4. 対称性

P123~

河本地弘

Overview

・対称性→保存則と関連し、また運動の理論が完全になっていないときでも知見を得られる重要な要素

→・群論に関する（大雑把な）一般論

　・対称性と保存則

　・回転対称性と角運動量及びスピンとの関連→「内部」対称性

　・パリティなどの「離散」対称性

4.1 対称性，　群，　保存則

e.g. あるf(x)が奇関数であることからわかること

　　　・(4.1)のような積分、微分についての関係

　　　・フーリエ展開にはcosが現れない

　　　・テイラー展開は奇数のべき乗項しかない・・・

→特定の対称性から多くのことを導き出せる

・直観や普遍的な原理が対称性を示唆することがあり、体系的に使うことできわめて強力な武器になる

対称性と保存則

・対称性と保存則を結びつける論文(エミー・ネーター，1917)
・ネーターの定理：対称性⇔保存則
（対称性が保存則を生み出し、保存則は背後の対称性を反映）

表 4.1　対称性と保存則

対称性		保存則
時間の並行移動	⇔	エネルギー
空間の並行移動	⇔	運動量
回転	⇔	角運動量
ゲージ変換	⇔	電荷

対称性とは

・ある系に対して何らかの操作を行っても系が変化しないこと

・時計、反時計回り120°回転（R_+ , R_-）
・垂直軸でひっくり返す（R_a, R_b , R_c）
・なにもしない（I）
・ $R_+^2 = R_-$

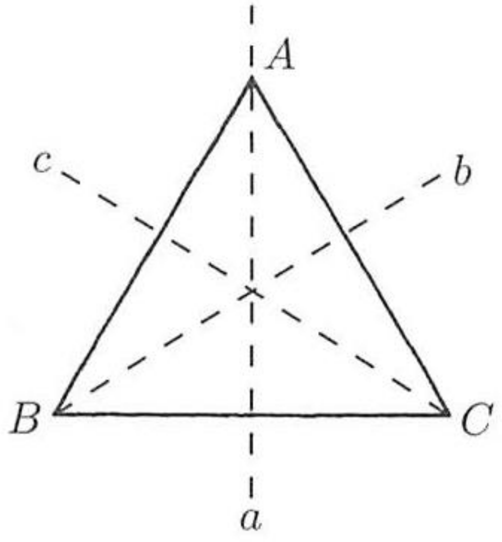


図 4.2　正三角形の対称性

対称操作の一群の特徴

・閉じている　（$R_iR_j = R_k$となるR_kがその群に存在）

・単位元の存在（$\forall R_i$に対し$IR_i = R_iI = R_i$となる元Iが存在）

・逆元の存在　（$\forall R_i$に$R_iR_i^{-1} = R_i^{-1}R_i = I$となる逆元$R_i^{-1}$が存在）

・結合法則　　（$R_i(R_jR_k) = \left(R_iR_j\right)R_k$が成立）

一般に群の元は可換でない

・すべての要素が可換→アーベル群

連続群（e.g. 平面上のあらゆる回転群）と不連続群（すべての有限群（e.g. 前述の三角形））をみていく

・物理で興味のあるほとんどの群は行列の群として定式化できる

対称群

表 4.2　重要な対称群

群の名前	次元	行列
$U(n)$	$n \times n$	ユニタリー（$U^T U = 1$）
$SU(n)$	$n \times n$	ユニタリー，かつ行列式 $= 1$
$O(n)$	$n \times n$	直交（$O^T O = 1$）
$SO(n)$	$n \times n$	直交，かつ行列式 $= 1$

S ：special（行列式が1）

U ：unitary（$U^{-1} = U^T$）

O ：orthogonal（実行列Oで$O^{-1} = O^T$）

→SO(3)：３次元空間での回転対称性を実現→角運動量保存

（素粒子物理学上最も重要な内部対称性はSU(2)で、数学的構造はSO(3)にほぼ等しい）

あらゆる群Gは行列群で表現→元aに対応する行列M_aの掛け算を保存しなければならない

・あらゆる群Gは行列群で表現できる→元aに対応する行列M_aの掛け算を保存しなければならない

・表現は必ずしも「忠実」(=単射)でなくてもよい（行列群はGに対して準同型であるが必ずしも同型でなくてもよい）

・G自体が行列の群であればその表現は自身の表現（基本表現）がある（基本表現には限らず、あらゆる正の整数次元での表現がある）

既約表現

・２つの表現を組み合わせて新しい表現を構築することも可能

$$M_a = \begin{bmatrix} M_a^{(1)} & 0 \\ 0 & M_a^{(2)} \end{bmatrix}$$

しかし、群の表現を整理する場合、上のように対角行列のブロックに分解できない既約表現について考えるため、カウントしない

・スカラー　　　　　　：回転群の１次元の表現に属する

・SO(3)，ベクトル：３次元表現

・４元ベクトル　　　：ローレンツ群の４次元表現

・八道説の配置　　　：SU(3)の既約表現に対応

4.2 角運動量

軌道角運動量

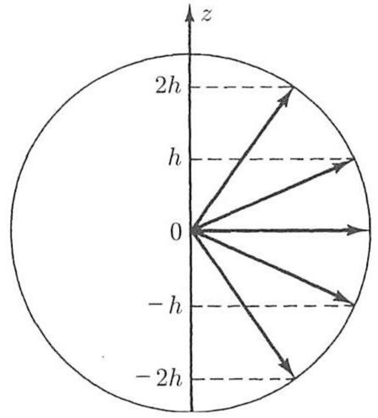


図 4.3　$l = 2$ に対する，あり得る角運動量の方向

・電子のスピン角運動量はあくまで電子が持つ固有の性質
（構成物質の軌道角運動量の総和に還元できない）
・同時に測定できる量：L_z及びLの大きさ（L^2）が「許容される」値として測定できる

・測定されるL^2の値：$l(l+1)\hbar$　　　　（$l = 0,1,2,3,\dots$）
・測定されるL_zの値：$m_l\hbar$　　　　（$m_l = -l, -l+1, \dots, l-1, l$）

スピン角運動量

・$S^2 = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}$ の測定で得られる値：$s(s+1)\hbar$　$\left(s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$
　sは整数（ボソン）及び半整数（フェルミオン）

・S_zの測定で得られる値：$m_s\hbar$　　$(m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s)$
　mは(2s+1)通りの可能性を持つ

・軌道角運動量：どのようなlを割り振ることも可能
　⇔s（スピン）は粒子の種類により決まる

・π ,K：0　e,p,n,q：1/2　ρ , Ψ, γ ,g：1　Δ ,Ω^-：3/2

表 4.3　スピンによる粒子の分類

ボソン（スピン整数）		フェルミオン（スピン半整数）		
スピン 0	スピン 1	スピン 1/2	スピン 3/2	
−	力の媒介粒子	クォークとレプトン	−	← 素粒子
擬スカラー中間子	ベクトル中間子	バリオン八重項	バリオン十重項	← 複合粒子

4.2.1 角運動量の足し算

・角運動量状態の表現：$|l\; m_l>, |s\; m_s>$　　（ケット）

・保存する量L+Sや２スピンの合計を求める

　・z成分：$m = m_1 + m_2$

　・大きさ：$j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \ldots, (j_1 + j_2) - 1, (j_1 + j_2)$

e.g）　スピン1、軌道量子数 l =3の粒子の全角運動量：

j=2,3,4　　（それぞれ $J^2 = 6\hbar^2, 12\hbar^2, 20\hbar^2$）

例題4.1

Q. クォークと反クォークは、軌道角運動量ゼロの束縛状態の中間子を形成することができる。この中間子がとりえる可能なスピンはいくつか？

A. （反)クォークはスピン1/2 → 0 or 1の２通り（ボソン）

　スピン0：「擬スカラー中間子」（π 3個，K 4個，η，η’）

　スピン1：「ベクトル中間子」　（ρ 3個，K*4個，ϕ，ω）

・角運動量3つを足すには最初の2つを足してから残り1つと合成

例題4.2

Q. 3つのクォークを軌道角運動量ゼロの状態に組み上げることを想定しよう。結果として生まれるバリオンの可能なスピンはいくつか？

A. 2つのクォークの角運動量の合計は 0 or 1

→スピンはそれぞれ 0 → 1/2, 1 → 1/2, 3/2

∴スピンは 1/2, 3/2 の 2 つ

3/2→十重項、 1/2→八重項（ともう一つ別の仲間）

クレブシュ-ゴルダン係数

・合成する角運動量を特定の合計角運動量にあらわに分解

$$|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{(j_1+j_2)} C^{jj_1j_2}_{mm_1m_2} |jm\rangle, \qquad m = m_1 + m_2$$

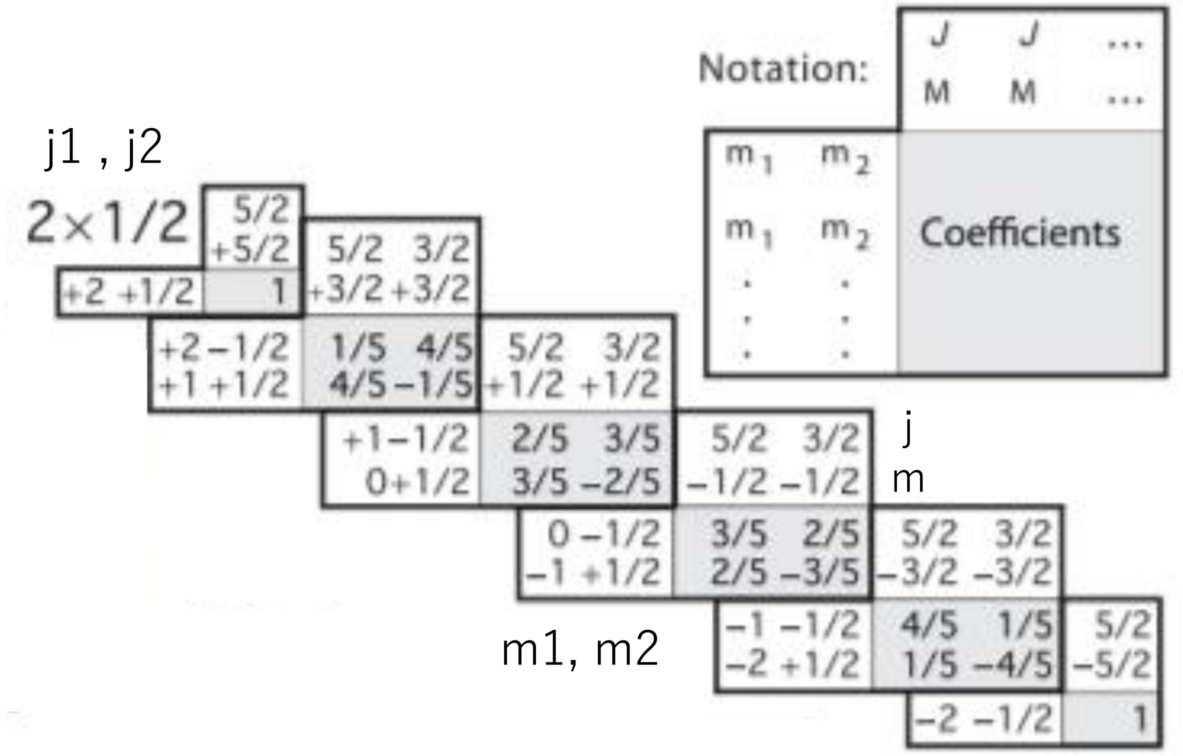
$C^{jj_1j_2}_{mm_1m_2}$ ：クレブシュ-ゴルダン係数

・$|j_1 m_1>, |j_2 m_2>$からなる系でJ^2を測定したときにある特定の値jに対して$j(j+1)\hbar^2$を得る確率：CG係数の2乗

CG係数

・具体的な値はParticle Physics BookletやPDGのHPを参照

http://pdg.lbl.gov/2020/reviews/rpp2020-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf



例題4.3

Q. 水素原子中の電子は、軌道量子数|2,-1>とスピン量子数|1/2 1/2>をもつ。もしJ^2を測定したとしたら、どのような値を持ち得るか。またそれぞれの確率はどれだけか。

A. 可能なjの値は、$l+s=5/2$と$l-s=3/2$、m=1/2。このときCG係数の表から平方根をとって

$$|2\ \ -1\rangle\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{5}}\left|\frac{5}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{3}{5}}\left|\frac{3}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right\rangle$$

∴j=5/2となる確率は2/5、j=3/2となる確率は3/5

例題4.4

Q. 例題4.1から、2つのスピン1/2状態を合成すると、スピン1と0になることを知っている。これらの状態をCG係数で分解せよ。

A. 1/2×1/2の表を参照し重ね合わせる。

1/2×1/2	1 +1	1 0	0 0	1 −1
+1/2 +1/2	1			
+1/2 −1/2		1/2	1/2	
−1/2 +1/2		1/2	−1/2	
−1/2 −1/2				1

CG係数から

$$\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle = |1\ 1\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|1\ 0\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|0\ 0\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|1\ 0\rangle - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|0\ 0\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle = |1\ -1\rangle$$

スピン1の状態は

$$|1\ 1\rangle = \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$|1\ 0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\right]$$

$$|1\ -1\rangle = \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle$$

スピン0の状態は

$$|0\ 0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle - \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\right]$$

例題4.4

・スピン1の組み合わせ：三重項

　　・粒子の入れ替えに対して対称

　　・スピンの向きがm=±1で平行、m=0で反平行

・スピン0の組み合わせ：一重項

　　・粒子の入れ替えに対して反対称

　　・スピンの向きは反平行

・CG係数はどちら向きでも成立→表は縦に読んでも良い

$$|jm\rangle = \sum_{j_1,j_2} C^{jj_1j_2}_{mm_1m_2} |j_1m_1\rangle |j_2m_2\rangle$$