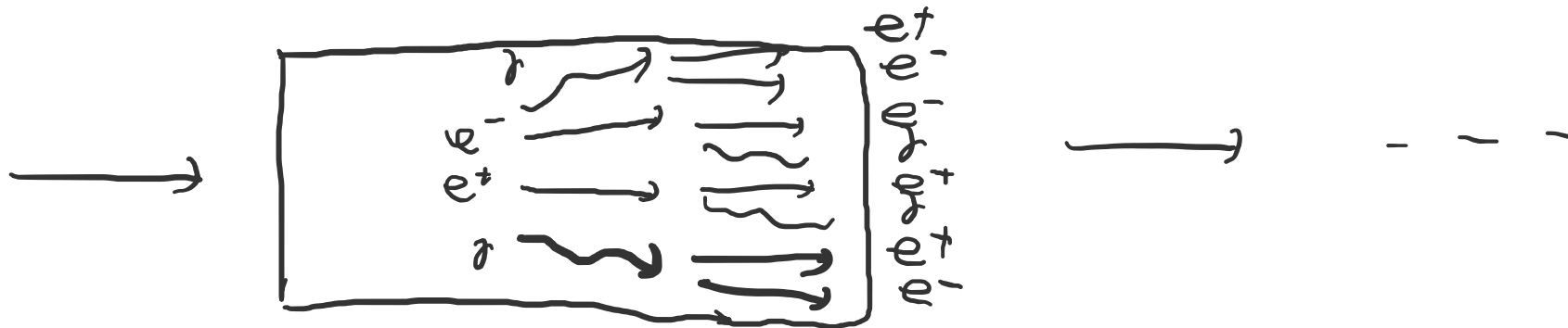
つまりこの時点で $E_0/4$ のエネルギーを持った電子、陽電子、 $E_0/4$ のエネルギーを持った制動放射によって放出された光子の4種類の粒子が存在している。



最初の位置から数えて3放射長分進んだ時には、

- ・ $E_0/4$ のエネルギーを持っていた2つの光子がそれぞれ ($E_0/8$ のエネルギーを持った) 電子・陽電子を対生成し、
- ・ $E_0/4$ のエネルギーを持っていた電子 (陽電子) はさらに制動放射を起こして、 (エネルギーが $E_0/8$ の) 光子と (エネルギー $E_0/8$ の) 電子 (陽電子) になる。

すべて合わせてエネルギーが $E_0/8$ の光子が2つ、エネルギーが $E_0/8$ の電子が3つ、エネルギー $E_0/8$ の陽電子が3つになる。



“1つの粒子は1放射長進んだ時に元の半分のエネルギーを持った2つの粒子に分かれる”

t放射長だけ進んだ時の粒子の数をNとすると、

$$N \approx 2^t$$

となっている。そしてそれぞれの粒子のエネルギーE(t)は

$$E(t) \approx \frac{E_0}{2^t}$$

である。（この結果は最初にあった粒子として光子でなく電子（または陽電子）を選んでも同じものが得られる。電子や陽電子であっても制動放射によって1放射長後に2つの粒子になっているので、光子と変わらない。）

ここでシャワーが物質の中にどれぐらいの深さまで入っていけるかについて考える。単純にこのシャワーがシャワーを構成する粒子の持つエネルギーがcritical energy E_c に達したときにパタッと止んでしまうという状況を考える。この時、最終的に進入できる深さ t_{\max} （放射長単位）は、

$$E(t_{\max}) = \frac{E_0}{2^{t_{\max}}} = E_c$$

で与えられる。これを t_{\max} について解いて、

$$t_{\max} = \frac{\ln\left(\frac{E_0}{E_c}\right)}{\ln 2}$$

が得られる。このため、シャワーの最終的に得られる最大の粒子数 N_{\max} は、

$$N_{\max} \approx \frac{E_0}{E_c}.$$

ここまでの議論はあくまでもラフで定性的なものである。

正確な計算は例えばモンテカルロ法。
実際のデータは下図 (PDG) .

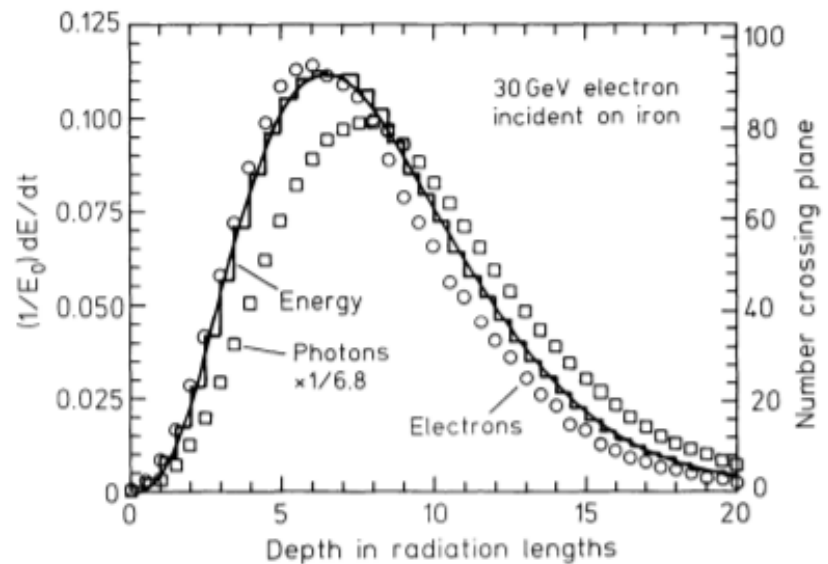


Fig. 2.26. Monte Carlo calculation of a 30 GeV electromagnetic cascade in iron (from [2.15]). The histogram shows the fractional energy deposited by the cascade as a function of depth, t , in the material, while the circles and squares represent the number of electrons and photons, respectively, with energy ≥ 1.5 MeV crossing a plane perpendicular to the longitudinal shower direction at depth t . The smooth curve is a fit of the gamma function in (2.129)

これより、先ほどの単純化された描像ではあるところで急に止んでしまったシャワーは、正確な計算では長い尾を引いていることがわかる。

エネルギーロスガンマ分布がよく近似される

$$\frac{dE}{dt} = E_0 b \frac{(bt)^{a-1} e^{-bt}}{\Gamma(a)}$$

a と b は物質に依存するパラメータ。
 最大値をとる t は

$$t_{max} = \frac{a-1}{b} = 1.0 \times (\ln y + C_i) \quad (i = e \text{ or } \gamma)$$

ここで、 $y = \frac{E}{E_c}$ 、 i は入射粒子が電子か光子かに従ってそれぞれ e, γ であり、 $C_e = -0.5, C_\gamma = +0.5$ である。
 b の値は以下の図に与えられており（大体0.5程度）、 t_{max} が計算できればパラメータ a も求まる。

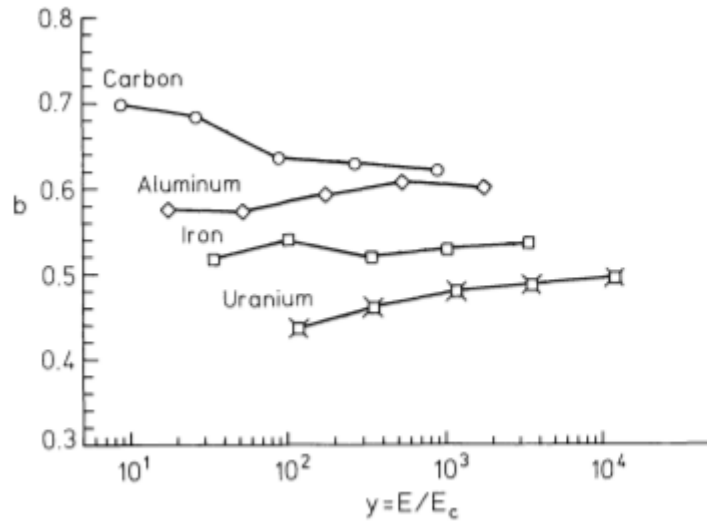


Fig. 2.27. Values of the parameter b in (2.129) for various materials (from [2.15])

シャワーは進行方向に垂直な方向にも広がる

- 対生成された電子・陽電子の方向
 - 電子, 陽電子の多重散乱
 - 制動放射の進行方向以外への放射
- など

この進行方向に垂直な方向への広がりにはモリエール半径を基準にしてはかれる：

$$R_M = \frac{L_{rad} E_s}{E_c}$$

$E_s = m_e c^2 \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} = 21.2 \text{ MeV}$ で, E_c はcritical energy, L_{rad} は放射長.

このモリエール半径は定義から言って放射長の特徴をよく引き継いでいる.

特に長さを密度をかけた単位ではかっておくと物質の状態に（ほとんど）よらず, 化合物であってもブラッグの法則を適用できる：

$$\frac{1}{L_{rad}} = w_1 \left(\frac{1}{L_{rad}} \right)_1 + w_2 \left(\frac{1}{L_{rad}} \right)_2 L + \dots$$

w_i は化合物内での*i*番目の物質の質量数の割合.

垂直方向のエネルギー損失特性

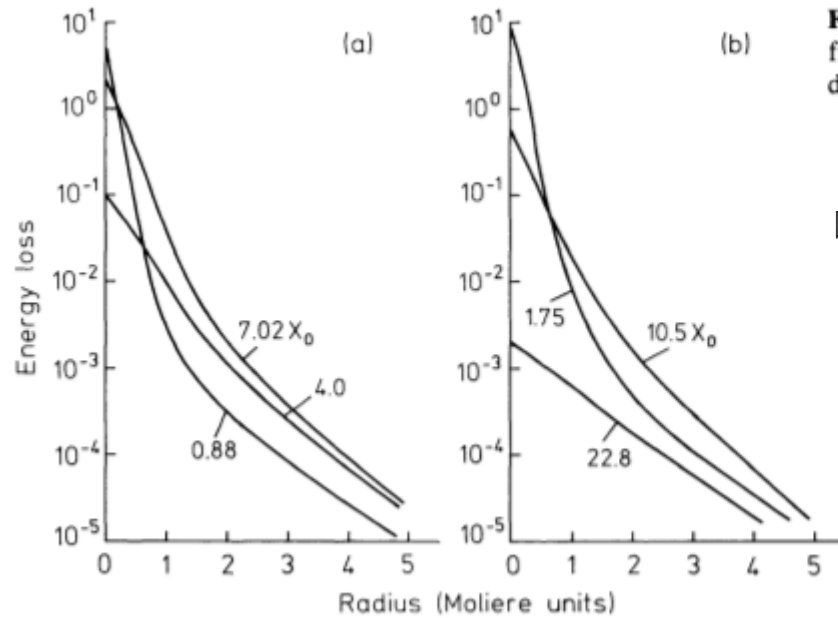


Fig. 2.28. Transverse energy loss profiles for a 1 GeV shower at various depths in Pb (from [2.40])

図中の X_0 は放射長（本文中では L_{rad} ）

最初（図の0.88の部分）横方向の広がりは小さく，中心に集まっており，周りを円状に薄く粒子で囲われている。

深く入っていくにつれて（ピークの後），中心部分は散逸していき，中心を取り囲む部分は徐々に広がっていくが，90%以上の粒子が進行軸の中心から $2R_M$ のところに収まっている。

こういった電子・光子シャワーの進行方向，垂直方向の特性は電磁熱量計(electromagnetic calorimeters)を作るうえで重要になる。

電磁熱量計は，大きなエネルギーを持つ粒子が検出機内に入ってきたときに起こす電子光子シャワー現象でのエネルギー損失を計測するもの。このためその大きさや重さはエネルギー損失特性から決められるべきもの。特に鉄を使って30GeVのシャワーを吸収しようとするとき，大体20放射長（鉄においては35cm）よりも長い大きさを持っているべきである。

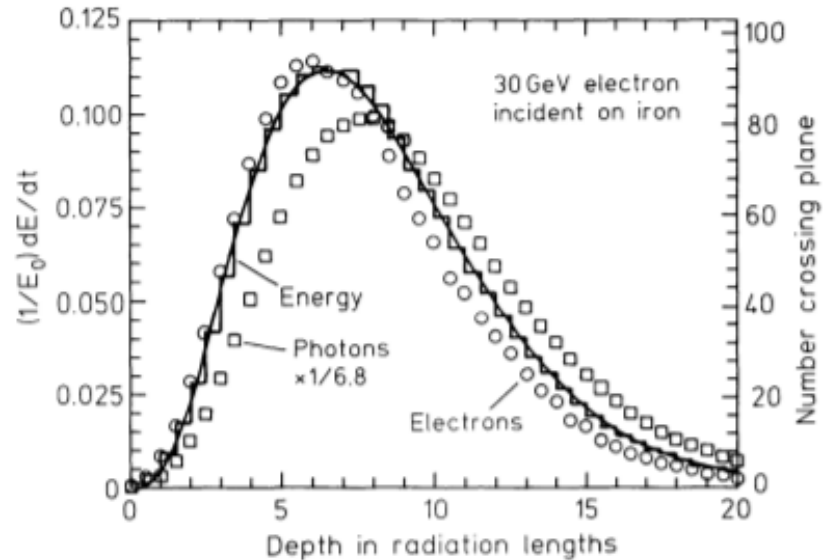


Fig. 2.26. Monte Carlo calculation of a 30 GeV electromagnetic cascade in iron (from [2.15]). The histogram shows the fractional energy deposited by the cascade as a function of depth, t , in the material, while the circles and squares represent the number of electrons and photons, respectively, with energy ≥ 1.5 MeV crossing a plane perpendicular to the longitudinal shower direction at depth t . The smooth curve is a fit of the gamma function in (2.129)

2.7.5 The Total Absorption Coefficient and Photon Attenuation

光子の物質中での全反応断面積は，すべての反応の断面積を足し合わせた形で与えられる：

$$\sigma = \Phi_{photo} + Z\sigma_c + \tau_{pair} \quad (\text{1つの原子ごと})$$

ここでZは原子の持つ電子数.

この σ に原子の密度 N をかけてやれば単位長さ当たりの相互作用確率が得られる.

$$\mu = N\sigma = \sigma \left(\frac{N_a \rho}{A} \right)$$

ここで N_a はアボガドロ定数， ρ は物質の密度， A は分子の質量数.

これは全吸収断面積として知られ，光子の平均自由行程の逆数である.

以前の結果より，距離 x だけ進んだときに吸収されずに残っている光子は

$$\frac{I}{I_0} = \exp(-\mu x)$$

で与えられる．ここで I_0 は入射強度.

化合物や混合物では，吸収係数は依然のブラッグの規則で計算され，

$$\frac{\mu}{\rho} = w_1 \frac{\mu_1}{\rho_1} + w_2 \frac{\mu_2}{\rho_2} + \dots$$

である．（ w_i は化合物中に現れる元素をラベルし， i 番目のものの質量）