

# 6.1 自然単位系

ここまで  $c, G, S$  単位系を用いてきたが、  
次の章から自然単位系を採用する。

自然単位系では、質量 ( $M$ )、作用 ( $A$ )、速度 ( $V$ )  
を基本的な次元と考え、 $\hbar = c = 1$  を選ぶ。

例えば:  $E = m^2 + p^2 = m^2 + k$  と簡単表せる。

自然単位系では、あらゆる量が  $M$  の冪の次元を持つ。

$$L = \frac{A}{MV}, \quad T = \frac{A}{MV^2}$$

また一般的に、 $M^p L^a T^r = M^{p-a-r} A^{a+r} V^{-a-2r}$   
が成り立つ。

微細木構造定数は,

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137.04} \quad (\text{c.g.s})$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = (\text{h.u.})$$

自然単位系 (E. C. G. S.) に直した場合は,

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}$$

$$\hbar c = 1.973 \times 10^{-11} \text{ MeV} \cdot \text{cm}$$

を用いて、諸量を MeV, cm, s で表せばよい。

例えば Thomson の 背散乱断面積 (1.12) は、

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m^2} \quad (m = 0.511 \text{ MeV}) \text{ である。}$$

この式を面積に交換するには、

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m^2} \times (\hbar c)^2 = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$$

## 6.2. S行列展開

これまで、主に自由場を(H, P)で考えてきたが、  
これから、相互作用している場を言明べる。

例えば、QEDにおいて、電子-陽電子場と電磁場が  
相互作用している系を対象として、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (6.8)$$

自由場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0$ は、

$$\mathcal{L}_0 = N \left[ \bar{\psi}(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) - \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu(x)) (\partial^\mu A^\nu(x)) \right] \quad (6.9)$$

相互作用ラグランジアン密度 $\mathcal{L}_1$ は、

$$\mathcal{L}_1 = N [ e \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) ] \quad (6.10)$$

と与えられる。

(6.8)に対応して、系の全ハミルトニアンも

$$H = H_0 + H_1, \quad (6.11)$$

自由場                  相互作用

と与えられる。

まとめ.

$$i\hbar \frac{d}{dt} |A, t\rangle_I = H_I(t) |A, t\rangle_I$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} O^I(t) = [O^I(t), H_0]$$

$$O^I(t) = U_0^\dagger(t) O^S U_0(t) = U(t) O^H(t) U^\dagger(t)$$

$$U_0(t) = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar}$$

$$U(t) = e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} e^{-iH(t-t_0)/\hbar}$$

$$|A, t\rangle_I = U(t) |A\rangle_H$$

I, P では.

$$i\hbar \frac{d}{dt} O^I(t) = [O^I(t), H_0]$$

$$i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle_I = H_I(t) |\Phi(t)\rangle_I \quad (6.12)$$

$$H_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_I^S e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (6.13)$$

式(6.12)は時間に依存するハミルトニアンの  $H_I(t)$  の元での Schrödinger 方程式のような形をしている。

もし  $H_I = 0$  と置けば I, P の状態ベクトルは時間に依存しない。有限の相互作用が  $|\Phi(t)\rangle$  の時間変化を引き起こす。系の初期状態が時刻  $t = t_0$  において  $|k\rangle$  に指定されているものとする。

$$|\Phi(t_0)\rangle = |k\rangle \quad (6.14)$$

式(6.12)を解くことができれば  $|\Phi(t)\rangle$  が与えられる。また  $H_I(t)$  のエルミート性から  $|\Phi(t)\rangle$  の時間発展はユニタリ変換となる。よって

$$\langle \Phi(t) | \Phi(t) \rangle = \text{const.}$$

我々が今やろうとしている定式化は、粒子間の衝突・散乱過程を扱うことには適している。

衝突過程を扱う場合 始状態  $|i\rangle$  は、  
( $t_i = -\infty$ ) に設定し、その時は系に含まれる  
粒子が互いに充分に離れているので、実行的  
には相互作用がほとんどないものとみなせる。  
よって確定した粒子が、確定した粒子状態  
を占めている状態を設定すればよい。

つまり、散乱過程において、系に含まれる粒子が  
互いに近づいて衝突し(相互作用のこと)再び  
遠ざかる。  
すなわち、

$$\begin{array}{ccc} \text{始状態} & & \text{終状態} \\ |i\rangle & \xrightarrow[\text{相互作用}]{(式 6.12)} & |f\rangle \\ |i\rangle & & |f\rangle \end{array}$$

補足④

S, P では状態ベクトルが時間に依存.

$$i\hbar \frac{d}{dt} |A, t\rangle_S = H |A, t\rangle_S$$

$$|A, t\rangle_S = U_S(t) |A, t_0\rangle_S$$

$$\text{よって } U_S(t) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}$$

H, P では演算子が時間に依存.

$$S, P \rightarrow H, P.$$

$$|A_H\rangle = U_S^\dagger(t) |A, t\rangle_S = |A, t_0\rangle_S$$

$$O^H(t) = U_S^\dagger(t) O^S U_S(t) \rightarrow \frac{d}{dt} \hat{O}_H = \frac{1}{i\hbar} [\hat{O}_H, \hat{H}]$$

$$\text{よって } H^t = H^S = H.$$

I, P では ハミルトニアンを2つの部分に分ける.

$$H = H_0 + H_1$$

$$S.P \rightarrow I, P.$$

$$|A, t\rangle_I = U_0(t) |A, t\rangle_S$$

$$O^I = U_0^\dagger(t) O^S U_0(t)$$

$$U_0(t) = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |A, t\rangle_I = i\hbar \left[ \frac{i}{\hbar} \hat{H}^{(0)} e^{i\hat{H}^{(0)}t/\hbar} |A, t\rangle + e^{i\hat{H}^{(0)}t/\hbar} \frac{d}{dt} |A, t\rangle_S \right]$$

$$= -\hat{H}^{(0)} |A, t\rangle_I + e^{i\hat{H}^{(0)}t/\hbar} \hat{H} e^{-i\hat{H}^{(0)}t/\hbar} |A, t\rangle_I$$

$$= \hat{H}_I(t) |A, t\rangle_I$$

$$\hat{H}_I(t) = U_0^\dagger(t) \hat{H} U_0(t)$$



つまり、ある行列  $S$  を用いて、

$$|\underline{\Phi}(\infty)\rangle = S |\underline{\Phi}(-\infty)\rangle = S |i\rangle \quad (6.16)$$

とかける。

一般に、多くの異なる終状態  $|f\rangle$  が確率的に生じるが、 $|\underline{\Phi}(\infty)\rangle$  には全ての可能性が含まれているとみる。(例えば、電子-陽電子衝突では、弾性散乱、制動放射、対消滅など)

系の状態が指定した終状態  $|f\rangle$  へと移行している遷移の確率は、

$$|\langle f | \underline{\Phi}(\infty) \rangle|^2 \quad (6.17)$$

これに対応する確率振幅は、

$$\langle f | \underline{\Phi}(\infty) \rangle = \langle f | S | i \rangle \equiv S_{fi}. \quad (6.18.)$$

$$|\underline{\varnothing}(\infty)\rangle = \sum_{\mathcal{F}} |\mathcal{F}\rangle \langle \mathcal{F} | \underline{\varnothing}(\infty)\rangle = \sum_{\mathcal{F}} |\mathcal{F}\rangle S_{\mathcal{F}i} \quad (6.19)$$

ここで  $S$  行列のユニタリ性を次のように表現できる。

$$\sum_{\mathcal{F}} |S_{\mathcal{F}i}|^2 = 1 \quad (6.20)$$

(6.20) は「確率保存則だから」生成、消滅も含んで実現する確率の総和が「1」であることが保証される。

(6.12) を (6.14 a) の初真条件の下で解かなくてはならない。  
この式を系組み直すと。

$$|\underline{\varnothing}(t)\rangle = |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_{\text{int}}(t_1) |\underline{\varnothing}(t_1)\rangle$$

この方程式を解くために逐次代入をする。

反復して用いて.

$$|\underline{Q}(t)\rangle = |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) |i\rangle \\ + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) |\underline{Q}(t)\rangle$$

となる。逐次代位を繰り返して、 $t \rightarrow \infty$  の極限を考へると、

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n T\{H_I(t_1), H_I(t_2) \dots H_I(t_n)\} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n T\{H_I(t_1), H_I(t_2) \dots H_I(t_n)\}$$

となる。この式が  $S$  行列の Dyson 展開であり、本書において用いる摂動論の  $\rho$  マトリクスの出発点となる。

1sと1pは、 $H_0$ の固有状態と考えた。

( $H_1=0$ )とおいた。しかし、ひとつの電子は、たとえ他の電子と離れていても、仮想的な光子の雲におおわれている。) おして1s, 1pを採用するには、正当な理由が必要、

迷熱仮説。

$$|1s\rangle \rightarrow |1s(t)\rangle \psi(t)$$

$\psi(t)$ は  $-T \leq t \leq T$  の間  $\psi(t) = 1$  を保ち、 $t \rightarrow \pm\infty$  において単音周に  $\psi(t) \rightarrow 0$  になるものとする。

迷熱仮説の本質は  $[-T \leq t \leq T, \ll T$   
欠乏しい時間  $|t| \leq T$  のあいだに起こる散乱は、  
( $t \ll -T$ ), ( $t \gg T$ ) の系の状態に依存しないということである。

## 6.3 Wickの定理.

(6.23)から具体的に遷移 $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ の振幅

$\langle f|S|i\rangle$ を指定した次数に割いて求める方法を調べる必要がある。式(6.23)の中のみ(2)は、相互作用による端を含んでおり、

生成、消滅演算子に割って1次である。

したがって、展開式は、大抵多くの異なる

項を記述している。しかし特定の過程

$|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ を考える時は、特定の項だけを取り出せばよい。

始状態に存在する粒子を消滅演算子と、

終状態に存在する粒子を作るための生成演算

子を含め必要がある。

(仮想的な中間粒子を導入するのであれば)

これらの粒子の生成・消滅を適切に扱い)

導入しないのであれば、計算は著しく簡単になる。

このためにはS行列展開を正規積だけの和に限定すればよい。

1例目は Compton 散乱 ( $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ ) を考える。

$$\mathcal{L}_I(x) = -\mathcal{L}_I(x) = -e N[\bar{\psi}(x) A(x) \psi(x)]$$

よって唯一の Compton 散乱に寄与する正規積は、

$$\bar{\psi}^- A^- \psi^+ A^+ \text{ である。}$$

S 行列を正規積の和に展開する方法を教える。  
(Dyson と Wick が考案)

一連の演算子  $E, Q, R, \dots, W$  と表す。  
これらの正規積は、

$$N(QR \dots W) = (-1)^P (Q'R' \dots W')$$

と表れる。  $Q', R', \dots, W'$  は  $Q, R, \dots, W$  を並べかえて、  
おべの消滅演算子をおべの生成演算子の右に配置。  
(1) の指数  $P$  は、隣接するフェルミオン演算子を交換した回数  
を表す。

分配則が成り立つ,

$$N(RS \dots + VW \dots) = N(RS \dots) + N(VW \dots)$$

相互作用ハミルトニアン密度は、正規積として書ける。

$$\mathcal{H}_I(x) = N\{A(x)B(x)\dots\}$$

2つの場の演算子.  $A \equiv A(x_1)$   $B \equiv B(x_2)$  に関して

$$AB - N(AB) = \begin{cases} [A^\dagger, B] & \text{両方とも右に移動} \\ [A, B] & \text{その他.} \end{cases}$$

とかけ替える。

$$AB = N(AB) + \langle 0|AB|0 \rangle$$

$x_1^0 \neq x_2^0$  として、 $N(AB) = \pm N(BA)$  なる:

両方とも右に移動. その他は正.

これより、

$$T\{A(x_1) B(x_2)\} = N\{A(x_1) B(x_2)\} + \langle 0 | T\{A B\} | 0 \rangle \quad (6.30)$$

が得られる。

そこで T 積の真空期待値に対して、

$$\underline{A(x_1) B(x_2)} \equiv \langle 0 | T\{A(x_1) B(x_2)\} | 0 \rangle \quad (6.31)$$

を導入しておく。これを A と B の縮約と呼ぶ。

A, B が粒子の生成と消滅の組み合わせになっている場合は真空期待値は 0 になる。0 にならない縮約は、

Feynman 伝播関数になる。

$$\underline{\phi(x_1) \phi(x_2)} = i \Delta_F(x_1 - x_2) \quad (3.55)$$

$$\underline{\phi(x_1) \phi^\dagger(x_2)} = \underline{\phi^\dagger(x_2) \phi(x_1)} = i \Delta_F(x_1 - x_2) \quad (3.59)$$



$$\psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) = -\bar{\psi}_\beta(x_2) \psi_\alpha(x_1) = i S_{\alpha\beta}(x_1 - x_2) \quad (4.61)$$

$$A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) = i D_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2)$$

式(6.30)を多数の演算子を含む場合(1)一般化する。

$$N(A \underbrace{BCDE \dots}_{\dots} \underbrace{JKLM \dots}_{\dots}) \\ = (-1)^p \underbrace{AK}_{\dots} \underbrace{BC}_{\dots} \underbrace{EL}_{\dots} \dots N(DF \dots JM \dots)$$

例)  $N(\psi_\alpha(x_1) \psi_\beta(x_2) \underbrace{A^\mu(x_3) \bar{\psi}_\gamma(x_4) \bar{\psi}_\delta(x_5)}_{\dots})$   
 $= (-1) \underbrace{\psi_\beta(x_2) \bar{\psi}_\delta(x_5)}_{\dots} N(\psi_\alpha(x_1) A^\mu(x_3) \bar{\psi}_\gamma(x_4))$

すべての時刻が異なる場合 (したがって  $x_i^0 \neq x_j^0$ ) の時

$$\begin{aligned}
 T(ABCD \dots WX YZ) \\
 &= N(ABCD \dots WX YZ) \\
 &\quad N(\underbrace{AB} \dots YZ) + N(\underbrace{ABC} \dots YZ) + \dots + N(\underbrace{ABC \dots X} \dots YZ) \\
 &\quad + N(\underbrace{ABCD} \dots YZ) + \dots + N(\underbrace{ABCD \dots WX} \dots YZ) + \dots
 \end{aligned}$$

(6.35)

式の右辺は  $(ABCD \dots X Y Z)$  が作れる、  
 すべての可能な一般化正規積の総和となる。

相互作用密度 (6.26) の下で、 $S$  行列展開は、  
 混合  $T$  積

$$T\{ \alpha_1(x_1) \dots \alpha_n(x_n) \} = T\{ N(AB \dots)_{x_1} \dots N(AB \dots)_{x_n} \}$$

生成演算子と消滅演算子を区別して、  
 $x_r = (x_r^0, x_r)$  を  $\xi_r = (x_r^0 \pm \epsilon, x_r)$   
 におき換る。 ( $\epsilon > 0$ )。そうすると、

$$T\{N(AB\dots)_{x_1}, \dots, N(AB\dots)_{x_n}\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T\{(AB\dots)_{y_1}, \dots, (AB\dots)_{y_n}\}$$

6.37.

各グループの正規順序化と同時刻順序化は  $\delta_{ij}^0 \pm \epsilon$  の区別には同じになる。  $\epsilon \rightarrow 0$  とする前に、右は Wick 展開を先施すと、グループ内の系絡系はグループが既に正規化されているので 0 になる。  
 故て、(6.36) は、

$$T\{N(AB\dots)_{x_1}, \dots, N(AB\dots)_{x_n}\} = T\{(AB\dots)_{x_1}, \dots, (AB\dots)_{x_n}\}_{no. e.t.c.}$$

no. e.t.c. は同時刻系絡系の除外を意味する。

得られる各々の正規積は、それそれに対する過程に対して、残っている演算子は始状態・終状態において存在すべき粒子を決める

次章では Wick の定理を以て、 $\langle S | S | \rangle$  への個別の過程からの寄与を評価する方法をみる。