2.6-

伊東利将

June 2020

1　統一の方法

その昔、電気と磁気は別物だったが、1820 年に Ørsted は電流がコンパスを動かすことを発見した。Faraday は磁石を動かすとその近くにある導線で出来た環に電流が発生することを発見した。Maxwell が理論を完成させる頃には電気と磁気は電磁気として広く知られるようになっていた。Einstein は重力を電磁気力を統一しようとしたが実現は不可能だった。しかし、Glashow、Weinberg、Salam によって弱い力と電磁気力を統一した。彼らの理論は 4 つの質量のない媒介粒子から始まったがうち 3 つは Higgs 機構によって質量を獲得した。W と Z は質量を持ち、フォトンは質量 0 のままとなった。弱い力が弱いのは、ベクトルボゾンの質量が大きいためである。1970 年になると次は強い力を電弱力に統一しようと試みた。基本的な考え方は以下。強い力の結合定数 α_S は短距離では減少する。同様に弱い力の結合定数 α_W もゆっくりだが減少する。3 つの結合定数の中で最も小さい電磁気力の結合定数 α_e は増加する。高エネルギーではこれらは同じ値に収束するのか。それが大統一理論の予言である。結合定数の繰り込み関数の形から 10^{15} GeV のエネルギースケールで起きることが見積もられている。これは Z の質量が 90 GeV であることを考えれば遥かに大きな値だが、それが意味するのは我々が低エネルギーで研究しているために 3 つの力の強さの違いが見られているということだ。大統一理論のもう一つの予言は陽子崩壊である。これはある意味バリオン数やレプトン数よりも電荷や色の保存の方がより本質的ということである。電荷や色の保存が電磁気力や色力学の源だからだ。もし、これらが保存しなければ QED や QCD を作り直ししなければならない。大統一理論では新しい相互作用が期待されバリオン数やレプトン数も変化する。例えば

$$p^+ \to e^+ + \pi^0 \tag{1}$$

又は

$$p^+ \to \overline{\nu}_\mu + \pi^+ \tag{2}$$

などの崩壊が許される。

2 Lorentz 変換

ここでは軽い復習程度にする。S' 系が S 系に対して一定速度 $\boldsymbol{v}$ で動いているとき、Lorentz 変換は以下。但し、運動方向を x とする。

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{3}$$
$$y' = y \tag{4}$$
$$z' = z \tag{5}$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{6}$$

Lorentz 逆変換では v の符号を逆にすれば良い。更に、以下のような現象も帰結される。

2.1 同時刻の相対性

S に於いて同時刻に別々な場所で事象が発生すると、S' では

$$t'_A = t'_B + \gamma\frac{v}{c^2}(x_B - x_A) \tag{7}$$

となり、同時刻ではない。

2.2 Lorentz 収縮

動いている系から見る長さ L' と止まったいる系で見た長さ L は関係

$$L' = \gamma L \tag{8}$$

を満たし、γ だけ短くなる。

2.3 時間の遅れ

S' 系で t'=0 から $t' = T'$ 迄時計が進んだとする。これを S 系で計るとどうなるか。その時計は t=0 で動き始めて $t' = T'$ で止まるので、$t = \gamma T'$ となる。明らかに S 系での時間間隔は

$$T = \gamma T' \tag{9}$$

と γ だけ長くなっている。つまり、動いている系では時間の進みが遅くなる。

2.4 速度の足し算

粒子が S' に対して速度 $\boldsymbol{u'}$ で x 方向に動いているとする。S に対するその速度 $\boldsymbol{u}$ はどのくらいか。その粒子は時間 $\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x')$ で距離 $\gamma(\Delta x' + v\Delta t')$ 進むので

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'} \tag{10}$$

が成立する。右辺の分子分母を Δt で割り、速度の定義を代入すると

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \tag{11}$$

となる。

3　4元ベクトル

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という行列を用いることで x 方向のブーストは

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{12}$$

と表される。これは、x 方向ブーストに限った表記ではない。また、Lorentz 不変量

$$I = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 \tag{13}$$

は計量 $g_{\mu\nu}$ を用いて

$$I = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = x_{\mu} x^{\mu} \tag{14}$$

と書ける。ここで、計量の符号は (+,-,-,-) と取り、

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu} \tag{15}$$

を定義した。更に、反変ベクトルと共変ベクトルをそれぞれ

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu} \tag{16}$$

$$a_{\mu} = g_{\mu\nu} a^{\nu} \tag{17}$$

で定義する。これより

$$a^{\mu} b_{\mu} = a^0 b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \tag{18}$$

は Lorentz 不変になる。また、

$$a^2 = a {\cdot} a = (a^0)^2 - \boldsymbol{a}^2 \tag{19}$$

について $a^2 > 0$、$a^2 = 0$、$a^2 < 0$ の訪台を順に時間的、光子的、空間的という。また、テンソルは例えば 2 階のテンソル $s^{\mu\nu}$ は

$$s'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\kappa} \Lambda^{\nu}_{\sigma} s^{\kappa\sigma} \tag{20}$$

のように変換する。更に、s^{μ}_{μ} はスカラーである等に注意。

4　エネルギーと運動量

我々は

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \tag{21}$$

を速度として語るが、Lorentz 不変な量である固有時間 τ を用いて固有速度

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} \tag{22}$$

も用いる方が良い。但し、

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \tag{23}$$

である。ここで関係性は

$$\boldsymbol{\eta} = \gamma \boldsymbol{v} \tag{24}$$

となる。(22) で $d\tau$ は Lorentz 不変なので、分子のみを Lorentz 変換すれば良いので、例えば先の速度合成の公式などに比べれば遥かに楽である。固有速度は 4 元ベクトル

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{25}$$

の一部でその第 0 成分は

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dt}{\frac{1}{\gamma}dt} = \gamma \tag{26}$$

である。よって

$$\eta^\mu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) \tag{27}$$

となる。なお、

$$\eta_\mu \eta^\mu = \gamma^2(c^2 - {v_x}^2 - {v_y}^2 - {v_z}^2) = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2 \tag{28}$$

より、これは明らかに Lorentz 不変。つまり、運動量を $m\boldsymbol{\eta}$ と定義することで相対論と運動量保存則が矛盾しないことになる。
4 元運動量

$$p^\mu = m\eta^\mu \tag{29}$$

はその空間成分が相対論的 3 元運動量で

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}} \tag{30}$$

となり、時間成分は

$$p^0 = \gamma mc \tag{31}$$

である。相対論的エネルギーを

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}} \tag{32}$$

と定義すると

$$p^0 = \frac{E}{c} \tag{33}$$

となる。つまり、

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) \tag{34}$$

であり、

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}^2 = m^2c^2 \tag{35}$$

も Lorantz 不変となっている。ここで、先ほど定義した E を考察する。E を Taylor 展開すると

$$E = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2} + \dots\right) = mc^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + \dots \tag{36}$$

で、第 2 項が古典的運動エネルギーである。第 1 項は定数で、古典力学ではエネルギーの定数の有無は無視できるので、その意味で古典力学の結果に一致している。この第 1 項は静止エネルギーである。扨、$m = 0$ の時はどうするか。このときは

$$E = |\boldsymbol{p}|c \tag{37}$$

が成立するが、(30) や (32) は不定形となり意味をなさない。量子力学の帰結として

$$E = h\nu \tag{38}$$

があり、これがエネルギーを与えてくれる。