

2 Passage of Radiation Through Matter

2.1 Cherenkov Radiation

チェレンコフ放射過程のエネルギー・運動量保存

チェレンコフ放射は物質中を通過する荷電粒子が媒質中での光速を超えた際に起こる放射で、波面は荷電粒子の進行方向に対して $\theta_C > 1/\beta n(\omega)$ で与えられる。これらのことは放射が起こると仮定すれば相対論的なエネルギーと運動量の保存から導き出される。

電磁波は媒質と相互作用して吸収、放射を繰り返しながら進むことになるのでその速度は遅くなる。このことをマクロな性質として取り込んでやると、電磁波のラグランジアンが受ける変更はもともと光速 c であった部分を屈折率 n を用いて c/n で表される”媒質中での光速”で置き換えることになる。このことから特に運動量とエネルギーの関係は

$$E_\gamma = \frac{c}{n} p_\gamma$$

となる。

一方で荷電粒子のラグランジアンは、媒質と荷電粒子の相互作用が無視できるとすると、全く変更を受けず $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ のままである。このラグランジアン中の光速は相互作用の伝播速度の意味なので、屈折率は関係しない。また、エネルギー、運動量は

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

で与えられる。

これらをもとに以下のような反応を考える。

この場合に運動量の保存とエネルギーの保存を考えると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mv'}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \cos \theta' + p_\gamma \cos \theta \\ 0 = \frac{mv'}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \sin \theta' + p_\gamma \sin \theta \\ \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{cp_\gamma}{n} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

となる。第1の式と第2の式から θ' を消去する。

$$\left(\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - p_\gamma \cos \theta \right)^2 + (p_\gamma \sin \theta)^2 = \frac{m^2 v'^2}{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$$

となるが、これをさらに変形して、

$$\frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{2mv p_\gamma \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + p_\gamma^2 = \frac{m^2 v'^2}{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$$

となる。ここで、

$$\frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^2 \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right)$$

であるので、

$$\frac{m^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{2mv p_\gamma \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + p_\gamma^2 = \frac{m^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

である。さらにエネルギー保存則を用いて右辺を v と p_γ で表したのちに整理して、

$$-\frac{2mp_\gamma}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(v \cos \theta - \frac{c}{n} \right) + p_\gamma^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = 0$$

と書ける。 $p_\gamma \neq 0$ であれば、

$$p_\gamma = \frac{2mv}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\cos \theta - \frac{1}{\beta n}}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

である。ここで $n > 1$, $\frac{c}{n} < 1$ という条件下であったので、 p_γ が正の値を持つ条件は、

$$\cos \theta > \frac{c}{nv} = \frac{1}{n\beta}$$

である。さらに $\cos \theta$ は 1 以下でなければならないので、このような θ が存在する条件は、

$$v > \frac{c}{n}$$

つまり荷電粒子の速度が媒質中の光速を超えることが条件になる。

荷電粒子はこの過程を繰り返しながら進むのであるが、進行方向に対して等方的にこのような放射を起こすので、粒子の進行方向は変わらない。つまり以下の図 1 のように運動する。

また、電磁波を放射する最大の角度は $\cos \theta_C = \frac{c}{nv}$ なので以下のような図が書ける。図 2 からわかるように波面は進行方向に対して上で与えられる θ_C である。また波面になる部分は電磁場がゼロの部分とゼロでない値を持つ部分の境界であり、位相が揃っているためコヒーレントな波となる。

放射される光の角度依存性

この過程で放射された電磁波（エネルギー）の様子を調べたいのであるが、電磁波は重なり合う性質を持つ。電磁波のエネルギーは波として重ねあってから絶対値をとって考えることになるので、上のような最初から絶対値をとったような描像は不適切で、電磁波を波として扱ってやる必要がある。

電荷 ze を持った荷電粒子が厚さ L の媒質を一定速度でまっすぐに通過したときの単位振動数、単位立体角あたりのエネルギーは

$$\frac{d^2 E}{d\omega d\Omega} = z^2 \alpha \hbar n \beta^2 \sin^2 \theta \left| \frac{\omega L}{2\pi \beta c} \frac{\sin \xi(\theta)}{\xi(\theta)} \right|^2$$

（教科書の間違い？左辺と右辺の次元が合わない、次の式変形（教科書での 2.60）で c だけ合わない）ここで、 α は微細構造定数であり、 ξ は

$$\xi(\theta) = \frac{\omega L}{2\beta c} (1 - \beta n \cos \theta)$$

で与えられる量である。

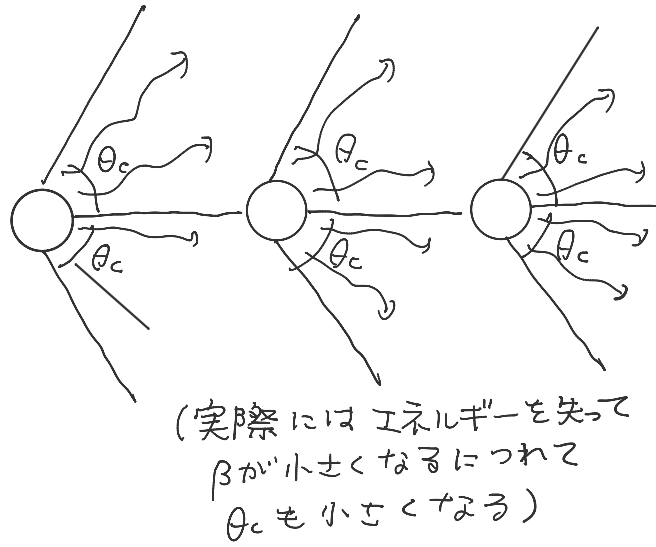


図1 荷電粒子の運動の様子

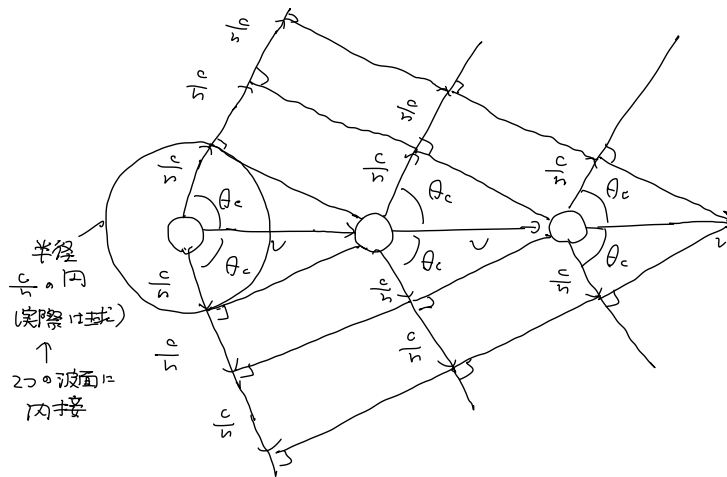


図2 チェレンコフ光の波面の様子

ここでの参考文献はジャクソンの電磁気学である。導出の方針は媒質の分極が存在するマクスウェル方程式において、分極を応答関数と電場の畳み込みの形に書く。すると時間についてのフーリエ成分（周波数空間）でのマクスウェル方程式は誘電率が ϵ_0 から $\tilde{\epsilon}(\omega)$ に置き換わっただけの式になる。このため、真空中での電荷が加速度を受けるときの式を流用することができる。通常、真空中では加速度を受けない電荷は放射を起こさないのであるが、媒質中では式の中の c が c/n に置き換わっており v が c/n を超えることができるため、真空中では値を持たない部分が値を持つようになる。

このエネルギー放射の式の sinc 関数の 2 乗の部分はフラウンホーファー回折にも現れる項である（例えば場古典 p.175）。つまりチェレンコフ光は回折と似たようなパターンを示す。関数形が sinc 関数に依存しているので、ピークは $\xi(\theta)$ のゼロ点。つまり $\cos \theta = 1/\beta n$ である。以下の図 3 に sinc 関数の 2 乗の関数形を貼り付けておく。

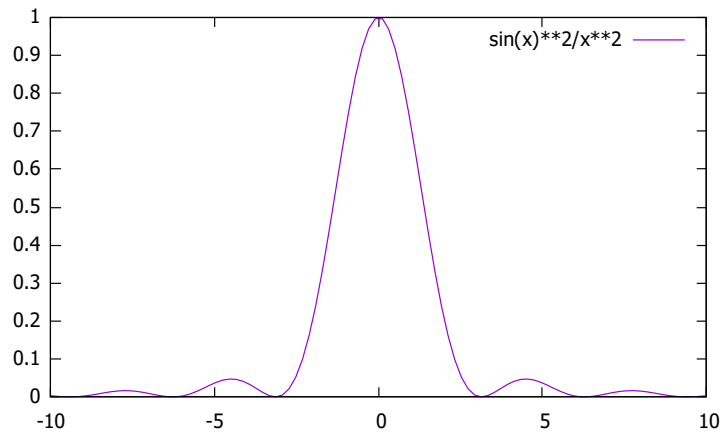


図 3 sinc 関数の 2 乗の形

媒質の厚さ L が波長 $2\pi\omega/c$ に比べて大きい極限では、関数形はデルタ関数に近づく。sinc 関数は無限遠ではゼロなので、 L が大きい極限では $\cos \theta$ がわずかにでも $1/\beta n$ からずれてしまうとそのずれが増幅されて ξ が無限まで飛ばされてしまうためである。また sinc 関数であるため積分値は一定なので、デルタ関数の性質が満たされる。

また L が小さくなると、関数形からわかるように θ_C 方向に鋭いピークを持っていたのが、 θ_C の周りに対称に幅を持つようになる。

チェレンコフ光放射過程での荷電粒子のエネルギーロス

荷電粒子が単位長さ進む間に放出されるエネルギーを調べるために L が大きいと仮定したうえで、まず立体角で積分して $(\frac{\sin^2(\xi(\theta))}{\xi^2(\theta)})$ は $\pi\delta(\xi(\theta)) = \frac{2c\pi}{n\omega L}\delta(\cos \theta - \frac{1}{n\beta})$ に収束するから、

$$-\frac{dE}{d\omega} = z^2 \frac{\alpha \hbar}{c} \omega L \sin^2 \theta_C$$

を得る。さらに L で割って、周波数 ω について $\beta > 1/n(\omega)$ という条件を満たす範囲で積分してやると、

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 \frac{\alpha \hbar}{c} \int \omega d\omega \sin^2 \theta_C = z^2 \frac{\alpha \hbar}{c} \int \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\omega)^2}\right)$$

という式が得られる。この式の中で媒質を特徴づけるパラメータは n である。

エネルギーロスは β が大きくなるにつれて大きくなる。しかし、相対論が重要となる領域であっても、このエネルギーロスは衝突によるロスに比べて無視できる（衝突によるロスは以前にみたようにベータ・ブロッホの式によって書き表されていた）。実際に、固体の密度を持った物質において荷電粒子が単位質量厚さ (math thickness) 進んだときに、チェレンコフ光として放射するエネルギーは大体 10^{-3} MeVcm²/g のオーダーである。例えば 1 つ前の章の例と比較すると、最小電離でのミューオンはプラスチックシンチレータ中を単位質量厚さ進む時に衝突によって約 2 Mev のエネルギーを落とす（プラスチックシンチレータの質量密度は約 1 gcm⁻² とした）。これと比べるとチェレンコフ光の放射は無視できる程度のものである。他に例えば、水素やヘリウムなどの気体を考えると、約 0.01 – 0.2 MeV cm²g⁻¹ となるがやはり小さい。

チェレンコフ光検出器

チェレンコフ光を放出する荷電粒子の速度の閾値や、放射角の速度依存性はチェレンコフ検出器から実験的に得られる。ここでは、その検出器を作成するうえで必要な事項を見る。上に得られた荷電粒子が媒質中を単位長さあたりに放射する振動数 ω の光のエネルギーの式から、 $\hbar\omega$ で割って（さらに ω で微分して）やることで粒子数に関する式

$$\frac{d^2N}{d\omega dx} = \frac{z^2\alpha}{c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right)$$

あるいは波長の形に書いて、

$$\frac{d^2N}{d\lambda dx} = \frac{2\pi z^2\alpha}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\lambda)}\right)$$

が得られる。

ほとんどのチェレンコフ光検出器では光電子増倍管を用いて光子を検知する。これらの機器の大体の一番感度が良いところは 350nm から 550nm である。上の式を λ について積分してやることで、荷電粒子が単位長さ進む間に検出器が検出する光子の数が得られる。ここで速度の閾値を見たい場合は、荷電粒子の速度が $\cos\theta_C = \frac{1}{\beta n}$ を満たしているものとして計算して

$$\frac{dN}{dx} = 2\pi z^2\alpha \sin\theta_C \int_{350[\text{nm}]}^{550[\text{nm}]} \frac{1}{\lambda^2} d\lambda = 475 z^2\alpha \sin^2\theta_C \text{ photons/cm}$$

と得られる。これは人間の目にも見えるほどの大きな値ではない（我々が普段目にする照明だと 1 秒当たり 1cm² に 10¹⁴ 個ほどの光子）。