4.3.1-

伊東利将

June 2020

1　スピン統計

Dirac 粒子は Fermi 統計に従うのだが、反交換関係を交換関係に置き換えることにより

$$H = \int d^3\boldsymbol{x} \mathrm{N} \left\{ \overline{\psi}(x) \left(-i \not{\partial} + m \right) \psi(x) \right\} \tag{1}$$

は

$$H = \sum_{r,\boldsymbol{p}} E_{\boldsymbol{p}} \left(N_r(\boldsymbol{p}) - \overline{N}_r(\boldsymbol{p}) \right) \tag{2}$$

となるが、これは Bose 統計に従うので $N_r(\boldsymbol{p})$ と $\overline{N}_r(\boldsymbol{p})$ は 0 以上の自然数を制限なく取ることが出来る。これは、最低状態が存在しないことを意味するので、最低エネルギー状態の存在を要求するならば、Dirac 場を Fermi 統計に従って量子化しなければならない。

Klein-Gordon 場を Fermi 統計に従って量子化したらどうなるか。$x-y$ がスペースライクであるとき、二つの観測量 $A(x)$ と $B(x)$ は交換可能である。つまり、

$$[A(x), B(y)] = 0 \quad \text{for } (x-y)^2 < 0 \tag{3}$$

である。また、エネルギー運動量密度や電荷カレント密度は場の演算子に於いて双線形である。

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \tag{4}$$

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B \tag{5}$$

を用いることで観測可能量の双線形性を保持するためにスペースライクなとき場は可換か反可換かでないといけないことが分かる。つまり、実 Klein-Gordon 場は

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{for } (x-y)^2 < 0 \tag{6}$$

又は

$$\{\phi(x), \phi(y)\} = 0 \quad \text{for } (x-y)^2 < 0 \tag{7}$$

となる。量子化の際に生成消滅演算子の交換関係を反交換関係に置き換えるということを考えれば Klein-Gordon 場を Fermi 統計に従って量子化することは交換関係を保てないということはすぐに分かるので、Klein-Gordon 場は Bose 統計で量子化する必要があると分かる。これは、他のスピンを持つ粒子にも言えて、整数スピンを持つ粒子は Bose 統計、半整数スピンを持つ粒子は Fermi 統計に従い、これ以外の粒子は自然にはない。

2 フェルミオンのプロパゲーター

中間子のプロパゲーターを先に導入したが、それと同様に Feynman フェルミオンプロパゲーターを

$$\langle 0|T\{\psi(x)\overline{\psi}(x')\}|0\rangle \tag{8}$$

とし、ここで、T 積は

$$T\{\psi(x)\overline{\psi}(x')\} = \theta(t-t')\psi(x)\overline{\psi}(x') - \theta(t'-t)\overline{\psi}(x')\psi(x) \tag{9}$$

と定義される。このマイナスの要素はフェルミオン場の反交換性を反映している。フェルミオンのプロパゲーターを計算するためには

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(x')|0\rangle &= \langle 0|\psi^+(x)\overline{\psi}^-(x')|0\rangle \\ &= \langle 0|\{\psi^+(x),\overline{\psi}^-(x')\}|0\rangle \\ &= iS^+(x-x')\end{aligned}$$

となることから

$$\langle 0|\psi^+(x)\overline{\psi}^-(x')|0\rangle = iS^+(x-x') \tag{10}$$

$$\langle 0|\overline{\psi}(x')\psi(x)|0\rangle = iS^-(x-x') \tag{11}$$

に注意しなければならない。これらより、フェルミオンプロパゲーターは

$$\langle 0|T\{\psi(x)\overline{\psi}(x')\}|0\rangle = iS_{\mathrm{F}}(x-x') \tag{12}$$

$$S_{\mathrm{F}}(x) = \theta(t)S^+(x) - \theta(-t)S^-(x) = (i\not{\partial}+m)\Delta_{\mathrm{F}}(x) \tag{13}$$

と記述される。$\Delta_{\mathrm{F}}(x)$ の表式を思い出せば $S_{\mathrm{F}}(x)$ は

$$S_{\mathrm{F}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4\boldsymbol{p}e^{-ipx}\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\epsilon} \tag{14}$$

$t' < t$ では (10) が採用されるのでこれは x' で生成され、x に移動し、x で消滅することを意味している。$t' > t$ についても同様に考察出来る。フェルミオンの動きを表す矢が $\overline{\psi}$ 場 (x') から ψ 場 (x) に向かっているので、ここから時間に沿って電子の矢が走るとき、反対に陽電子の矢が走ることになる。Compton 散乱の最低次の項を考える。図 (4.2)(a) では線に沿って電子が移動している。x' でフォトンが出されていて、最初の x のフォトンは吸収をされている。図 (4.2)(b) では $t < t'$ のプロセスを記述している。最初のフォトンが x で消滅して電子陽電子のペアが生成されている。それは即ち最後の電子と、最後のフォトンを生成するために最初の電子とともに消滅している場所である x' に移動した陽電子である。これら二つの図は連続的に変形可能。フェルミオンのプロパゲーター (8) はこの二つを状況を含んでいるので時間要素を排除して記述できる。図 (4.4) はそれぞれ電子陽電子を中間に飛ばした Compton 散乱を描いている。

3 電磁相互作用

$\phi(x)$ と $\boldsymbol{A}(x)$ により特徴づけられる電磁場の相対論的電子の相互作用を考察する。非相対論では

$$i\frac{\partial}{\partial t}\to i\frac{\partial}{\partial t} - q\phi(x) \tag{15}$$

$$-i\nabla \to -i\nabla - q\boldsymbol{A}(x) \tag{16}$$

と置き換える。四元ポテンシャルを用いるとこれは

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x) \tag{17}$$

となる。これが Dirac 方程式でも同様に成立すると仮定すると Dirac 方程式とラグランジアン密度はそれぞれ

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = -e\not{A}(x)\psi(x) \tag{18}$$

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}(x)(i\not{D} - m)\psi(x) \tag{19}$$

となる。

$$\mathscr{L}_0 = \overline{\psi}(x)(i\not{\partial} - m)\psi(x) \tag{20}$$

$$\mathscr{L}_1 = e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) \tag{21}$$

の和で $\mathscr{L}$ は記述されることも分かる。

$$s^\alpha(x) = q\overline{\psi}(x)\gamma^\alpha\psi(x) \tag{22}$$

で記述されるカレントは

$$s^\alpha(x) = -e\overline{\psi}(x)\gamma^\alpha\psi(x) \tag{23}$$

と電子の場合は書かれる。電荷のない場合の放射場のラグランジアン密度 $\mathscr{L}_{\mathrm{rad}}$ を入れることで完全なラグランジアン密度になることに注意。この部分は次の章で扱うので以下では議論を省略する。我々はポテンシャルではなく電磁場を観測するのでポテンシャルのゲージ変換について不変でないといけない。この変換は

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \tag{24}$$

で記述される。これを (19) に入れると

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L}' = \mathscr{L} + e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu f(x) \tag{25}$$

となり、明らかに変化している。そこで

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x)e^{ief(x)} \tag{26}$$

$$\overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}'(x) = \overline{\psi}(x)e^{-ief(x)} \tag{27}$$

とすれば $\mathscr{L}$ は不変であることが分かる。この (26)(27) の変換は局所的と言われ、$f(x) = \mathrm{const.}$ であるときは大域的であると言う。大域的変換から保存電荷が導かれたことは既に見た。理論のゲージ不変性は電磁場ポテンシャルのゲージ変換と Dirac 場の局所的位相変換の両方を同時に行ったときの不変性を要求する。