

3.3 共変交換関係

上で考えてきた交換関係は、時間が同じ同時交換関係を考えてきたが、正準形式によって生じる場の交換関係について明らかではない。実クラインゴールドン場を典型的な例として、2つの任意の時空点 x 、 y について場の交換関係の共変性を示すものとする。この交換関係はスカラーであるため、ローレンツ不変な関数でなければならない。

$\phi = \phi^+ + \phi^-$ と書くと、

$$[\phi^+(x), \phi^+(y)] = [\phi^-(x), \phi^-(y)] = 0 \quad (3.36)$$

$$\text{よって、} [\phi(x), \phi(y)] = [\phi^+(x), \phi^+(y)] + [\phi^-(x), \phi^-(y)] \quad (3.37)$$

式(3.7)より、

$$\begin{aligned} [\phi^+(x), \phi^-(y)] &= \frac{\hbar c^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} [\underbrace{a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')}_{\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}] e^{-i\mathbf{k}x + i\mathbf{k}'y} \\ &= \frac{\hbar c^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k}(x-y)} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ &= \frac{\hbar c^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k}(x-y)} \quad (3.38) \end{aligned}$$

$$(V \rightarrow \infty \text{ で } \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}, \quad k_0 = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c})$$

ここで

$$\Delta^+(x) \equiv \frac{-ic}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k}x}, \quad k_0 = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c} \quad (3.39)$$

を定義すると、式(3.38)は、

$$[\phi^+(x), \phi^-(y)] = i\hbar c \Delta^+(x-y) \quad (3.40)$$

と書け、また、

$$[\phi^-(x), \phi^+(y)] = -i\hbar c \Delta^+(y-x) \equiv i\hbar c \bar{\Delta}^+(x-y) \quad (3.41)$$

と定義する。

式(3.40), (3.41), (3.37)から、

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\hbar c \Delta(x-y) \quad (3.42)$$

$$\Delta(x) \equiv \Delta^+(x) + \Delta^-(x) = \frac{-c}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} \sin kx \quad (3.43)$$

$\Delta(x)$ は実奇関数。

また、クラインゴルドン方程式をみたす。

$$(\square_x + \mu^2)\Delta(x-y) = 0 \quad (3.44)$$

($-k_0^2 + k^2 + \mu^2 = 0$ より)

また、(3.43)の $\Delta(x)$ は、

$$\Delta(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - \mu^2) \varepsilon(k_0) e^{-ikx} \quad (3.45)$$

と書ける。ここで、 $d^4k = d^3k dk_0$ と $-\infty < k_0 < \infty$

$$\varepsilon(k_0) = \frac{k_0}{|k_0|} = \begin{cases} +1 & (k_0 > 0) \\ -1 & (k_0 < 0) \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \delta(k^2 - \mu^2) &= \delta\left[k_0^2 - \left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2\right] \\ &= \frac{c}{2\omega_k} \left[\delta\left(k_0 + \frac{\omega_k}{c}\right) + \delta\left(k_0 - \frac{\omega_k}{c}\right) \right] \quad (3.47) \end{aligned}$$

実際、

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4k \frac{c}{2\omega_k} \left[\delta\left(k_0 + \frac{\omega_k}{c}\right) + \delta\left(k_0 - \frac{\omega_k}{c}\right) \right] \frac{k_0}{|k_0|} e^{-ikx} \\ &= \frac{-ic}{2(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{\omega_k} \left(e^{-ikx} - e^{ikx} \right) \Big|_{k_0 = \frac{\omega_k}{c}} \\ &= \frac{-c}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} \sin kx \Big|_{k_0 = \frac{\omega_k}{c}} \end{aligned}$$

$\delta(k^2 - \mu^2)$ $\varepsilon(k_0)$

固有ロ-レンツ変換 (空間、時間反転しない) において、 $\Delta(x)$ は不変。
式 (3.45) から明らか。(固有ロ-レンツ変換は過去と未来を交換しないので、 $\varepsilon(k)$ も不変。)

同時交換関係

$$\begin{aligned} [\phi(x, t), \phi(y, t)] &= i\hbar c \Delta(x-y, 0) \\ &= \frac{ic}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

また、任意の2点 x, y が空間的に離れていれば、
ロ-レンツ不変性より、

$$\begin{aligned} \Delta(x-y) &= \Delta(x-y, 0) = \Delta(y-x, 0) \\ &= -\Delta(x-y) = 0 \end{aligned}$$

よって、

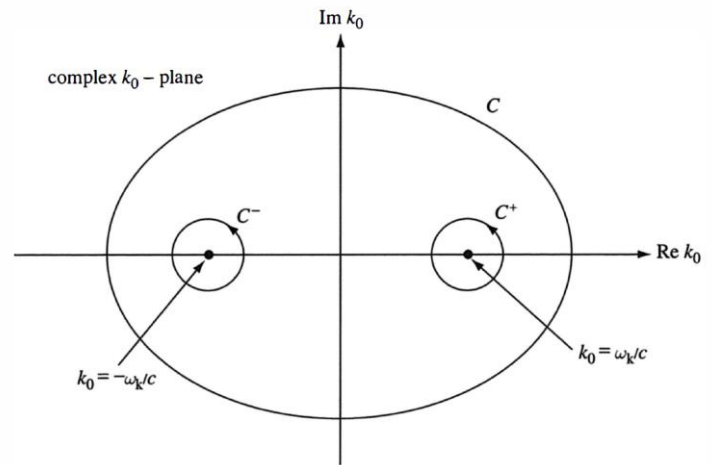
$$[\phi(x), \phi(y)] = i\hbar c \Delta(x-y) = 0, \text{ for } (x-y)^2 < 0 \quad (3.49)$$

場が観測可能量なら、空間的に離れた2点の場の観測は、
お互いに影響を及ぼさない。これは、微視的因果律として知られる。
影響を及ぼすには、信号が光速以上の速度で伝わらないといけないが、
これは相対性理論に反する。

Section 4.3 の最後で、スピンと統計の関係を議論するとき、
場自身が観測可能量でないときでも、(3.49) の因果律は重要になる。

$\Delta^\pm(x)$ を表す特に便利なものは、複素 k_0 平面で閉曲線 C_\pm に沿って積分したものを考えること。

$$\Delta^\pm(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C_\pm} \frac{d^4 k e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2} \quad (3.50)$$



実際には、

$$\begin{aligned} \Delta^+(x) &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} \frac{d^4 k e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2} = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} \frac{d^4 k e^{-ikx}}{k_0^2 - (\omega_k/c)^2} \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^4} 2\pi i \int d^3 k \frac{e^{-ikx}}{k_0 + \omega_k/c} \Big|_{k_0 = \omega_k/c} \\ &= \frac{-i c}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^3 k}{\omega_k} e^{-ikx} \Big|_{k_0 = \omega_k/c} \end{aligned}$$

($\Delta^-(x)$ も同様)

$$\Delta(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_C \frac{d^4 k e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2}$$

他の Δ -function はいろんな積分経路を選べば得られる。

3.4 中間子伝播関数

量子場の理論で非常に重要な Δ -function を導出して説明する。

その実用性(特に、共変な摂動論の発展にとって)は、ファインマンによって実現された。

ここでも、実のラインゴルドン場を考える。

Δ^+ -function は、2つの場の積の真空期待値として記述される。

$$\begin{aligned} i\hbar c \Delta^+(x-x') &= \langle 0 | [\phi^+(x), \phi^-(x')] | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^+(x) \phi^-(x') | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.51)$$

時間順序積

$$T\{\phi(x)\phi(x')\} = \begin{cases} \phi(x)\phi(x'), & \text{if } t > t' \\ \phi(x')\phi(x), & \text{if } t' > t \end{cases} \quad (3.52)$$

つまり、右から左に時系列に並べたもの。

ステップ関数

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t > 0 \\ 0, & \text{if } t < 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

$$T\{\phi(x)\phi(x')\} = \Theta(t-t')\phi(x)\phi(x') + \Theta(t'-t)\phi(x')\phi(x) \quad (3.54)$$

Feynman Δ -function Δ_F は T-product の真空期待値で定義

$$i\hbar c \Delta_F(x-x') \equiv \langle 0 | T\{\phi(x)\phi(x')\} | 0 \rangle \quad (3.55)$$

式(3.51), (3.41)より。

$$\Delta_F(x) = \Theta(t)\Delta^+(x) - \Theta(-t)\Delta^-(x) \quad (3.56a)$$

$$= \pm \Delta^\pm(x) \quad \text{if } t \gtrless 0 \quad (3.56b)$$

$t > t'$ のとき、この真空期待値は、 $\langle 0 | \phi(x)\phi(x') | 0 \rangle$ となる。

この表現は、 x' で生成され、 x に移動し、 x で消滅する中間子を表す。

$t' > t$ のときも、同様に解釈できる。

これら2つの状況を概略的に Fig. 3.2 に示す。

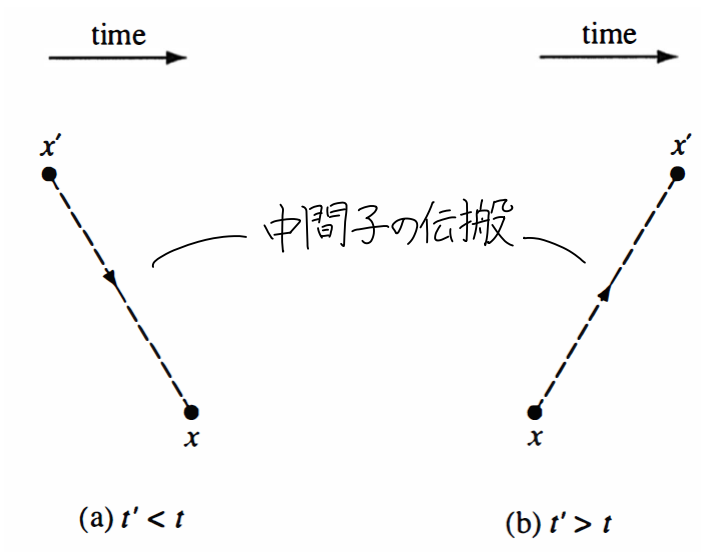


Figure 3.2 The meson propagator (3.55)

式(3.55)の Δ_F は、クラインゴルドン場の中間子に対するフeynマン伝播関数として記される。後に導入されるフェルミオン、光子伝播関数と区別するために、中間子伝播関数とも呼ばれる。

これらの伝播関数がどのように生じるか説明するために、定性的に核子散乱を考える。この過程では、始状態と終状態で2つの核子が存在する。

散乱、つまり相互作用は、核子間の仮想中間子の交換に対応する。最も単純なそのような過程は、Fig 3.3に示される1中間子の交換である。

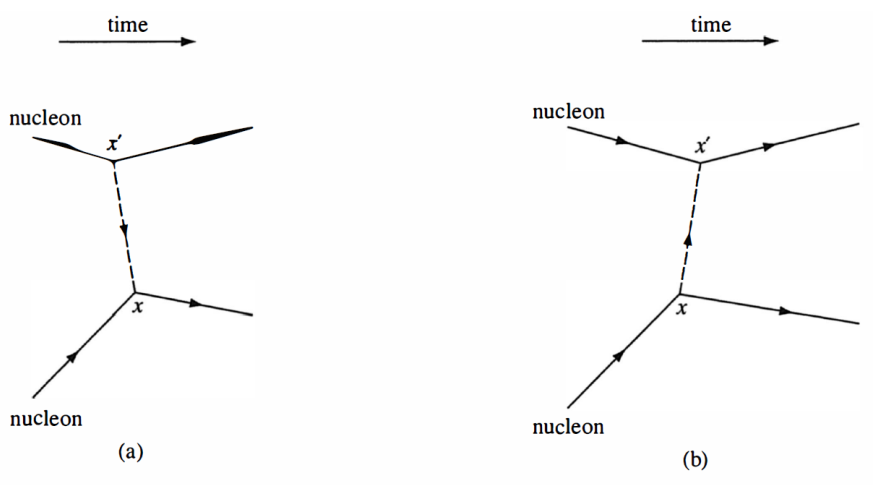


Figure 3.3 Contribution from one-meson exchange to nucleon-nucleon scattering, (a) $t' < t$; (b) $t' > t$

2つの状況は、 $t \geq t'$ に依存している。

実際の計算では、任意の2点で起こる中間子の放出と吸収に対応する座標成分が積分される。

空間的に離れているとき、ローレンツ変換によって、 $t \geq t'$ がどうが変わるので、どちらが先か後か慣性系によって変わる。

ここで、両方のケースを一緒に検討すると、共変ファインマン伝播関数につながり、Fig. 3.4のように表す。時間順序はなく、中間子の移動を表す矢印はない。

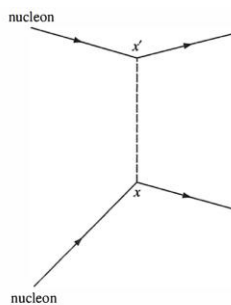


Figure 3.4 Feynman graph for the one-meson contribution to nucleon-nucleon scattering

ここで、ファインマン図(ダイアグラム)を導入した。これらは数学を描く最も有用なものである。

$x-x'$ が空間的に離れている場合、中間子が2点間を光速より速く移動していると解釈するだろう。(Fig. 3.4)

しかし、これは、伝播関数を考えるかわりに、適切な2点の放出、吸収確率を計算すればよい。

以下では、運動量空間の中間子伝播関数を用いる。

Δ_F は式(3.50)の Δ^\pm と同じ積分形式で与えられる。

$$\Delta_F = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{d^4k e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2} \quad (3.57)$$

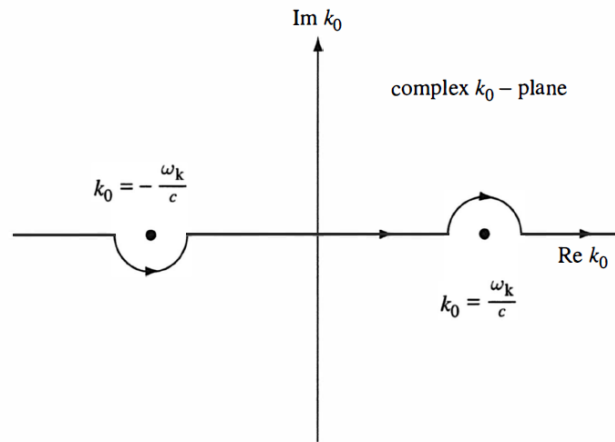


Figure 3.5 The contour C_F for the meson propagator Δ_F , Eq. (3.57)

$x^0 > 0$ のとき、 $k_0 \rightarrow -i\infty$ で $e^{-ik_0 x^0} \rightarrow 0$ なので、 k_0 下半面での無限半円上の積分と一致する ($R \rightarrow \infty$ で、半円の寄与はゼロ)

逆に、 $x^0 < 0$ のとき、 $k_0 \rightarrow i\infty$ で $e^{-ik_0 x^0} \rightarrow 0$ なので上半面で積分。

実際、 $x^0 > 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \Delta_F(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{d^4k e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2} = \frac{1}{(2\pi)^4} 2\pi i \int dk \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0 + \frac{\omega_k}{c}} \Big|_{k_0 = \frac{\omega_k}{c}} \\ &= \frac{-i c}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} e^{-ikx} \Big|_{k_0 = \frac{\omega_k}{c}} = \Delta^+(x) \end{aligned}$$

同様に、

$x^0 < 0$ で、

$$\Delta_F(x) = -\Delta^-(x)$$

(3.66b)と一致

Fig 3.5の経路のかたりに、ポールを微小量だけ実軸からずらして、

Figs.6のように経路をとることもできる。

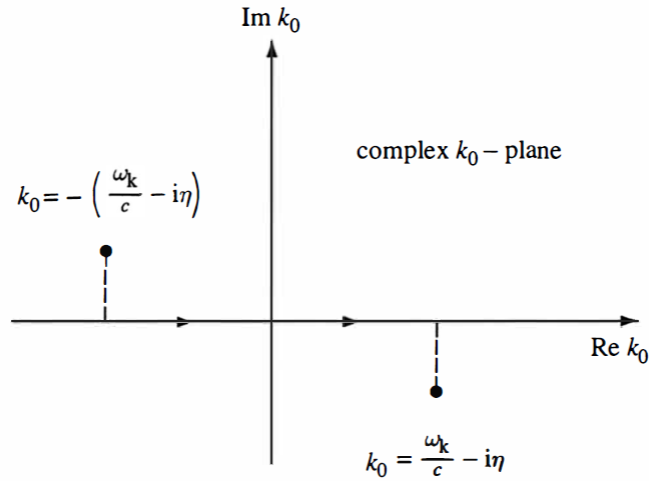


Figure 3.6 Contour and displaced poles for the meson propagator Δ_F , Eq. (3.58)

このとき、

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k e^{-ikx}}{k_0^2 - (\frac{\omega_k}{c} - i\eta)^2} \quad (3.58)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

$(\epsilon = \frac{2\eta\omega_k}{c}, \quad -\infty < k_0, k_1, k_2, k_3 < \infty)$

複素スカラー場についても同様に議論できる。

荷電中間子伝播関数は、

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi^\dagger(x') \} | 0 \rangle = i\hbar c \Delta_F(x-x') \quad (3.59)$$

となる。

$x^0 > x'^0$ とすると、 x' に粒子が生成され、 x で粒子が消滅する。

ここで作り出した粒子の電荷をプラスとすれば、 x' で電荷が+1され、 x で電荷が-1される過程。

この過程を時間を逆向きに追うと x で電荷が-1され、 x' で電荷が+1されたようにみえる。

つまり、反粒子の過程。(反粒子は負のエネルギーをもつ、時間を逆行する粒子) この反粒子による過程は $x^0 < x'^0$ により、同じ過程と見せる粒子と反粒子の過程が存在する。