Klein-Gordon 場

伊東利将

2020/5/18

1　実 Klein-Gordon 場

スピン 0 の相対論的粒子を考える。フォトンはポーラリゼーションがあるのでより複雑であるが、それは 5 章で見る。

1.1　実 Klein-Gordon 場

$$E^2 = m^2 + \boldsymbol{p}^2 \tag{1}$$

が一般に成立する。もし粒子が単一でスカラー波動関数 $\phi(x)$ で書かれるならば非相対論的量子力学の描像は $\boldsymbol{p} \to -i\nabla$、$E \to i\frac{\partial}{\partial t}$ であることを考えると Klein-Gordon 方程式

$$\left(\Box + \mu^2\right)\phi(x) = 0 \tag{2}$$

が導かれる。ここで、$\mu = \frac{mc}{\hbar} = m$ である。だが、Klein-Gordon 方程式を単一粒子の方程式と解釈すると負エネルギーの存在という問題を引き起こす。これは Klein-Gordon 方程式に限らず相対論的単一粒子の方程式に起こる問題である。これは、多粒子系を考えることにより解消される問題である。

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x \mathscr{M}^{\alpha\beta} = \int d^3x \left\{ \left(x^\alpha \mathscr{F}^{0\beta} - x^\beta \mathscr{F}^{0\alpha}\right) + \pi_r(x) S^{\alpha\beta}_{r,s} \phi_s(x) \right\} \tag{3}$$

この式から単一粒子に関するスカラー場は軌道角運動量を持ちスピンはないということが分かる。つまり、スピンは 0。よって、Klein-Gordon 方程式はパイオンや K 中間子 (どちらもスピン 0) の粒子を記述する。

Klein-Gordon 方程式を満たす実スカラー場 $\phi(x)$ を考える。この場は電気的に中性である。荷電すると複素になる。

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \mu^2 \phi^2\right) \tag{4}$$

がラグランジアン密度で、場 $\phi(x)$ の共役量は

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(x) \tag{5}$$

となり、同時刻の交換関係は以下である。

$$[\phi(\boldsymbol{x}, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{x}', t)] = i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{6}$$

$$[\phi(\boldsymbol{x},t),\phi(\boldsymbol{x}',t)]=[\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t),\dot{\phi}(\boldsymbol{x}',t)]=0 \tag{7}$$

ここで、$\phi(\boldsymbol{x})=\phi^{+}(\boldsymbol{x})+\phi^{-}(\boldsymbol{x})$ とする。但し、

$$\phi^{+}(\boldsymbol{x})=\sum_{\boldsymbol{k}}=\sqrt{\frac{1}{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}}a(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{8}$$

$$\phi^{-}(\boldsymbol{x})=\sum_{\boldsymbol{k}}=\sqrt{\frac{1}{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}}a^{\dagger}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{9}$$

で、これは電磁場のアナロジーである。また、$k^0=\omega_{\boldsymbol{k}}=\sqrt{\mu^2+\boldsymbol{k}^2}$ で与えられていて、$E=\omega_{\boldsymbol{k}}=\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2}$ であり、$\phi(\boldsymbol{x})$ はエルミート。こうすると

$$[a(\boldsymbol{k}),a^{\dagger}(\boldsymbol{k}')]=\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \tag{10}$$

$$[a(\boldsymbol{k}),a(\boldsymbol{k}')]=[a^{\dagger}(\boldsymbol{k}),a^{\dagger}(\boldsymbol{k}')]=0 \tag{11}$$

となる。調和振動子と同様に考えて $N(\boldsymbol{k})=a^{\dagger}(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})$ は固有値 $n(\boldsymbol{k})$=0,1,$\cdots$ を吐き出す。同時に $a^{\dagger}(\boldsymbol{k})$ と $a(\boldsymbol{k})$ は生成消滅演算子になっている。　ハミルトニアンと運動量はそれぞれ

$$H=\int d^3x\frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2+(\nabla\phi)^2+\mu^2\phi^2\right) \tag{12}$$

$$\boldsymbol{P}=-\int d^3x\dot{\phi}\nabla\phi \tag{13}$$

で、これを生成消滅演算子で書くと

$$H=\sum_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}}\left(a^{\dagger}(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})+\frac{1}{2}\right) \tag{14}$$

$$\boldsymbol{P}=\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\left(a^{\dagger}(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})+\frac{1}{2}\right) \tag{15}$$

で、自由 Klein-Gordon 場では $\boldsymbol{P}$ は定数。　$\mid 0\rangle$ を真空とすると

$$a(\boldsymbol{k})\mid 0\rangle=0\quad(\forall\boldsymbol{k}) \tag{16}$$

つまり、

$$\phi^{+}(\boldsymbol{x})\mid 0\rangle=0\quad(\forall\boldsymbol{x}) \tag{17}$$

であるが、有限のエネルギー $\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}}$ を持つ。しかし、これはエネルギー差を与えるだけなので相対的に除ける。

次に正規順序積を考える。正規順序積では全ての消滅演算子は生成演算子の右に書かれる。$N(\cdots)$ で正規順序積を表すと以下の例のようになる。

$$N\left(a(\boldsymbol{k}_1)a(\boldsymbol{k}_2)a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_3)\right)=a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_3)a(\boldsymbol{k}_1)a(\boldsymbol{k}_2) \tag{18}$$

$$\begin{aligned}N\left(\phi(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{y})\right)&=N\left(\left(\phi^{+}(\boldsymbol{x})+\phi^{-}(\boldsymbol{x})\right)\left(\phi^{+}(\boldsymbol{y})+\phi^{-}(\boldsymbol{y})\right)\right)\\&=N\left(\phi^{+}(\boldsymbol{x})\phi^{+}(\boldsymbol{y})\right)+N\left(\phi^{+}(\boldsymbol{x})\phi^{-}(\boldsymbol{y})\right)+N\left(\phi^{-}(\boldsymbol{x})\phi^{+}(\boldsymbol{y})\right)+N\left(\phi^{-}(\boldsymbol{x})\phi^{-}(\boldsymbol{y})\right)\\&=\phi^{+}(\boldsymbol{x})\phi^{+}(\boldsymbol{y})+\phi^{-}(\boldsymbol{y})\phi^{+}(\boldsymbol{x})+\phi^{-}(\boldsymbol{x})\phi^{+}(\boldsymbol{y})+\phi^{-}(\boldsymbol{x})\phi^{-}(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

正規順序積では生成演算子又は消滅演算子同士の順番は固定されていないので、以下のようなことが成立する。

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}_3)a(\boldsymbol{k}_1)a(\boldsymbol{k}_2) = a^\dagger(\boldsymbol{k}_3)a(\boldsymbol{k}_2)a(\boldsymbol{k}_1) \tag{19}$$

これは、(11) 式からも理解される。

$|\,0\rangle$ はどんな正規順序積の値も消し、ここまでをまとめると例えば、

$$P^\alpha = (H, \boldsymbol{P}) = \sum_{\boldsymbol{k}} k^\alpha a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \tag{20}$$

となる。例えば 1 粒子状態は $a^\dagger(\boldsymbol{k})\,|\,0\rangle$ で、運動量 $\boldsymbol{k}$ の 2 粒子状態は $\frac{1}{\sqrt{2}}a^\dagger(\boldsymbol{k})^2\,|\,0\rangle$、$\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{k}'$ として運動量 $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}'$ の 2 粒子状態は $a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,|\,0\rangle$ で与えられる。Klein-Gordon 方程式に従う粒子はボゾンなので、$n(\boldsymbol{k})$ はどんな 0 以上の整数でも取れる。また、$a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,|\,0\rangle$ はボゾンが粒子のラベルの付いて対称的であることも意味している。

2　複素 Klein-Gordon 場

チャージという概念以外は実 Klein-Gordon 場と同じように議論できるので、適宜省略する。

複素 Klein-Gordon 場のラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ は

$$\mathscr{L} = \mathrm{N}\left(\partial_\alpha\phi^\dagger\partial^\alpha\phi - \mu^2\phi^\dagger\phi\right) \tag{21}$$

で、ϕ とその随伴である $\phi^\dagger$ は独立であるとして扱うから、Klein-Gordon 方程式は

$$(\Box + \mu^2)\phi(\boldsymbol{x})) = 0 \tag{22}$$

$$(\Box + \mu^2)\phi^\dagger(\boldsymbol{x})) = 0 \tag{23}$$

となる。場の共役量は ϕ と $\phi^\dagger$ に関してそれぞれ $\pi(\boldsymbol{x}) = \dot{\phi}^\dagger(\boldsymbol{x})$、$\pi^\dagger(\boldsymbol{x}) = \dot{\phi}(\boldsymbol{x})$ である。同時刻の交換関係を考えると $[a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})'] = [b(\boldsymbol{k}), b^\dagger(\boldsymbol{k})'] = \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}$、他は 0 であることが導かれる。但し、ここで生成消滅演算子は以下のような関係にある。

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi^+(\boldsymbol{x}) + \phi^-(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{1}{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left(a(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + b^\dagger(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \tag{24}$$

$$\phi^\dagger(\boldsymbol{x}) = \phi^{+\dagger}(\boldsymbol{x}) + \phi^{-\dagger}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{1}{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left(b(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \tag{25}$$

a、b の粒子の数演算子は $A = a, b$ として

$$N_A(\boldsymbol{k}) = A^\dagger(\boldsymbol{k})A(\boldsymbol{k}) \tag{26}$$

真空は

$$a(\boldsymbol{k})\,|\,0\rangle = b(\boldsymbol{k})\,|\,0\rangle = 0 \quad (\forall\boldsymbol{k}) \tag{27}$$

で定まられる。4 元運動量は

$$P^\alpha = (H, \boldsymbol{P}) = \sum_{\boldsymbol{k}} k^\alpha\left(N_a(\boldsymbol{k}) + N_b(\boldsymbol{k})\right) \tag{28}$$

である。

扨、チャージについて考える。

$$\phi_r \to \phi'_r = e^{i\epsilon}\phi_r = (1 + i\epsilon\phi_r) \tag{29}$$

$$\phi^\dagger_r \to \phi'^\dagger_r = e^{-i\epsilon}\phi_r = (1 - i\epsilon\phi^\dagger_r) \tag{30}$$

という変換を考えると、

$$Q = -iq\int d^3x \mathrm{N}\left(\phi^\dagger(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x})\phi^\dagger(\boldsymbol{x})\right) \tag{31}$$

というチャージを考えることが出来る。チャージの流れは

$$s^\alpha(\boldsymbol{x}) = (\rho(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})) = -iq\mathrm{N}\left(\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial x_\alpha}\phi - \frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}\phi^\dagger\right) \tag{32}$$

で与えられる。これより

$$\frac{\partial s^\alpha(\boldsymbol{x})}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{33}$$

が導かれる。また、Q は

$$Q = q\sum_{\boldsymbol{k}}\left(N_\alpha(\boldsymbol{k}) - N_\beta(\boldsymbol{k})\right) \tag{34}$$

とも書ける。$+q$ と $-q$ のチャージが a、b の粒子に対応している。更に、a、b についての対称性より、a、b の内部における交換は単に Q の符号を変えるのみである。これは、スピン 0 のボゾンに限った話ではなく 0 でないチャージを持った粒子スバ手での反粒子の発生は相対論的量子力学の基本的な事実である。例えば π 中間子を考える。電荷 $q = e > 0$ とする。π^+ と π^- を a、b の粒子として複素 Klein-Gordon 場を考えることが出来る。実 Klein-Gordon 場で考えれば π^0 が出てくる。電気的に中性であっても自身と異なる反粒子が現れることもある。擬スカラー K^0 中間子は $\overline{\mathrm{K}}^0$ 中間子という反粒子を持つ。両者は電気的に中性であるが、ハイパーチャージ $Y = \pm 1$ を持つ。これは複素 Klein-Gordon 場による描像で書かれる。ハイパーチャージは強い相互作用で保存されるが、弱い相互作用では保存されない。

$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ と $\phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$ と ϕ_1 と ϕ_2 を実で取るとこれらは独立であるが、この生成消滅演算子はチャージを表現するわけではない。

3 計算の補足

ここではやや複雑と思われる計算の補足を行う。

3.1 式 11 と 12 の計算

まず、エネルギー運動量テンソルを導出する。エネルギーと運動量の保存は時空の並進より導出されるから、

$$x^\mu \to x^\mu + \delta a$$

を考えると場 ϕ について

$$\delta\phi = \partial_\nu\phi\delta^\nu a$$

である。ラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ の微小変化を考えると

$$
\begin{aligned}
\delta\mathscr{L} &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \\
&= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) \\
&= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi\right)\delta a^\nu
\end{aligned}
$$

となる。また、

$$
\partial\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu} = \delta^\mu_\nu \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu}\delta a^\nu
$$

でもあるから、これらより

$$
\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \delta^\mu_\nu\mathscr{L}\right) = 0
$$

から

$$
T^\mu_\nu = \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \delta^\mu_\nu\mathscr{L}\right) \tag{35}
$$

をエネルギー運動量テンソルとする。
エネルギーについては

$$
T^0_0 = \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - \mu^2\phi^2\right)
$$

となり、これを計算して (11) 式が得られる。
運動量についても同様にして求まる。

3.2　式 33 の証明

ϕ とそのエルミート共役が Klein-Gordon 方程式に従うことを最後に用いて以下のように証明される。

$$
\begin{aligned}
\partial_\alpha s^\alpha &\propto \partial_\alpha\left\{(\partial^\alpha\phi^\dagger)\phi - (\partial^\alpha\phi)\phi^\dagger\right\} \\
&= (\partial_\alpha\partial^\alpha\phi^\dagger)\phi + (\partial^\alpha\phi^\dagger)(\partial_\alpha\phi) - (\partial_\alpha\partial^\alpha\phi)\phi^\dagger - (\partial^\alpha\phi)(\partial_\alpha\phi^\dagger) \\
&= -\mu^2\phi^\dagger\phi + \mu^2\phi\phi^\dagger \\
&= 0
\end{aligned}
$$