5 章　　光子：共変性理論

5.1　古典場

マクスウェル方程式を共変形式で表現するために、反対称テンソルを導入する。

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
\nu \to & 0 & 1 & 2 & 3 & \mu \downarrow \\
F^{\mu\nu}(x) = & \multicolumn{4}{c|}{\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}
\end{array} \tag{5.1}
$$

これと荷電電流密度　$s^{\mu}(x) = (c\rho(x),\, \mathbf{j}(x))$　を用いるとマクスウェル方程式は

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{c} s^{\mu}(x) \tag{5.2}$$

$$\partial^{\lambda} F^{\mu\nu}(x) + \partial^{\mu} F^{\nu\lambda}(x) + \partial^{\nu} F^{\lambda\mu}(x) = 0. \tag{5.3}$$

と書ける。反対称テンソルの性質と(5.2)から

$$\partial_{\mu} s^{\mu}(x) = 0 \tag{5.4}$$

となる。
反対称テンソルは、4 元ベクトルポテンシャル　$A^{\mu}(x) = (\phi, \mathbf{A})$　を用いて

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^{\nu} A^{\mu}(x) - \partial^{\mu} A^{\nu}(x) \tag{5.5}$$

(5.5)を用いて、(5.2)は、

$$\Box A^{\mu}(x) - \partial^{\mu}(\partial_{\nu} A^{\nu}(x)) = \frac{1}{c} s^{\mu}(x). \tag{5.6}$$

これらの式はゲージ不変性を持つ。

$$A^{\mu}(x) \to A'^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) + \partial^{\mu} f(x). \tag{5.7}$$

ラグランジアン密度から(5.6)を導くこともできる。

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{c} s_{\mu}(x) A^{\mu}(x) \tag{5.8}$$

このラグランジアン密度の形式は、ローレンツとゲージ変換について、場の方程式(5.6)が不変であることを保証する。ラグランジアン密度自身は、ゲージ不変ではない。

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L} - \frac{1}{c} s_{\mu}(x) \partial^{\mu} f(x) = \mathscr{L} - \frac{1}{c} \partial^{\mu} \left[s_{\mu}(x) f(x) \right] \tag{5.9}$$

ここで、ラグランジアン密度(5.8)は正準量子化に適していない。実際、共役場は

$$\pi^{\mu}(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_{\mu}} = -\frac{1}{c} F^{\mu 0}(x)$$

$\pi^{0}(x) = 0$ となり、正準交換関係を課すことができない。

量子化に適したラグランジアン密度を次のように書く。(フェルミによって提案)

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu(x))(\partial^\nu A^\mu(x)) - \frac{1}{c}s_\mu(x)A^\mu(x). \tag{5.10}$$

(5.10)から、共役場は

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{c^2}\dot{A}^\mu(x) \tag{5.11}$$

これは正準量子化に適した形式である。

(5.10)から、場の方程式は

$$\Box A^\mu(x) = \frac{1}{c}s^\mu(x). \tag{5.12}$$

(5.6)と比較して、(5.12)は次の制限を課したものと同等である。

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0. \tag{5.13}$$

議論の際、(5.13)を一旦無視して一般的なラグランジアン密度(5.10)を量子化し、その後、(5.13)もしくはそれと同等な制限を課す。

任意の$A^\mu(x)$に対して、ゲージ変換して

$$\partial_\mu A^\mu(x) + \Box f(x) = 0. \tag{5.14}$$

となる$f(x)$を選ぶことで(5.13)を満たす。(5.13)を満たす$A^\mu(x)$は一意に決まらず、

$$\Box f(x) = 0. \tag{5.15}$$

を満たすものに対して不定性がある。

(5.13)はローレンツ条件と呼ばれる。ローレンツ条件を使う利点がいくつかある。1 つはローレンツ条件が共変形式で書けること。2 つ目は、場の方程式(5.6)を(5.12)のようにより簡単に書けること。自由場の場合($s^\mu(x) = 0$)、(5.12)は、

$$\Box A^\mu(x) = 0. \tag{5.16}$$

となる。この式はクラインゴルドン方程式(3.3)で質量をゼロにしたもの。これは、電磁場の共変量子化を考える際、以前の結果を応用できる。$A^\mu(x)$は基本解の重ね合わせで書ける。

$$A^\mu(x) = A^{\mu+}(x) + A^{\mu-}(x) \tag{5.16a}$$

$$A^{\mu+}(x) = \sum_{r\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})\, e^{-ikx} \tag{5.16b}$$

$$A^{\mu-}(x) = \sum_{r\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k})\, e^{ikx}. \tag{5.16c}$$

和 $\mathbf{k}$ は周期境界条件を満たすもので取り、

$$k^0 = \frac{1}{c}\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|. \tag{5.17}$$

添え字 r = 0 から r = 3 の和は、それぞれの $\mathbf{k}$ に対して 4 つの線形独立な偏極状態が存在することを表す。これを規格直交性と完全性を満たす 4 つの偏極ベクトル $\varepsilon_r^{\mu}(\mathbf{k})$(実を選ぶ)で記述する。

$$\varepsilon_r(\mathbf{k})\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_s^{\mu}(\mathbf{k}) = -\zeta_r\,\delta_{rs}, \quad r,\ s = 0,\ \ldots, 3, \tag{5.18}$$

$$\sum_r \zeta_r \varepsilon_r^{\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_r^{\nu}(\mathbf{k}) = -\,g^{\mu\nu}, \tag{5.19}$$

$$\zeta_0 = -1, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1. \tag{5.20}$$

(5.18)、(5.19)を満たす物理的意味のあるものを選ぶ。

$$\varepsilon_0^{\mu}(\mathbf{k}) = n^{\mu} \equiv (1,\ 0,\ 0,\ 0), \tag{5.21a}$$

$$\varepsilon_r^{\mu}(\mathbf{k}) = (0,\ \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})), \quad r = 1,\ 2,\ 3, \tag{5.21b}$$

と取り、$\varepsilon_1(\mathbf{k})$と$\varepsilon_2(\mathbf{k})$を $\mathbf{k}$ に直交させ、$\varepsilon_3(\mathbf{k})$を $\mathbf{k}$ に平行な単位ベクトルとする。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3(\mathbf{k}) = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|, \tag{5.22a}$$

つまり、

$$\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) = 0, \quad r = 1,\ 2; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}) = \delta_{rs}, \quad r, s = 1,\ 2,\ 3. \tag{5.22b}$$

ε_1とε_2を横偏極、ε_3を縦偏極、ε_0をスカラー偏極（時間的偏極）と呼ぶ

縦偏極ベクトルε_3^{μ}を共変形式で書くと、

$$\varepsilon_3^{\mu}(\mathbf{k}) = \frac{k^{\mu} - (kn)n^{\mu}}{[(kn)^2 - k^2]^{1/2}}. \tag{5.22c}$$

ここで、実偏極ベクトルで書けるのは直線偏極の場合で、円・楕円偏極を表すには複素偏極ベクトルを用いる。

5.2　共変量子化

同時刻交換関係を次のように課す。

$$\left.\begin{aligned} \left[A^\mu(\mathbf{x},t), A^\nu(\mathbf{x}',t)\right] = 0, \quad \left[\dot{A}^\mu(\mathbf{x},t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}',t)\right] = 0, \\ \left[A^\mu(\mathbf{x},t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}',t)\right] = -\mathrm{i}\hbar c^2 g^{\mu\nu}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

-$g^{\mu\nu}$を除くと、４つの独立したクラインゴルドン場（m→0）の交換関係と同等。クラインゴルドン場を拡張させることができ、共変交換関係を次のように書ける。

$$\left[A^\mu(x), A^\nu(x')\right] = \mathrm{i}\hbar c D^{\mu\nu}(x-x'), \tag{5.24}$$

ここで、

$$D^{\mu\nu}(x) = \lim_{m\to 0}\ [-g^{\mu\nu}\Delta(x)], \tag{5.25}$$

$\Delta(x)$は不変Δ関数（3.43)。光子の伝播関数は、

$$\langle 0|\mathbf{T}\left\{A^\mu(x)A^\nu(x')\right\}|0\rangle = \mathrm{i}\hbar c D_\mathrm{F}^{\mu\nu}(x-x'), \tag{5.26}$$

$$D_\mathrm{F}^{\mu\nu}(x) = \lim_{m\to 0}\,[-g^{\mu\nu}\,\Delta_\mathrm{F}(x)] = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int \frac{\mathrm{d}^4k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{k^2+i\varepsilon}, \tag{5.27}$$

(5.16)と(5.23)から、展開係数の演算子の交換関係は、

$$\left.\begin{aligned} \left[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')\right] = \zeta_r\,\delta_{rs}\,\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ \left[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')\right] = \left[a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')\right] = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{5.28}$$

となる。r＝０では、生成演算子と消滅演算子の役割が交換しているようにみえるが、交換して考えると別の困難が生じるため、グプタ・ブロイラーの手続きに従う。

グプタ・ブロイラーの理論では、r=0~3 について、$a_r(\mathbf{k})$を消滅演算子、$a_r^\dagger(\mathbf{k})$を生成演算子として扱う。真空状態に対して、

$$a_r(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad \text{all }\ \mathbf{k}, \quad r = 0\,\ldots, 3, \tag{5.29a}$$

と定義する。すなわち、

$$A^{\mu+}(x)|0\rangle = 0, \quad \text{all }\ x, \quad \mu = 0, \ldots, 3. \tag{5.29b}$$

また、１粒子状態は、

$$|1_{\mathbf{k}r}\rangle = a_r^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle \tag{5.30}$$

となる。

この解釈の正当化を示すため、Hamiltonian を考える。(2.51a)から、

$$H=\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathrm{N}\left[\pi^\mu(x)\dot{A}_\mu(x)\ -\mathscr{L}(x)\right], \tag{5.31}$$

となり、代入して計算すると、

$$H=\sum_{r\mathbf{k}}\hbar\omega_{\mathbf{k}}\zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}). \tag{5.32}$$

となる。
これは、例えば 1 粒子状態に対して、交換関係(5.28)より、

$$\begin{aligned}H|1_{\mathbf{k}r}\rangle &= \sum_{\mathrm{q}s}\hbar\omega_{\mathbf{q}}\zeta_s a_s^\dagger(\mathbf{q})a_s(\mathbf{q})a_r^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle \\ &= \hbar\omega_{\mathbf{k}}a_r^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle, \quad r=0,\ldots,3,\end{aligned}$$

つまり、エネルギーは正の値（$\hbar\omega_k$）をとる。これに対応して数演算子は、

$$N_r(\mathbf{k})=\zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}), \tag{5.33}$$

と定義できる。

ここで、１粒子状態のノルムを計算すると、

$$\langle 1_{\mathrm{k}r}|1_{\mathrm{k}r}\rangle=\langle 0|a_r(\mathbf{k})a_r^\dagger(\mathbf{k})\,|0\rangle\ =\zeta_r\langle 0|0\rangle=\zeta_r$$

となり、スカラー光子にとって、ノルムが負になってしまう。しかし、実際にスカラー光子と縦偏極は観測されないため、問題にならない。この計算上での問題は、ローレンツ条件（5.13）を無視しているためであり、マクスウェル方程式と等価ではないためである。

ローレンツ条件（5.13）は（5.24）を満たさない（右辺がゼロでない）。

$$\left[\partial_\mu A^\mu(x), A^\nu(x')\right]=\mathrm{i}\hbar c\partial_\mu D^{\mu\nu}(x\ -x')$$

そこで、これより弱い条件を課す。

$$\partial_\mu A^{\mu+}(x)|\Psi\rangle=0, \tag{5.34}$$

$$\left(\langle\Psi|\partial_\mu A^{\mu-}(x)=0\right)$$

ローレンツ条件は期待値をとると成り立っている。

$$\langle\Psi|\partial_\mu A^\mu(x)|\Psi\rangle=\langle\Psi|\partial_\mu A^{\mu+}(x)+\partial_\mu A^{\mu-}(x)|\Psi\rangle=0. \tag{5.35}$$

(5.34)の条件を運動量空間で表現すると、

$$[a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})]|\Psi\rangle = 0, \quad \text{all } \mathbf{k}. \tag{5.36}$$

これは縦偏極光子とスカラー光子の線形結合に対する条件である。この効果はエネルギー期待値を計算することで明らかになる。まず、

$$\langle\Psi|a_3^\dagger(\mathbf{k})a_3(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k})|\Psi\rangle = \langle\Psi|a_3^\dagger(\mathbf{k})[a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})]|\Psi\rangle = 0,$$

であるので、

$$\langle\Psi|H|\Psi\rangle = \langle\Psi|\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1}^{2}\hbar\omega_k a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})|\Psi\rangle, \tag{5.37}$$

つまり、エネルギー期待値は横偏極光子だけが関係する。これは他の観測可能量についても成り立つ。非共変形式での放射場が２つの自由度をも持っていたことを考慮すると、４元ポテンシャルは追加で２つの自由度を導入したことになる。この自由度は、１つはゲージ条件、１つはローレンツゲージの選び方に対応している。
自由場でない場合、縦偏極光子とスカラー光子は無視できなくなる。これらの光子が仮想粒子として、瞬間的なクーロン相互作用の共変的な記述を与える重要な役割を果たすことを次の節で示す。

5.3　光子の伝播関数

運動量空間での伝播関数は、

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}. \tag{5.38}$$

(5.19)と(5.27)より、

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon} = \frac{1}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}). \tag{5.39}$$

偏極ベクトルを具体的に用いると、

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\left\{\sum_{r=1}^{2}\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) + \frac{[k^\mu - (kn)n^\mu][k^\nu - (kn)n^\nu]}{(kn)^2 - k^2} + (-1)n^\mu n^\nu\right\} \tag{5.40}$$

となる。
(5.40)の第一項

$$_{\mathrm{T}}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(k) \equiv \frac{1}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\sum_{r=1}^{2}\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}), \tag{5.41a}$$

は横偏極光子の交換と解釈することができる。残りの２項についてはもう少し変形する。

$$\frac{1}{k^2 + i\epsilon}\left\{\frac{[k^\mu - (kn)n^\mu][k^\nu - (kn)n^\nu]}{(kn)^2 - k^2} + (-1)n^\mu n^\nu\right\}$$
$$= \frac{k^\mu k^\nu - (kn)k^\mu n^\nu - (kn)k^\nu n^\mu}{[k^2 + i\epsilon][(kn)^2 - k^2]} + \frac{k^2 n^\mu n^\nu}{[k^2 + i\epsilon][(kn)^2 - k^2]}$$

$$= \frac{1}{k^2 + i\epsilon}\left[\frac{k^\mu k^\nu - (kn)(k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)}{(kn)^2 - k^2}\right] + \frac{n^\mu n^\nu}{(kn)^2 - k^2}$$

よって、

$$D_F^{\mu\nu}(k) = {}_T D_F^{\mu\nu}(k) + {}_C D_F^{\mu\nu}(k) + {}_R D_F^{\mu\nu}(k), \tag{5.42}$$

$${}_C D_F^{\mu\nu}(k) \equiv \frac{n^\mu n^\nu}{(kn)^2 - k^2}, \tag{5.41b}$$

$${}_R D_F^{\mu\nu}(k) \equiv \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}\left[\frac{k^\mu k^\nu - (kn)(k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)}{(kn)^2 - k^2}\right], \tag{5.41c}$$

(5.41b)を座標空間にすると、(5.38)と(5.21a)から

$$\begin{aligned} {}_C D_F^{\mu\nu}(x) &= \frac{g^{\mu 0} g^{\nu 0}}{(2\pi)^4} \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2} \int \mathrm{d}k^0\, \mathrm{e}^{-ik^0 x^0} \\ &= g^{\mu 0} g^{\nu 0} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(x^0). \end{aligned} \tag{5.43}$$

(5.43)は瞬間的なクーロンポテンシャルの寄与を表している。これが縦偏極光子とスカラー光子の交換と解釈できる。
(5.41a)と(5.43)で電磁相互作用について完全に示されているため、残りの(5.41c)の寄与はゼロになるはずである。それはフォトンの伝播関数が保存カレントに挟まれて現れることによる。簡単な例として、電子-電子散乱を考えると、その行列要素は摂動の最低次で、

$$\int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^4 y\, s_1^\mu(x) D_{F\mu\nu}(x - y) s_2^\nu(y). \tag{5.44}$$

になる。(7 章(7.14)から)

$$s_r^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 k\, s_r^\mu(k)\, \mathrm{e}^{-ikx}, \quad r = 1,\ 2. \tag{5.46}$$

より、(5.44)の ${}_R D_{F\mu\nu}$の寄与は運動量空間で、

$$\int d^4x \int d^4y\, s_1^\mu(x)\, {}_R D_{F\mu\nu}(x-y) s_2^\nu(y)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4x \int d^4y \int d^4k \int d^4k' \int d^4k''\, s_1^\mu(k) e^{-ikx}\, {}_R D_{F\mu\nu}(k') e^{-ik(x-y)} s_2^\nu(k'')\, e^{-ik''y}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \int d^4k' \int d^4k'' s_1^\mu(k)\, {}_R D_{F\mu\nu}(k') s_2^\nu(k'') \delta(k + k') \delta(k'' - k')$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 k\, s_1^\mu(-k)\, {}_R D_{F\mu\nu}(k) s_2^\nu(k) \tag{5.45}$$

(5.4)を運動量空間に変換すると、

$$k_\mu s_r^\mu(k) = 0, \quad r = 1,\ 2. \tag{5.47}$$

である。

${}_R D_{F\mu\nu}$はk_μもしくはk_νに比例する項しかないので、(5.45)はゼロになることがわかる。

（計算）

（5.23）と(5.28)の交換関係について、

$$\left[A^\mu(x,t), \dot{A}^{\nu+}(x',t)\right] = [A^{\mu+}, \dot{A}^{\nu+}] + [A^{\mu+}, \dot{A}^{\nu-}] + [A^{\mu-}, \dot{A}^{\nu+}] + [A^{\mu-}, \dot{A}^{\nu-}]$$

ここで、生成消滅演算子を(5.28)ととると

$$\left[A^{\mu+}, \dot{A}^{\nu+}\right] = \left[A^{\mu-}, \dot{A}^{\nu-}\right] = 0$$

$$\left[A^{\mu+}, \dot{A}^{\nu-}\right] = \sum_{rkr'k'} i\omega_{k'} \frac{\hbar c^2}{2V} \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_k'}} \varepsilon_r^\mu(k) \varepsilon_{r'}^\nu(k') e^{-ikx+ik'x'} [a_r(k), a_{r'}^\dagger(k')]$$

$$= \sum_{rk} \frac{i\hbar c^2}{2V} \zeta_r \varepsilon_r^\mu(k) \varepsilon_r^\nu(k) e^{-ik(x-x')}$$

$$= -\frac{1}{2} i\hbar c^2 g^{\mu\nu} \delta(x-x')$$

同様に、

$$\left[A^{\mu-}, \dot{A}^{\nu+}\right] = -\frac{1}{2} i\hbar c^2 g^{\mu\nu} \delta(x-x')$$

よって、

$$\left[A^\mu(x,t), \dot{A}^{\nu+}(x',t)\right] = -i\hbar c^2 g^{\mu\nu} \delta(x-x')$$

であり、（5.23）が成り立つ。

(5.31)から(5.32)への変形について、

$$H=\int d^3x\, N[\pi^\mu(\mathrm{x})\dot{A}_\mu(x)+\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu(\mathrm{x}))\,(\partial^\nu A^\mu(\mathrm{x}))]$$

$$=\int d^3x\, N[-\frac{1}{2}\partial_0\dot{A}_\mu(x)\partial_0\dot{A}_\mu(x)-\frac{1}{2}(\nabla A_\mu)\cdot(\nabla A^\mu)]$$

$$=\frac{1}{2}\int d^3x\sum_{rkr'k'}\frac{\hbar c^2}{2\mathrm{V}}\frac{1}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\varepsilon_{r\mu}(k)\varepsilon^{\mu}_{r'}(k')(k_0k_0'+k\cdot k')$$

$$\times\,\mathrm{N}[a_r(k)a_{r'}(k')e^{-i(k+k')x}-a_r^\dagger(k)a_{r'}(k')e^{-i(k'-k)x}-a_r(k)a^\dagger_{r'}(k')e^{-i(k-k')x}$$
$$+a_r^\dagger(k)a^\dagger_{r'}(k')e^{i(k+k')x}]$$

$$\frac{1}{2}(2\pi)^3\sum_{rkr'k'}\frac{\hbar c^2}{2\mathrm{V}}\frac{1}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\varepsilon_{r\mu}(k)\varepsilon^{\mu}_{r'}(k')(k_0k_0'+k\cdot k')$$

$$\times\,[a_r(k)a_{r'}(k')\delta(k+k')-a_r^\dagger(k)a_{r'}(k')\delta(k-k')-a^\dagger_{r'}(k')a_r(k)\delta(k-k')$$
$$+a_r^\dagger(k)a^\dagger_{r'}(k')\delta(k+k')]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{rkr'}\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}g_{rr'}(2k_0^2)(-a_r^\dagger(k)a_{r'}(k)-a^\dagger_{r'}(k)a_r(k))$$

$$(k_0^2-k\cdot k=0,\varepsilon_{r\mu}(k)\varepsilon^{\mu}_{r'}(k)=g_{rr'})$$

よって、

$$H=\sum_{r\mathbf{k}}\hbar\omega_{\mathbf{k}}\zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}).$$

(5.34)から(5.36)への変形について、

$$\partial\mu A^{\mu+}(x)=\sum_{rk}-ik_\mu\left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}}\varepsilon_r^{\mu}(k)a_r(k)e^{-ikx}$$

$$
= \sum_{k} -i\left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-ikx}\{k_\mu \varepsilon_0^\mu(k)a_0(k) - k\cdot\varepsilon_1(k)a_1(k) - k\cdot\varepsilon_2(k)a_2(k) - k\cdot\varepsilon_3(k)a_3(k)\}
$$

$$
= \sum_{k} -i\left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-ikx}\{k_0 a_0(k) - |k|a_3(k)\}
$$

$$
= \sum_{k} -i\left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-ikx} k_0\{a_0(k) - a_3(k)\}
$$

よって

$$
\partial_\mu A^{\mu +}|\Psi\rangle = 0
$$

より

$$
[a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})]|\Psi\rangle = 0, \quad \text{all } \mathbf{k}.
$$