2.3. ラグランジアン場の理論の量子化

離散的な格子での共役な座標と運動量

$$[\phi_r(j,t), \pi_s(j',t)] = \left[q_{ri}(t), \frac{p_{ri'}(t)}{\delta x_{i'}}\right] = i\hbar\frac{\delta_{rs}\delta_{jj'}}{\delta x_j}$$

$$[\phi_r(j,t), \phi_s(j',t)] = [\pi_r(j,t), \pi_s(j',t)] = 0 \qquad (2.30)$$

$\delta x_j \to 0$ のとき、$\dfrac{\delta_{jj'}}{\delta x_j} \to \delta(x-x')$ (Diracのδ-関数) から、

$$[\phi_r(x,t), \pi_s(x',t)] = i\hbar\delta_{rs}\,\delta(x-x')$$

$$[\phi_r(x,t), \phi_s(x',t)] = [\pi_r(x,t), \pi_s(x',t)] = 0 \qquad (2.31)$$

(2.28)より、

$$[\phi(x,t), \dot\phi(x',t)] = [\phi(x,t), c^2\pi(x',t)] = i\hbar c^2\delta(x-x')$$

$$[\phi(x,t), \phi(x',t)] = [\dot\phi(x,t), \dot\phi(x',t)] = 0 \qquad (2.32)$$

2.4. 対称性と保存則

ハイゼンベルグ方程式 $i\hbar\dfrac{dO(t)}{dt} = [O(t), H]$

Oがtに陽に依存しないなら = 0

・量子力学での不変な形式：ユニタリー変換U

$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = U|\psi\rangle \qquad O \to O' = UOU^\dagger \qquad (2.33)$

・共変 e.g. Maxwell eq. は Lorentz変換に対し共変

・振幅、(従って)観測量が不変

$U = e^{i\alpha T}$ (αは連続な実数のパラメーター、$T = T^\dagger$ (Hermite)) (2.34)

・$\alpha = 0$で単位作用素、

・極小($\alpha = \delta\alpha$)変化に対し

$U \simeq 1 + i\delta\alpha T$

(2.33)に代入して、演算子は

$$O' = O + \delta O = (1 + i\delta\alpha T)O(1 - i\delta\alpha T)$$

$$\delta O = i\delta\alpha[T, O] \qquad (2.35)$$

この変換のもとで不変ならば ハミルトニアンが不変($\delta H = 0$)、このとき

$[T, H] = 0$ → Tは運動における定数

ラグランジアン密度$\mathcal{L}$での場の理論：対称性から保存量が存在

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\alpha}=0 \qquad (f^\alpha：場の演算子とその発散の関数) \qquad (2.36)$$

$$F^\alpha(t)=\int d^3x\, f^\alpha(x,t) \qquad (2.37)$$

と定め、積分範囲を空間全体とすれば、f^jが$|x|\to\infty$で十分早く0に収束するとして

$$\frac{1}{c}\frac{dF^0(t)}{dt}=-\int d^3x \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j} f^j(x,t)$$

$$=-\int_{\partial V}\sum_{j=1}^{3} f^j(x,t)\cdot dS \qquad (j=1,2,3)$$

$$=0 \qquad (2.36a)$$

従って、

$$F^0=\int d^3x\, f^0(x,t) \qquad (2.38)$$

は保存量（$T=F^0$とすれば、対応するユニタリ演算子は(2.34)で与えられる）

f^j及びf^0/cは、三次元体積と保存量F^0/cの流れの密度

(2.36a)で言えば、有限三次元体積VでのF^0/cの減少速度は

その表面Sから流出するF^0/cの流れに等しい。

・(2.36)の保存則をみたす四元ベクトル$f^\alpha(x)$＝保存カレント（四元流密度）

⇒ネーターの定理：ラグランジアン密度$\mathcal{L}$が連続な1変数の変換に対して
（Noether）　不変ならば、対応する保存則が存在

これを他の変換に対し用いる。

$$\phi_r(x)\to\phi'_r(x)=\phi_r(x)+\delta\phi_r(x) \qquad (2.39)$$

この時$\mathcal{L}$の変分は
$$\delta\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta\phi_{r,\alpha}\underset{\text{E-L eq. (2.16)}}{\overset{\uparrow}{=}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta\phi_r\right)$$

（アインシュタインの縮約記法に則る）

$\mathcal{L}$がこの変換に対し不変、即ち$\delta\mathcal{L}=0$ならば、連続の方程式(2.36)を

$$f^\alpha=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta\phi_r$$

をもって記述できる。

(2.22),(2.38)から運動における定数は

$$F^0=c\int d^3x\, \pi_r(x)\,\delta\phi_r(x) \qquad (2.40)$$

・ ϕ_r が複素平面の時、これは量子化された理論において非エルミート演算子
このとき ϕ_r と $\phi_r^\dagger$ は独立な場である。$\mathcal{L}$ が不変として

$$\left.\begin{aligned} \phi_r \to \phi_r' = e^{i\varepsilon}\phi_r \approx (1+i\varepsilon)\phi_r \\ \phi_r^\dagger \to \phi_r^{\dagger\prime} = e^{-i\varepsilon}\phi_r^\dagger \approx (1-i\varepsilon)\phi_r^\dagger \end{aligned}\right\} (\varepsilon \in \mathbb{R}) \quad (\varepsilon\text{微小で近似}) \qquad (2.41)$$

$$\therefore\ \delta\phi_r = i\varepsilon\phi_r,\quad \delta\phi_r^\dagger = -i\varepsilon\phi_r^\dagger$$

$$F^0 = i\varepsilon c\int d^3x\left[\pi_r(x)\phi_r(x) - \pi_r^\dagger\phi_r^\dagger(x)\right]$$

F^0 の定数倍も保存量なので以下の Q について考える。(q は後に場の粒子の電荷の大きさになる)

$$Q = -\frac{iq}{\hbar}\int d^3x\left[\pi_r(x)\phi_r(x) - \pi_r^\dagger(x)\phi_r^\dagger(x)\right] \qquad (2.42)$$

交換子 $[Q, \phi_r(x)]$ を考えるにあたって ϕ_r と $\phi_r^\dagger$ は独立から ϕ_r は π_r 以外と可換 (2.31)
$(x')^0 = x^0 = ct$ として、(2.31) を用いると、

$$[Q, \phi_r(x)] = -\frac{iq}{\hbar}\int d^3x'\left[\pi_s(x'), \phi_r(x)\right]\phi_s(x') = -q\phi_r(x) \qquad (2.43)$$

$|Q'\rangle$ が Q の固有状態で固有値 Q' ならば

$$Q|Q'\rangle = Q'|Q'\rangle$$

$$\begin{aligned} Q\,\phi_r(x)|Q'\rangle &= \phi_r(x)Q|Q'\rangle - q\phi_r(x)|Q'\rangle \\ &= (Q'-q)\phi_r(x)|Q'\rangle \end{aligned}$$

より $\phi_r(x)|Q'\rangle$ も Q の固有状態で固有値 $(Q'-q)$、同様にして
$\phi_r(x)^\dagger|Q'\rangle$ 〃 $(Q'+q)$

・(次章で見る内容として) ϕ_r, $\phi_r^\dagger$ は生成消滅演算子として線形
ϕ_r は電荷 $+q$ を消滅させ $-q$ を生成
$\phi_r^\dagger$ は電荷 $-q$ 〃 $+q$ 〃
$\Rightarrow$ Q を電荷演算子として解釈

従って、$\mathcal{L}$ が (2.41) の変換に対して不変 ((2.41) で ε が x に依存しないような "global" な位相変換, e.g. ゲージ変換) のとき、電荷は保存。
即ち

$$\frac{dQ}{dt} = 0,\quad [Q, H] = 0$$

(2.42) から分かるように荷電粒子の場は複素 (非エルミート)、
非荷電粒子の場は実 (エルミート)

・(2.42) について演算子は因子の順序の不確定さに関わっていると考える。
このとき $Q|0\rangle = 0$ となるように ($|0\rangle$ は真空状態) 選ぶ。(次章で戻ってくる)

(2.41) の位相変換 によるユニタリー変換は, (2.34) を用いて,

$$U = e^{i\alpha Q} \tag{2.44}$$

と書け, 微小な α について (2.33) から, (2.43) を用いて

$$\phi_r' = e^{i\alpha Q}\phi_r e^{-i\alpha Q}$$

$$= \phi_r + i\alpha[Q, \phi_r] = (1 - i\alpha g)\phi_r \tag{2.45}$$

(2.41) と比較すると, $\varepsilon = -\alpha g$ とすれば同じになることがわかる (ハイパー荷でも同じ)

・エネルギー, 運動量, 角運動量は $\mathcal{L}$ のもとで一定で, 変換は連続
→微小変換のみを考えればよい. 四次元においては

$$x_\alpha \to x_\alpha' = x_\alpha + \delta x_\alpha = x_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta} x^\beta + \delta_\alpha \tag{2.46}$$

δ_α は微小変位, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ は $\delta_\alpha = 0$ のローレンツ変換のもとでの $x_\alpha x^\alpha$ の不変性を保つための微小な反対称テンソル ($\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta}$)

場の変換は,

$$\phi_r(x) \to \phi_r'(x') = \phi_r(x) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta}\phi_s(x) \tag{2.47}$$

ただし, 場のラベル r, s 及びローレンツの α, β について和をとる。

- x, x' は同じ時空上の点, を表す (表記が異なる)
- ϕ_r, ϕ_r' はこれら2つの座標に対応した場の成分
- $S_{rs}^{\alpha\beta}$ は $\varepsilon_{\alpha\beta}$ のように α, β について反対称な係数で, 場の変換の性質で決まる
  e.g.) ベクトルポテンシャル $A_\alpha(x)$ に対して (2.47) は, ベクトルの変換則となる

・(2.46) 及び (2.47) の変換に対し不変 → 新しい座標及び場で表現しても
関数形は同じ, 即ち

$$\mathcal{L}(\phi_r(x), \phi_{r,\alpha}(x)) = \mathcal{L}(\phi_r(x'), \underbrace{\phi'_{r,\alpha}(x')}_{=\frac{\partial\phi_r(x')}{\partial x^\alpha}}) \tag{2.48}$$

→ 場の方程式は共変

(2.48) の右辺を元の座標等で ((2.46)(2.47) を用いて) 表すことで保存則を導ける。
その結果を以下に表す.

・まず $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$ の並進変換に対して, 四次元の連続の方程式が得られる.

$$\frac{\partial \mathcal{T}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{2.49}$$

ただし

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta} - \mathcal{L} g^{\alpha\beta} \tag{2.50}$$

4元保存量は

$$cP^{\alpha}=\int d^3x\,\mathcal{T}^{0\alpha}=\int d^3x\left\{c\pi_r(x)\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\alpha}-\mathcal{L}\,g^{0\alpha}\right\} \quad (2.51)$$

P^{α}は4元エネルギー運動量ベクトルで、

$$\left.\begin{aligned}cP^0&=\int d^3x\{\pi_r\dot{\phi}_r(x)-\mathcal{L}(\phi_r,\phi_{r,\alpha})\}\\&=\int d^3x\,\mathcal{H}=H\end{aligned}\right\} \quad (2.51a)$$

としてハミルトニアン((2.24), (2.25))であり、またP^jは場の運動量成分で

$$P^j=\int d^3x\,\pi_r(x)\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_j} \quad (2.51b)$$

この表示は数値での表現で確かめられる。また$\mathcal{T}^{\alpha\beta}$はエネルギー運動量テンソルとよばれる。

・$\delta_\alpha=0$の回転変換に対しては、(2.46)〜(2.48)によって連続の方程式が与えられる

$$\frac{\partial M^{\alpha\beta\delta}}{\partial x^{\alpha}}=0 \quad (2.52)$$

$$M^{\alpha\beta\delta}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}S_{rs}^{\beta\delta}\phi_s(x)+\left[x^{\beta}\mathcal{T}^{\alpha\delta}-x^{\delta}\mathcal{T}^{\alpha\beta}\right] \quad (2.53)$$

また、ここで6元保存量($M^{\alpha\beta\delta}=-M^{\alpha\delta\beta}$)は

$$\begin{aligned}cM^{\alpha\beta}&=\int d^3x\,M^{0\alpha\beta}\\&=\int d^3x\left\{\left[x^{\alpha}\mathcal{T}^{0\beta}-x^{\beta}\mathcal{T}^{0\alpha}\right]+c\pi_r(x)S_{rs}^{\alpha\beta}\phi_s(x)\right\}\end{aligned} \quad (2.54)$$

空間的なラベル$i,j(=1,2,3)$について、M^{ij}は場の角運動量演算子

(M^{12}はz成分, etc.)

$\mathcal{T}^{0i}/c$は運動量密度 → 軌道角運動量　　(固有の)スピン角運動量

・(2.49) (2.52)について…

微小変位は　$\delta\phi_r(x)=\phi'_r(x)-\phi_r(x)$ (2.55a)

引数も変化する変位も定義　$\delta_T\phi(x)=\phi'_r(x')-\phi_r(x)$ (2.55b)

このとき　$\delta_T\phi_r(x)=[\phi'_r(x')-\phi_r(x')]+[\phi_r(x')-\phi_r(x)]$

$=\delta\phi_r(x')+\frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta}\delta x_\beta$ (2.56)

1次の微小量として近似　$\delta_T\phi_r(x)=\delta\phi_r(x)+\frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta}\delta x_\beta$

∴ (2.48)の左の変位について

$$0=\mathcal{L}(\phi'_r(x'),\phi'_{r,\alpha}(x'))-\mathcal{L}(\phi_r(x),\phi_{r,\alpha}(x))$$

$$=\delta\mathcal{L}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}}\delta x^{\alpha} \quad (2.58)$$

E−L eq. から.

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta\phi_{r,\alpha}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta\phi_r\right\} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\left[\delta_T\phi_r - \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta}\delta x_\beta\right]\right\} \quad (2.59)$$

(2.57)

(2.58), (2.59) より

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\left[\delta_T\phi_r - \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta}\delta x_\beta\right]\right\} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha = 0 \quad (*)$$

ここで $f^\alpha \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta_T\phi_r - \mathcal{T}^{\alpha\beta}\delta x_\beta$ (2.61)

とすれば

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta} - \mathcal{L}g^{\alpha\beta} \quad ((2.50)より)$$

$g^{\alpha\beta}\delta x_\beta = \delta x^\alpha$, (*) は

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta_T\phi_r - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta} - \mathcal{L}\,\delta x^\alpha\right)\right) = 0 \text{ から}$$

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (2.60)$$

・$\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$ のとき：(2.46), (2.47) から対応は $\delta x_\beta = \delta_\beta$, $\delta_T\phi_r = 0$.
$f^\alpha = -\mathcal{T}^{\alpha\beta}\delta x_\beta$ となり δ_β は4成分が独立から (2.60) はエネルギー・運動量保存則についての4元の連続の方程式となる.

・$\delta_\alpha = 0$ のとき：対応は $\delta x_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}x^\beta$, $\delta_T\phi_r = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}S_{rs}^{\alpha\beta}\phi_s(x)$

$$f^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\gamma}S_{rs}^{\beta\gamma}\phi_s(x) - \underline{\mathcal{T}^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}x^\gamma}$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\gamma}\left(x^\beta\mathcal{T}^{\alpha\gamma} - x^\gamma\mathcal{T}^{\alpha\beta}\right) \quad (\varepsilon_{\beta\gamma}は反変)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\gamma}\underline{M^{\alpha\beta\gamma}} \quad (2.62)$$

(2.53) 参照.　　$\varepsilon_{\beta\gamma}$ は独立から (2.52) が導かれる.